ACTA ARITHMETICA
XLII (1983)

Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$

Л. А. Гутник (Москва)

Введение. Осенью 1978 г. Apéry осуществил прорыв в старом вопросе о природе значений $\zeta(2k+1)$, $k \in \boldsymbol{N}$, доказав иррациональность числа $\zeta(3)$.

Следующий результат доказывается в этой статье.

Теорема 1. *Пусть $q \in \boldsymbol{Q}$, $q \neq 0$. Тогда среди чисел*

$$-\frac{3}{q}\zeta(3)+\zeta(2), \qquad \zeta(2)-2q\log 2 \tag{1}$$

имеется иррациональное число.

Допуская, что для некоторого $q \in \boldsymbol{Q}$, $q \neq 0$, одно из чисел (1) равно нулю, можно прийти к следующему выводу.

Теорема 2. *В каждом из множеств*

$$\left\{\frac{\zeta(3)}{\zeta(2)},\ \zeta(2)-\frac{6\zeta(3)\log 2}{\zeta(2)}\right\}, \qquad \left\{\frac{\log 2}{\zeta(2)},\ \zeta(2)-\frac{6\zeta(3)\log 2}{\zeta(2)}\right\} \tag{2}$$

имеется иррациональное число.

Благодарности. Мне трудно найти такие слова, которые могли бы описать поддержку, оказанную мне Н. И. Фельдманом, и степень моей признательности.

В. Г. Спринджук ознакомился с первоначальным вариантом моей работы и оказал мне большую поддержку; я хочу выразить здесь В. Г. Спринджуку мою глубокую благодарность.

Ю. В. Нестеренко прочёл первоначальный вариант рукописи и обратил моё внимание на некоторые недочёты. Ему, М. С. Аграновичу и А. Н. Андрианову, оказавшим мне поддержку, я хочу выразить мою искреннюю благодарность.

В глубоких замечаниях рецензента этого журнала на первоначальный вариант рукописи была указана возможность использования для целей этой работы аналитической теории дифференциальных уравнений и Z-преобразования. Учёт этих замечаний позволил не

только укоротить доказательство, но и улучшить изложение. Выражаю рецензенту этого журнала мою благодарность.

Мы будем здесь оперировать со следующими функциями, принадлежащими классу, который ввёл и исследовал в многочисленных работах K. S. Meijer.

Во-первых, это функция

$$f_1(z;\nu) = -G^{1,2}_{4,4}\left(-z\left|\begin{matrix}-\nu, -\nu, \nu+1, \nu+1\\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right.\right) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\Gamma(-s)\Gamma^2(1+\nu+s)}{\Gamma^3(1+s)\Gamma^2(1+\nu-s)}(-z)^s\,ds, \quad \nu\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}, \tag{3}$$

где кривая L_1 тянется от $+\infty$ к $+\infty$, охватывая множество $\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ в отрицательном направлении, но не охватывая ни одной точки из множества $-\boldsymbol{N}$. Функцию $f_1(z;\nu)$ можно представить как конечный гипергеометрический ряд

$$f_1(z;\nu) = {}_4F_3\left(\begin{matrix}-\nu,\ -\nu,\ \nu+1,\ \nu+1;\ z\\ 1, 1, 1\end{matrix}\right) = \sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}^2\binom{\nu+k}{k}^2 z^k. \tag{4}$$

Величина $f_1(1;\nu)$ появилась в работе Apéry.

Во-вторых, мы оперируем здесь с функцией

$$f_2(z;\nu) = -G^{3,2}_{4,4}\left(-z\left|\begin{matrix}-\nu,\ -\nu,\ \nu+1,\ \nu+1\\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right.\right) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\Gamma^3(-s)\Gamma^2(1+\nu+s)}{\Gamma(1+s)\Gamma^2(1+\nu-s)}(-z)^s\,ds, \quad \nu\in \boldsymbol{N}\cup\{0\}, \tag{5}$$

где кривая L_2 тянется от $-\infty$ к $-\infty$, охватывая в положительном направлении множество $-\boldsymbol{N}$, но не охватывая ни одной точки из множества $\boldsymbol{N}\cup\{0\}$. Для $f_2(z;\nu)$ мы имеем следующее разложение:

$$f_2(z;\nu) = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\prod_{\varkappa=k+1}^{\nu+k}\varkappa^2\Big)\Big(\prod_{\varkappa=\nu+k+1}^{2\nu+k+1}\varkappa^2\Big)z^{-\nu-k-1}. \tag{6}$$

Полагая здесь $y=\nu+k+1$, находим, что

$$f_2(z;\nu) = \sum_{y=\nu+1}^{\infty}R_\nu(y)z^{-y}, \tag{7}$$

где

$$R_\nu(y) = \frac{(y-1)^2\ldots(y-\nu)^2}{y^2(y+1)^2\ldots(y+\nu)^2}. \tag{8}$$

Поэтому

$$f_2(z;\nu) = \sum_{y=1}^{\infty}R_\nu(y)z^{-y}. \tag{9}$$

Наконец, пусть

$$f_3(z;\nu) = G^{4,2}_{4,4}\left(z\left|\begin{matrix}-\nu,\ -\nu,\ \nu+1,\ \nu+1\\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\end{matrix}\right.\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\Gamma^4(-s)\Gamma^2(\nu+1+s)}{\Gamma^2(\nu+1-s)}z^s\,ds. \tag{10}$$

Полагая

$$H(s) = \Gamma^4(-s)\Gamma^2(\nu+1+s)\Gamma^{-2}(\nu+1-s)z^s \tag{11}$$

находим

$$f_3(z;\nu) = \sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{res}_{s=-\nu-1-k}H(s). \tag{12}$$

Далее

$$\operatorname*{res}_{s=-\nu-1-k}H(s) = \left(\log z R_\nu(\nu+1+k) - \left(\frac{d}{dy}R_\nu\right)(\nu+1+k)\right)z^{-\nu-1-k}. \tag{13}$$

Поэтому

$$f_3(z;\nu) = \log z f_2(z,\nu) + \sum_{y=1}^{\infty}z^{-y}\left(\frac{d}{dy}R_\nu\right)(y). \tag{14}$$

Разлагая дробь $R_\nu(y)$ на элементарные дроби, находим

$$R_\nu(y) = \sum_{k=0}^{\nu}\left(\frac{\alpha_{\nu,k}}{(y+k)^2} + \frac{\beta_{\nu,k}}{y+k}\right), \tag{15}$$

где

$$\alpha_{\nu,k} = \binom{\nu}{k}^2\binom{\nu+k}{k}^2, \qquad \beta_{\nu,k} = \operatorname*{res}_{y=-k}R_\nu(y) = 2\alpha_{\nu,k}\left(-\sum_{\varkappa=k+1}^{\nu+k}\frac{1}{\varkappa} + \sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{1}{\varkappa} - \sum_{\varkappa=1}^{\nu-k}\frac{1}{\varkappa}\right). \tag{16}$$

Из (9), (15) следует, что

$$f_2(z;\nu) = \sum_{y=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\nu}\big(\alpha_{\nu,k}(y+k)^{-2} + \beta_{\nu,k}(y+k)^{-1}\big)\Big)z^{-y} = \tag{17}$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu}\Big(\alpha_{\nu,k}\sum_{y=1}^{\infty} z^{-y}(y+k)^{-2}+\beta_{\nu,k}\sum_{y=1}^{\infty} z^{-y}(y+k)^{-1}\Big)=$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} z^k\Big(\alpha_{\nu,k}\Big(L_2(z^{-1})-\sum_{1\leqslant l\leqslant k} z^{-l}l^{-2}\Big)+\beta_{\nu,k}\Big(-\log\Big(1-\frac{1}{z}\Big)-\sum_{1\leqslant l\leqslant k} z^{-l}l^{-1}\Big)\Big)=$$

$$= \alpha(z;\nu)L_2(z^{-1})+\beta(z;\nu)\Big(-\log\Big(1-\frac{1}{z}\Big)\Big)-\varphi(z;\nu),$$

где

$$L_2(z)=\sum_{l=1}^{\infty} z^l l^{-2}, \tag{18}$$

$$\alpha(z;\nu)=\sum_{0\leqslant k\leqslant\nu}\alpha_{\nu,k}z^k=f_1(z;\nu), \tag{19}$$

$$\beta(z;\nu)=\sum_{0\leqslant k\leqslant\nu}\beta_{\nu,k}z^k, \tag{20}$$

$$\varphi(z;\nu)=\sum_{0\leqslant k\leqslant\nu}\sum_{1\leqslant l\leqslant k} z^{k-l}(\alpha_{\nu,k}l^{-2}+\beta_{\nu,k}l^{-1}). \tag{21}$$

Из (14), (15) аналогично следует, что

$$f_3(z;\nu)=(\log z)f_2(z;\nu)+2\alpha(z;\nu)L_3(z^{-1})+\beta(z;\nu)L_2(z^{-1})-\psi(z;\nu), \tag{22}$$

где

$$L_3(z)=\sum_{l=1}^{\infty} z^l l^{-3}, \tag{23}$$

$$\psi(z;\nu)=\sum_{0\leqslant k\leqslant\nu}\sum_{1\leqslant l\leqslant k} z^{k-l}(2\alpha_{\nu,k}l^{-3}+\beta_{\nu,k}l^{-2}). \tag{24}$$

Для $\nu\in N+1$ обозначим через D_ν минимальное число из N со свойством, что для каждого $k=1,\dots,2\nu$ и каждого простого p, $2\leqslant p\leqslant\nu$ выполняется неравенство

$$v_p(k^{-1}D_\nu)\geqslant 0,$$

где v_p — аддитивное p-адическое нормирование поля Q. Ясно, что для любого $\varepsilon>0$

$$D_\nu=\prod_{p\leqslant\nu} p^{[\log 2\nu/\log p]}\leqslant e^{(\log 2\nu)\left(\frac{\nu}{\log\nu}+O\left(\frac{\nu}{(\log\nu)^2}\right)\right)}=O(e^{\nu(1+\varepsilon)}). \tag{25}$$

Пусть далее

$$\begin{aligned} K(z;\nu)&=D_\nu^3\alpha(z;\nu), & L(z;\nu)&=D_\nu^3\beta(z;\nu),\\ M(z;\nu)&=D_\nu^3\varphi(z;\nu) & N(z;\nu)&=D_\nu^3\psi(z;\nu).\end{aligned} \tag{26}$$

Ясно, что

$$K(z;\nu)\in Z[z].$$

Покажем теперь, что

$$L(z;\nu)\in Z[z],\quad M(z;\nu)\in Z[z],\quad N(z;\nu)\in Z[z]. \tag{27}$$

Достаточно убедиться, что для любого простого $p\in\nu+N$ выполняется неравенство $v_p(\beta_{\nu,k})\geqslant 0$, $0\leqslant k\leqslant\nu$. Если $\nu+k<p$, это неравенство, очевидно, следует из (16). Если же $\nu+1\leqslant p\leqslant\nu+k$, то p^2 является делителем числа $\alpha_{\nu,k}=\big((\nu+k)!\big)^2(k!)^{-4}\big((\nu-k)!\big)^{-2}$. Поэтому, так как $\varkappa\leqslant 2\nu$ и, если $p\geqslant\nu+1$, выполняется неравенство $p^2>2\nu$, мы имеем $v_p(p^2/\varkappa)\geqslant 0$. Итак, (27) доказано.

Пусть δ — дифференциальный оператор $\delta=z\dfrac{d}{dz}$. Из известных свойств функций Meijer'a следует, что

$$(\delta-\nu-1)^2f_r(z;\nu+1)=(\delta+\nu+1)^2f_r(z;\nu),\quad r=1,2,3, \tag{28}$$

$$\big(z(\delta+\nu+1)^2(\delta-\nu)^2-\delta^4\big)f_r(z;\nu)=0. \tag{29}$$

Пусть

$$X_r(z;\nu)=\begin{bmatrix} f_r(z;\nu)\\ \delta f_r(z;\nu)\\ \delta^2 f_r(z;\nu)\\ \delta^3 f_r(z;\nu)\end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$B(z;\nu)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{\nu^2(\nu+1)^2z}{z-1} & \dfrac{2\nu(\nu+1)z}{z-1} & \dfrac{\big(2\nu(\nu+1)-1\big)z}{z-1} & -\dfrac{2z}{z-1}\end{bmatrix}. \tag{31}$$

Из (28)–(31) следует, что

$$(\delta-\nu-1)^2X_r(z;\nu+1)=(\delta+\nu+1)^2X_r(z;\nu), \tag{32}$$

$$\delta X_r(z;\nu)=B(z;\nu)X_r(z;\nu), \tag{33}$$

$$\begin{aligned}(\delta-\nu-1)^2X_r(z;\nu+1)&=\\ &=\Big(\delta B(z;\nu+1)+\big(B(z;\nu+1)-(\nu+1)E\big)^2\Big)X_r(z;\nu+1),\end{aligned} \tag{34}$$

$$(\delta+\nu+1)^2X_r(z;\nu)=\Big(\delta B(z;\nu)+\big(B(z;\nu)+(\nu+1)E\big)^2\Big)X_r(z;\nu). \tag{35}$$

Пусть

$$A(z;\nu)=\big(\delta B(z;\nu+1)+\big(B(z;\nu+1)-(\nu+1)E\big)^2\big)^{-1}\times \times\big(\delta B(z;\nu)+\big(B(z;\nu)+(\nu+1)E\big)^2\big). \tag{36}$$

Из (32), (34)–(36) следует, что

$$X_r(z;\nu+1)=A(z;\nu)X_r(z;\nu),\qquad r=1,2,3. \tag{37}$$

Пусть далее

$$T_\nu=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\nu&0&0\\0&0&\nu^2&0\\0&0&0&\nu^3\end{bmatrix}, \tag{38}$$

$$Y_r(z;\nu)=T_\nu^{-1}X_r(z;\nu),\qquad r=1,2,3,\ \nu\in N, \tag{39}$$

$$C(z;\nu)=T_{\nu+1}^{-1}A(z;\nu)T_\nu. \tag{40}$$

Тогда из (37)–(40) следует, что

$$Y_r(z;\nu+1)=C(z;\nu)Y_r(z;\nu). \tag{41}$$

Для каждых $i=1,2,3,4$, $k=1,2,3,4$ обозначим элемент матрицы $C(z;\nu)$, стоящий в её i-ой строке и k-ом столбце, через $c_{i;k}(z;\nu)$. Производя в (36)–(40) необходимые вычисления, получаем для $c_{i;k}(z;\nu)$, $i=1,2,3,4$, $k=1,2,3,4$, следующие представления:

$$-(\nu+1)^3c_{1;1}(z;\nu)=(-16z-1)\nu^3+(-36z-3)\nu^2+ +(-24z-3)\nu+(-4z-1), \tag{42}$$

$$-(\nu+1)^3c_{1;2}(z;\nu)=(-20z-4)\nu^3+(-16z-8)\nu^2+(4z-4)\nu, \tag{43}$$

$$-(\nu+1)^3c_{1;3}(z;\nu)=(8z-8)\nu^3+(20z-8)\nu^2, \tag{44}$$

$$-(\nu+1)^3c_{1;4}(z;\nu)=(12z-12)\nu^3, \tag{45}$$

$$-(\nu+1)^3c_{2;1}(z;\nu)=-z(12\nu^3+28\nu^2+20\nu+4), \tag{46}$$

$$-(\nu+1)^3c_{2;2}(z;\nu)=(-16z-1)\nu^3+(-16z-2)\nu^2-\nu, \tag{47}$$

$$-(\nu+1)^3c_{2;3}(z;\nu)=(4z-4)\nu^3+(12z-4)\nu^2, \tag{48}$$

$$-(\nu+1)^3c_{2;4}(z;\nu)=(8z-8)\nu^3, \tag{49}$$

$$-(\nu+1)^3c_{3;1}(z;\nu)=4z(-2\nu^3-5\nu^2-4\nu-1), \tag{50}$$

$$-(\nu+1)^3c_{3;2}(z;\nu)=-4z(3\nu^3+4\nu^2+\nu), \tag{51}$$

$$-(\nu+1)^3c_{3;3}(z;\nu)=-\nu^3+(4z-1)\nu^2, \tag{52}$$

$$-(\nu+1)^3c_{3;4}(z;\nu)=4(z-1)\nu^3, \tag{53}$$

$$-(\nu+1)^3c_{4;1}(z;\nu)=-4z(\nu^3+3\nu^2+3\nu+1), \tag{54}$$

$$-(\nu+1)^3c_{4;2}(z;\nu)=-8z(\nu^3+2\nu^2+\nu), \tag{55}$$

$$-(\nu+1)^3c_{4;3}(z;\nu)=-4z(\nu^3+\nu^2), \tag{56}$$

$$-(\nu+1)^3c_{4;4}(z;\nu)=-\nu^3. \tag{57}$$

Если к (17) и (22) последовательно применить операторы δ, δ^2, δ^3 и учесть, что

$$\delta\big(L_3(z^{-1})\big)=-L_2(z^{-1}),\qquad \delta\big(L_2(z^{-1})\big)=\log(1-1/z),$$

$$\delta\left(\log\left(1-\frac{1}{z}\right)\right)=\frac{1}{z-1},\qquad \delta\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{-z}{(z-1)^2},$$

$$\delta\left(\frac{-z}{(z-1)^2}\right)=\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{2z}{(z-1)^3},$$

то можно прийти к выводу, что (41) имеет место не только для $|z|>1$, но также для $|z|=1$, $z\neq 1$. Положим теперь

$$H_r(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}Y_r(-1;\nu)z^\nu,\qquad r=1,2,3. \tag{58}$$

Тогда $H_r(z)$, $r=1,2,3$, является решением следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{bmatrix}1+15z&16z&-16z&-24z\\12z&1+15z&-8z&-16z\\8z&12z&1-z&-8z\\4z&8z&4z&1-z\end{bmatrix}\delta^3H(z)+z\begin{bmatrix}33&8&-28&0\\28&14&-16&0\\20&16&14&0\\12&16&4&0\end{bmatrix}\delta^2H(z)+ +z\begin{bmatrix}21&-8&0&0\\20&-1&0&0\\16&4&0&0\\12&8&0&0\end{bmatrix}\delta H(z)+z\begin{bmatrix}3&0&0&0\\4&0&0&0\\4&0&0&0\\4&0&0&0\end{bmatrix}H(z)=0. \tag{59}$$

Займёмся теперь особыми точками коэффициентов системы, возникающей в результате умножения слева уравнения (59) на матрицу

$$\begin{bmatrix}1+15z&16z&-16z&-24z\\12z&1+15z&-8z&-16z\\8z&12z&1-z&-8z\\4z&8z&4z&1-z\end{bmatrix}^{-1}.$$

Эти особые точки составляют множество всех таких чисел $z\neq 0$ для которых числа z^{-1} принадлежат множеству всех собственных значений матрицы

$$V = \begin{bmatrix} -15 & -16 & 16 & 24 \\ -12 & -15 & 8 & 16 \\ -8 & -12 & 1 & 8 \\ -4 & -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}. \tag{60}$$

Пусть

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно убедиться, что для V из (60) верно равенство

$$V = \big((U-E)^{-1}(U+E)\big)^2.$$

Так как собственные значения матрицы V равны квадратам собственных значений матрицы $(U-E)^{-1}(U+E)$ и $H_r(z)$, $r=1,2,3$, удовлетворяет (59), особенности элементов столбца $H_r(z)$ могут быть лишь в точках $z=\theta^{-2}$, где θ пробегает корни полинома $(\theta+1)^4+16\theta^2$. Обозначим через θ_1, $\theta_2=\bar\theta_1$, θ_3, $\theta_4=\bar\theta_3$ корни этого полинома. Тогда $|\theta_1\theta_3|=1$. Можно убедиться, что одно из чисел $|\theta_1|, |\theta_3|$ больше, чем 21. Пусть $|\theta_1|>21$. Тогда [1]

$$|\theta_2| = |\theta_1| > 20{,}09 > e^3, \qquad |\theta_3| = |\theta_4| < e^{-3}. \tag{61}$$

Пусть $h_r(z)$ — первый элемент столбца $H_r(z)$. Тогда

$$h_r(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_r(-1,\nu) z^\nu. \tag{62}$$

Легко убедиться, что $f_r(-1,\nu)=O(1)$, $r=2,3$, при $\nu\to\infty$. Поэтому радиус сходимости ϱ_r, $r=2,3$, ряда (62) не меньше, чем 1 и, таким образом, $\varrho_r \geqslant |\theta_1|$, $r=2,3$. Поэтому

$$|f_r(-1,\nu)| = O\big((20{,}09)^{-\nu}\big), \qquad r=2. \tag{63}$$

Из (17), (22), (26), (25), (61), (63) следует, что

$$\begin{aligned} &\lim_{\nu\to\infty}\big(-\tfrac{1}{2}K(-1,\nu)\zeta(2) - L(-1,\nu)\log 2 - M(-1,\nu)\big) = 0, \\ &\lim_{\nu\to\infty}\big(-\tfrac{3}{2}K(-1,\nu)\zeta(3) - L(-1,\nu)\tfrac{1}{2}\zeta(2) - N(-1,\nu)\big) = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Покажем теперь, что для любого $\varkappa\in \boldsymbol{N}$ последовательности

$$\alpha(-1,\varkappa+\nu), \qquad \nu=1,2,\ldots \tag{65}$$

$$\beta(-1,\varkappa+\nu), \qquad \nu=1,2,\ldots \tag{66}$$

$$\varphi(-1,\varkappa+\nu), \qquad \nu=1,2,\ldots \tag{67}$$

$$\psi(-1,\varkappa+\nu), \qquad \nu=1,2,\ldots \tag{68}$$

составляют линейно независимую над $\boldsymbol{C}$ систему. Достаточно убедиться, что система (65)–(68) линейно независима над $\boldsymbol{Q}$. Из (4), (19) следует, что

$$\alpha(-1,\nu)\in \boldsymbol{Z}. \tag{69}$$

Пусть p — произвольное простое число большее, чем 3. Из (16) следует, что

$$v_p(a_{2p;k}) \geqslant 2, \qquad 1\leqslant k\leqslant p-1,\ p+1\leqslant k\leqslant 2p-1, \tag{70}$$

$$a_{2p;0} = 1, \tag{71}$$

$$v_p(a_{2p;p}-36) \geqslant 1, \tag{72}$$

$$v_p(a_{2p;2p}-36) \geqslant 1, \tag{73}$$

$$v_p(\beta_{2p;k}) \geqslant 1, \qquad 1\leqslant k\leqslant p-1,\ p+1\leqslant k\leqslant 2p-1, \tag{74}$$

$$v_p(\beta_{2p;0}+6/p) \geqslant 0, \qquad v_p(\beta_{2p,p}+60/p) \geqslant 0, \tag{75}$$

$$v_p(\beta_{2p,2p}-84/p) \geqslant 0. \tag{76}$$

Из (4), (19), (70)–(73) следует, что

$$v_p\big(\alpha(-1,2p)-1\big) > 0. \tag{77}$$

Из (20), (74)–(76) следует, что

$$v_p\big(\beta(-1,2p)-138/p\big) \geqslant 0. \tag{78}$$

Из (21), (70)–(76) следует, что

$$v_p\big(\varphi(-1,2p)+93/p^2\big) \geqslant -1. \tag{79}$$

Из (24), (70)–(76) следует, что

$$v_p\big(\psi(-1,2p)+114/p^3\big) \geqslant -2. \tag{80}$$

Из (77)–(80) следует, что для любого $\varkappa\in\boldsymbol{N}$ последовательности (65)–(68) составляют линейно независимую систему над $\boldsymbol{Q}$ и, следовательно, над $\boldsymbol{C}$. Мы можем теперь перейти к окончанию доказательства теоремы 1.

Пусть q — такое отличное от нуля рациональное число, для которого оба числа (1) являются рациональными; тогда существует n_0 для которого числа $n_0\left(\zeta(2)-\dfrac{3}{q}\zeta(3)\right)$, $n_0\left(2\log 2-\dfrac{1}{q}\zeta(2)\right)$, n_0/q являются целыми. Как было установлено выше линейная комбинация

$$\eta(\nu) = f_2(-1,\nu) - \frac{1}{q}\operatorname{Im}\big(f_3(-1,\nu)\big) =$$
$$= -\left(\zeta(2) - \frac{3}{q}\zeta(3)\right)\frac{a(-1,\nu)}{2} + \left(2\log 2 - \frac{1}{q}\zeta(2)\right)\frac{\beta(-1,\nu)}{-2} -$$
$$-\varphi(-1,\nu) + \frac{1}{q}\psi(-1,\nu)$$

принимает при $\nu\to\infty$ бесконечное число раз отличные от нуля значения. Поэтому величина

$$2D_\nu n_0\eta(\nu) = \left(\zeta(2) - \frac{3}{q}\zeta(3)\right)n_0K(-1,\nu) +$$
$$+\left(2\log 2 - \frac{1}{q}\zeta(2)\right)n_0L(-1,\nu) - n_0M(-1,\nu) + \frac{n_0}{q}N(-1,\nu)$$

принимает при $\nu\to\infty$ бесконечное число раз отличные от нуля значения из $\boldsymbol{Z}$, что находится в противоречии с (64). Итак, теорема 1 доказана.

Теорема 2 является непосредственным следствием теоремы 1.

Примечание при корректуре. К настоящему времени мной получен такой результат. Пусть $\varrho_1 = \left(5+4\sqrt{2}+2\sqrt{2\sqrt{2}-2}+4\sqrt{2\sqrt{2}+2}\right)e^{-3}$, $\varrho_2 = \varrho_1 e^6$, $\gamma = (\log\varrho_2)/\log\varrho_1$, $\varphi_1(x_1,x_2) = x_1\log 4 + x_2\zeta(2)$, $\varphi_2(x_1,x_2) = x_1\zeta(2) + x_2 3\zeta(3)$, $\|d\|$ — расстояние от d до $\boldsymbol{Z}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $c > 0$, что, если $x_1\in\boldsymbol{Z}$, $x_2\in\boldsymbol{Z}$, $x_1^2+x_2^2>0$, то

$$\max_{i=1,2}\big(\|\varphi_i(x_1,x_2)\|\big) \geqslant c\big(\max(|x_1|,|x_2|)\big)^{-\gamma-\varepsilon}.$$

Получены и некоторые другие количественные результаты.

В заключение, но далеко не в последнюю очередь, выражаю глубокую благодарность профессору Ю. И. Журавлёву, оказавшему мне большую административную поддержку.

Литература

[1] Г. Б. Двайт, *Таблицы интегралов и другие математические формулы*, Москва 1948.

[2] G. V. Chudnovsky, *Transcendental Numbers*, Lecture Notes in Mathematics, 751, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1979.

Поступило 12. 2. 1980
и в исправленной форме 16. 3. 1982 (1199)

ACTA ARITHMETICA
XLII (1983)

On a sequence of (j,ε)-normal approximations to $\pi/4$ and the Brouwer conjecture

by

R. G. Stoneham (Barbados, W. I.)

1. Introduction. We present a first application of our results concerning the phenomenon of (j,ε)-normality in the rationals ([4], p. 233; see def. Type A, p. 229 and further studies in [5], p. 389) to a specific given convergent sequence of rational approximations $p_n/q_n < 1$ in lowest terms whose limit, in this case as $n\to\infty$, is the interesting number $\pi/4$.

In order to establish the (j,ε)-normal character of the representations of a given sequence of rational numbers in some base g, we need specific information concerning the magnitude of the exponents n_i in the prime decomposition of the denominator $q_n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$ as n increases without bound. In particular, we need to show, in order to prove (j,ε)-normality, that there is at least one odd prime $p_i|q_n$ such that the exponent n_i of that prime is such that $n_i > z_i+s_i$ where $p_i^{z_i}\|(g^{d_i}-1)$, $d_i|(p_i-1)$, and $p_i^{s_i}\|(d_{i+1},\ldots,d_r)$, i.e. s_i is the maximum exponent to which p_i appears in each least exponent $d_{i+1}, d_{i+2},\ldots,d_r$ for the primes contained in q_n which exceed p_i up to the maximum prime $p_r|q_n$.

Even though there are many convergent sequences of rational approximations p_n/q_n such that $\lim_{n\to\infty} p_n/q_n$ is some real number of interest such as e, π, $\sqrt{2}$, etc., we find that when we consider *given* sequences (It is important to keep in mind here that we are not considering "constructed" cases of sequences but representations based on well-known infinite processes.) that the above arithmetic information concerning behavior of the odd primes contained in q_n as n increases without bound is not known at the present time.

In this paper, we will show that an infinite product representation which can be written as a product of factorials will yield a great deal of arithmetic information concerning the prime decomposition of the successive partial products. For this study, we consider the Wallis infinite