ACTA ARITHMETICA
XLII (1983)

Ω-теорема для короткой тригонометрической суммы

Ян Мозер (Братислава)

В этой работе мы предлагаем новое применение дискретного метода Е. К. Титчмарша, изложенного в работе [5].

Пусть

$$(1)\qquad S(t,T,K)=\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} n^{it},\quad P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}},\ t\in\langle T,T+U\rangle,$$

где

$$(2)\qquad U=T^{1/2}\psi\ln T,\quad \psi\leqslant K\leqslant T^{1/6}\ln^2 T,\quad \psi<\ln T$$

и $\psi=\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция. Мы покажем, что (независимо от какой бы то ни было гипотезы) неравенство

$$(3)\qquad |S(t,T,K)|>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P_0}{K}}=AT^{1/4}K^{-1/2}$$

удовлетворяется для сколь угодно больших значений t. Точнее: существует $T_0(K,\psi)>0$ такое, что для всех $T\geqslant T_0$ существует $\bar{t}\in\langle T,T+U\rangle$ удовлетворяющее неравенству (3).

Напомним, что в случае справедливости гипотезы Линделёфа оценка А. А. Карацубы ([1], стр. 89)

$$(4)\qquad \sum_{1\leqslant n\leqslant x} n^{it}=O(\sqrt{x}t^{\varepsilon}),\quad 0<x<t$$

($0<\varepsilon$ — сколь угодно малое число) дает для короткой тригонометрической суммы (1) следующий результат

$$(5)\qquad S(t,T,K)=O(\sqrt{P_0}T^{\varepsilon})=O(T^{1/4+\varepsilon}),\quad t\in\langle T,T+U\rangle.$$

Так как, например, неравенства (см. (3))

$$(6)\qquad |S(t,T,\psi)|>AT^{1/4}\psi^{-1/2},$$

$$(7)\qquad |S(t,T,T^{\eta})|>AT^{1/4-\eta/2},$$

($0<\eta$ — сколь угодно малое число) удовлетворяются для сколь угодно больших значений t, то оценка А. А. Карацубы (5) является *почти окончательной* в случае

(8) $$K\in\langle\psi, T^{\eta}\rangle.$$

Эта закономерность и есть главный результат работы.

Относительно связи короткой тригонометрической суммы с теорией функции $\zeta(s)$ см. работу [3].

1. Пусть ([4], стр. 383)

(9) $$\vartheta(t) = -\tfrac{1}{2}t\ln\pi+\operatorname{Im}\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}it) = \tfrac{1}{2}t\ln(t/2\pi)-\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{8}\pi+O(1/t)$$

и $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность определенную соотношением ([5], стр. 98)

(10) $$\vartheta(t_\nu)=\pi\nu,\quad \nu=1,2,\ldots$$

Пусть $G(T,K,\psi)$ обозначает количество значений $t_\nu\in\langle T,T+U\rangle$ удовлетворяющих неравенству (3). Имеет место

Теорема. *Существуют $T_0(K,\psi)>0$, $A>0$ такие, что*

(11) $$G(T,K,\psi)>AT^{1/6}K^{-1}\psi\ln^2 T,\quad T\geqslant T_0(K,\psi).$$

Пусть

(12) $$W(t,T,K)=\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(t\ln n),$$

(13) $$W_1(t,T,K)=\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{P_0}}\right)\cos(t\ln n).$$

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма А.

(14) $$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}W^2(t_\nu,T,K)=\frac{1}{4\pi}UK^{-1}\ln\frac{T}{2\pi}+O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T).$$

Лемма В.

(15) $$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}W_1^2(t_\nu,T,K)=\frac{1}{48\pi}UK^{-3}\ln\frac{T}{2\pi}+O(K^{-3}\sqrt{T}\ln^2 T).$$

Примечание. Соотношения (14), (15) являются асимптотическими (см. (2)).

Теперь мы покажем как завершается

Доказательство теоремы на основе лемм А, В. Так как ([2], (23))

(16) $$Q_0=\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}1=\frac{1}{2\pi}U\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U^2}{T}\right),$$

то

(17) $$\frac{1}{Q_0}\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}W^2(t_\nu,T,K)\sim\frac{1}{2K},$$

(18) $$\frac{1}{Q_0}\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}W_1^2(t_\nu,T,K)\sim\frac{1}{24K^3},$$

(19) $$\frac{1}{Q_0}\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}W(t_\nu,T,K)W_1(t_\nu,T,K)=O\left(\frac{1}{K^2}\right)$$

(в последнем случае применяем неравенство Коши–Буняковского). Далее (см. (1), (12), (13))

(20) $$W(t_\nu,T,K)=\frac{1}{\sqrt{P_0}}S_1(t_\nu,T,K)+W_1(t_\nu,T,K)$$

где

(21) $$S_1(t_\nu,T,K)=\operatorname{Re}S(t_\nu,T,K).$$

Следовательно, в силу (17)–(20) получается

Формула.

(22) $$\frac{1}{Q_0}\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}S_1^2\sim\frac{P_0}{2K}.$$

Пусть теперь Q_1 обозначает количество значений $t_\nu\in\langle T,T+U\rangle$ для которых имеет место

(23) $$|S_1|>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P_0}{K}}$$

и Q_2 — количество остальных (конечно, $Q_0=Q_1+Q_2$). Так как в силу (1), (21) и [4], стр. 110,

(24) $$|S_1(t,T,K)|<A\sqrt{P_0}T^{1/6},\quad t\in\langle T,T+U\rangle,$$

то (см. (22))

(25) $$\frac{1}{3K}<AT^{1/3}\frac{Q_1}{Q_0}+\frac{1}{4K}\frac{Q_2}{Q_0}<AT^{1/3}\frac{Q_1}{Q_0}+\frac{1}{4K}$$

и

(26) $$AQ_1 > \frac{1}{12} Q_0 T^{-1/3} K^{-1}.$$

Следовательно (см. (2), (16); $Q_0 > (1/3\pi) U \ln T$)

(27) $$Q_1 > AT^{1/6} K^{-1} \psi \ln^2 T.$$

Так как $|S| \geqslant |S_1|$ то (см. (3), (23)), $Q_1 \leqslant G(T, K, \psi)$.

Остается доказать леммы A, B.

2. Пусть

(28) $$W_2 = \sum_{e^{-1/K}P_0 < m < n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\left(t_\nu \ln \frac{n}{m}\right).$$

Имеет место

Лемма 1.

(29) $$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+U} W_2 = O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T).$$

Доказательство. Сумме (29) соответствует следующая внутренняя сумма (ср. [5], стр. 102, $t_{\nu+1} \to t_\nu$)

(30) $$W_{21} = \sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+U} \cos\{2\pi\psi_1(\nu)\},$$

где

(31) $$\psi_1(\nu) = \frac{1}{2\pi} t_\nu \ln \frac{n}{m}.$$

Способом [5], стр. 102–103 получаем оценку

(32) $$W_{21} = O\left(\frac{\ln T}{\ln(n/m)}\right).$$

Так как (см. (2))

(33) $$e^{-1/K} > 1 - 1/K \geqslant 1 - 1/\psi > 1/2,$$

то

(34) $$2m > 2e^{-1/K} P_0 > P_0, \quad m \in (e^{-1/K}P_0, P_0).$$

Значит, в нашем случае имеет место только соотношение

(35) $$2m \geqslant n.$$

Следовательно, способом [4], стр. 138, $\sigma = 1/2$, $m = n - r$ получаем, что

(36) $$\sum_{e^{-1/K}P_0 < m < n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}\ln(n/m)} < A \sum_{e^{-1/K}P_0 < n < P_0} \sum_{r \leqslant n/2} \frac{1}{r} < \\ < AK^{-1} P_0 \ln P_0 < AK^{-1}\sqrt{T}\ln T,$$

так как

(37) $$\sum_{e^{-1/K}P_0 < n < P_0} 1 \sim P_0/K.$$

Теперь (29) следует из (28), (30), (32), (36).

3. Пусть

(38) $$W_3 = \sum_{e^{-1/K}P_0 < m < n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}} \cos\{t_\nu \ln(mn)\}.$$

Имеет место

Лемма 2.

(39) $$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+U} W_3 = O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T).$$

Доказательство. Сумме (39) соответствует следующая внутренняя сумма (ср. [5], стр. 103, $t_{\nu+1} \to t_\nu$)

(40) $$W_{31} = \sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+U} \cos\{2\pi\chi(\nu)\},$$

где

(41) $$\chi(\nu) = \frac{1}{2\pi} t_\nu \ln(mn).$$

Способом [5], стр. 103–104 получаем, что

(42) $$W_{31} = \int_{\chi'(x) \leqslant 1/2} \cos\{2\pi\chi(x)\}\,dx + \\ + \int_{\chi'(x) > 1/2} \cos[2\pi\{\chi(x) - x\}]\,dx + O(1) = I_1 + I_2 + O(1),$$

где

(43) $$I_1 = O\left(\frac{\ln T}{\ln n}\right) = O(1), \quad n \in (e^{-1/K}P_0, P_0)$$

и ($m < n < 2m$, $n = m + r$)

(44) $$I_2 = O\left(\frac{m \ln(m+1)}{r}\right),$$

(напомним, что неравенство $n > 2m$ в нашем случае не удовлетворяется, см. (35)).

Теперь I_1 вносит в сумму (39) следующий вклад (см. (37))

(45) $$O\left(\sum_{e^{-1/K}P_0 < m < n < P_0}\sum \frac{1}{\sqrt{mn}}\right) = O\left(\frac{1}{P_0} \sum_{e^{-1/K}P_0 < m < n < P_0}\sum 1\right) = \\ = O\left(\frac{1}{P_0} \cdot \frac{P_0^2}{K^2}\right) = O(K^{-2}\sqrt{T}),$$

I_2 вносит вклад

(46) $$O\left(\sum_{e^{-1/K}P_0<m<P_0}\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{r=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{m\ln(m+1)}{r}\right)=O\left(\frac{P_0}{K}\ln^2 T\right)=$$
$$=O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T),$$

наконец, вклад члена $O(1)$ в (42) выражает оценка (45).

4. Пусть

(47) $$W_4=\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\frac{1}{n}\cos(2t_\nu\ln n).$$

Имеет место

Лемма 3.

(48) $$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}W_4=O(K^{-1}\sqrt{T}\ln^2 T).$$

Доказательство. Сумме (48) соответствует следующая внутренняя сумма

(49) $$W_{41}=\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}\cos\{2\pi\chi_1(\nu)\},$$

где

(50) $$\chi_1(\nu)=\frac{1}{\pi}t_\nu\ln n.$$

Так как (см. [5], стр. 103, выражение для $\chi(\nu)$; $m=n$, $t_{\nu+1}\to t_\nu$)

(51) $$\chi_1'(\nu)=\frac{\ln n}{\vartheta'(t_\nu)},$$

далее ([5], стр. 100)

(52) $$\vartheta'(t_\nu)=\frac{1}{2}\ln\frac{t_\nu}{2\pi}+O\left(\frac{1}{t_\nu}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{T}{2\pi}+O\left(\frac{U}{T}\right)+O\left(\frac{1}{T}\right)\sim\ln P_0$$

и

(53) $$\ln P_0-1/K<\ln n<\ln P_0,\quad n\in(e^{-1/K}P_0,P_0),$$

то имеет место

(54) $$\chi_1'(\nu)\sim 1.$$

Значит,

(55) $$1/2<\chi_1'(\nu)<3/2$$

и следовательно ([5], стр. 104)

(56) $$W_{41}=\int\cos[2\pi\{\chi_1(x)-x\}]dx+O(1)=I_3+O(1).$$

Теперь (ср. [5], стр. 104)

(57) $$\chi_1''(\nu)<-A\frac{\ln n}{T\ln^3 T}<-\frac{A}{T\ln^2 T},\quad n\in(e^{-1/K}P_0,P_0)$$

и

(58) $$I_3=O(\sqrt{T}\ln T),\quad W_{41}=O(\sqrt{T}\ln T).$$

Наконец (ср. [5], стр. 105)

(59) $$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+U}W_4=O\left(\sqrt{T}\ln T\cdot\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}1/n\right)=O(K^{-1}\sqrt{T}\ln T),$$

так как

(60) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}1/n\sim 1/K$$

в силу формулы

(61) $$\sum_{1\leqslant n<x}1/n=\ln x+C+O(1/x),$$

(C — постоянная Эйлера).

5. Доказательство леммы A. В силу (12) имеем:

(62) $$W^2(t_\nu,T,K)=\sum\sum_{e^{-1/K}P_0<m,n<P_0}\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos(t_\nu\ln m)\cos(t_\nu\ln n)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(t_\nu\ln\frac{n}{m}\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{m,n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\{t_\nu\ln(mn)\}=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n}\frac{1}{n}+\sum_{m<n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\left(t_\nu\ln\frac{n}{m}\right)+$$
$$+\sum_{m<n}\sum\frac{1}{\sqrt{mn}}\cos\{t_\nu\ln(mn)\}+\frac{1}{2}\sum_{n}\frac{1}{n}\cos(2t_\nu\ln n)=$$
$$=\frac{1}{2K}+O\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)+W_2+W_3+\tfrac{1}{2}W_4$$

(см. (60), (28), (38), (47)). Отсюда, в силу (16), (29), (39), (48) следует (14).

Доказательство леммы B. Прежде всего мы имеем (см. (13))

(63) $$W_1(t_\nu, T, K) = \sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \frac{M(n)}{\sqrt{n}} \cos(t_\nu \ln n),$$

где

(64) $$M(n) = 1-\sqrt{n/P_0}.$$

При этом $M(n)$ убывает и

(65) $$0 < M(n) < 1/K, \quad n \in (e^{-1/K}P_0, P_0),$$

так как $M(e^{-1/K}P_0) \sim 1/(2K)$. Далее (ср. (62))

(66) $$W_1^2(t_\nu, T, K) = \frac{1}{2}\sum_n \frac{M^2(n)}{n} + \sum\sum_{m<n} \frac{M(m)M(n)}{\sqrt{mn}} \cos\left(t_\nu \ln\frac{n}{m}\right) + \\ + \sum\sum_{m<n} \frac{M(m)M(n)}{\sqrt{mn}} \cos\{t_\nu \ln(mn)\} + \frac{1}{2}\sum_n \frac{M^2(n)}{n} \cos(2t_\nu \ln n) = \\ = \tfrac{1}{2}\overline{W}_1 + \overline{W}_2 + \overline{W}_3 + \tfrac{1}{2}\overline{W}_4.$$

Конечно,

(67) $$\sum_{T\leqslant t_\nu \leqslant T+U} (\overline{W}_2 + \overline{W}_3 + \tfrac{1}{2}\overline{W}_4) = O(K^{-3}\sqrt{T}\ln^2 T),$$

так как в силу (65) $M(m)M(n) < K^{-2}$ и в остальном доказательство проходит как в случае оценок (29), (39), (48).

Остается изучить сумму

(68) $$\tfrac{1}{2}\sum_{T\leqslant t_\nu \leqslant T+U} \overline{W}_1.$$

Применим формулу суммирования Эйлера–Маклорена ([4], стр. 19)

(69) $$\sum_{a\leqslant n<b} \varphi(n) = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b (x-[x]-\tfrac{1}{2})\varphi'(x)\,dx + \\ + (a-[a]-\tfrac{1}{2})\varphi(a) - (b-[b]-\tfrac{1}{2})\varphi(b)$$

в случае

(70) $$a = e^{-1/K}P_0, \quad b = P_0, \quad \varphi(x) = \frac{M^2(x)}{x} = \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{P_0 x}} + \frac{1}{P_0}.$$

Имеем

(71) $$\int_{e^{-1/K}P_0}^{P_0} \frac{M^2(x)}{x}\,dx = \frac{1}{K} - 4(1-e^{-1/(2K)}) + 1 - e^{-1/K} = \frac{1}{12K^3} + O\left(\frac{1}{K^4}\right)$$

и

(72) $$\varphi'(x) = O\left(\frac{1}{P_0^2}\right), \quad \varphi(e^{-1/K}P_0) = O\left(\frac{1}{K^2P_0}\right), \quad \varphi(P_0) = 0.$$

Следовательно (см. (66))

(73) $$\frac{1}{2}\overline{W}_1 = \frac{1}{24K^3} + O\left(\frac{1}{K^4}\right)$$

и (см. (2), (16))

(74) $$\frac{1}{2}\sum_{T\leqslant t_\nu \leqslant T+U} \overline{W}_1 = \frac{1}{48\pi} UK^{-3}\ln\frac{T}{2\pi} + O\left(\frac{U\ln T}{K^4}\right) + O\left(\frac{U^2}{K^3T}\right) = \\ = \frac{1}{48\pi} UK^{-3}\ln\frac{T}{2\pi} + O(K^{-3}\sqrt{T}\ln^2 T).$$

Наконец из (66) в силу (67), (74) следует (15).

Литература

[1] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Москва 1975.

[2] Ян Мозер, *Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 45–51.

[3] — *Новые оценки коротких тригонометрических сумм*, ibid. 40 (1982), стр. 357–367.

[4] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[5] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann, IV*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 2. 4. 1981 (1248)