[7] E. Grosswald, *Negative discriminants of binary quadratic forms with one class in each genus*, Acta Arith. 8 (1963), S. 295–306.
[8] E. Grosswald, A. Calloway, J. Calloway, *The representation of integers by three positive squares*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), S. 451–455.
[9] F. Grube, *Über einige Euler'sche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen*, Zeitschr. Math. Phys. 19 (1874), S. 429–519.
[10] N. A. Hall, *Binary quadratic discriminants with a single class of forms in each genus*, Math. Z. 44 (1939), S. 85–90.
[11] J. S. Hsia, Y. Kitaoka, M. Kneser, *Representation of positive definite quadratic forms*, J. Reine Angew. Math. 301 (1978), S. 132–141.
[12] A. Hurwitz, L'intermed. des Math. 14 (1907), S. 107.
[13] B. W. Jones, *The arithmetic theory of quadratic forms*, Amer. Math. Soc. Monograph, 1950.
[14] B. W. Jones, G. Pall, *Regular and semiregular positive ternary quadratic forms*, Acta Math. 70 (1939), S. 165–191.
[15] M. Kassner, *Darstellungen mit Nebenbedingungen durch quadratische Formen*, J. Reine Angew. Math. 331 (1982), S. 151–161.
[16] M. Kneser, *Quadratische Formen*, Vorlesungsausarbeitung, Göttingen 1974.
[17] A. V. Malyshev, *Über die Darstellung ganzer Zahlen durch positiv definite quadratische Formen* (russisch), Trudy Mat. Inst. Stekl. 65 (1962).
[18] L. J. Mordell, *The representation of integers by three positive squares*, Michigan Math. J. 7 (1960), S. 289–290.
[19] G. Pall, *On sums of squares*, Amer. Math. Monthly 40 (1933), S. 10–18.
[20] M. Peters, *Darstellung durch definite ternäre quadratische Formen*, Acta Arith. 34 (1977), S. 57–80.
[21] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.
[22] A. Schinzel, *Sur les sommes de trois carrés*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), S. 307–310.
[23] C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arith. 1 (1935), S. 83–86.
[24] — *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, Ann. of Math. 36 (1935), S. 527–606.
[25] W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers*, Warszawa 1964.
[26] P. J. Weinberger, *Exponents of the class groups of complex quadratic fields*, Acta Arith. 22 (1973), S. 117–124.

Eingegangen am 20.6.1980
und in revidierter Form am 1.9.1981 (1213)

ACTA ARITHMETICA
XLII (1982)

Теорема сравнения для мультипликативных функций

Б. В. Левин, Н. М. Тимофеев (Владимир, СССР)

В настоящей работе получено несколько результатов о суммах мультипликативных функций. Прежде чем сформулировать эти результаты введем определения.

Определение 1. Будем говорить, $f(n)$ *принадлежит классу* $M(c)$, если $f(n)$ — мультипликативна и для всех $r \geqslant 1$ и простых p имеет место неравенство $|f(p^r)| \leqslant c$.

Определение 2. Класс A состоит из неотрицательных мультипликативных функций h, удовлетворяющих условиям: $h(p^r) = O(1)$, существуют $\tau_0 = \mathrm{const} > 0$ и y_0 такие, что при всех $y \geqslant y_0$

$$\sum_{p\leqslant y} h(p)\log p \geqslant \tau_0 y.$$

Определение 3. $f(n) \in N(h, c_1)$, если существует $t_0 = t_0(f)$ такое, что

1) $\sum_p \left(h(p) - \mathrm{Re} f(p) p^{-it_0}\right) p^{-1} \leqslant c_1$,

2) $\lim\limits_{y\to\infty} \sup\limits_{f\in N(h,c_1)} \dfrac{1}{\log y} \sum\limits_{p\leqslant y} \left(h(p) - \mathrm{Re} f(p) p^{-it_0}\right) \dfrac{\log p}{p} = 0.$

Теорема 1 (Теорема сравнения). *Пусть* $h(n) \in A$, $f(n) \in M(c) \cap N(h, c_1)$ *и* $|f(p)| \leqslant h(p)$, *тогда*

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{x^{it_0}\cdot C(x)}{1+it_0} \sum_{n\leqslant x} h(n)\left(1+o(1)\right)$$

равномерно по всем $f(n) \in N(h, c_1) \cap M(c)$. *Здесь*

$$C(x) = \prod_{p\leqslant x} \left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{r(1+it_0)}}\right)\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{h(p^r)}{p^r}\right)^{-1}.$$

Если же $f(n) \in M(c)$, $|f(p)| \leqslant h(p)$ *и для всех* t *ряд*

$$\sum_p \left(h(p) - \mathrm{Re} f(p) p^{-it}\right) \frac{1}{p}$$

расходится, то

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = o\Big(\sum_{n\leqslant x} h(n)\Big).$$

Условия на функции $f(n)$ и $h(n)$ в теореме 1 могут быть значительно ослаблены. Вместо требования $|f(p)|\leqslant h(p)$ можно потребовать только

$$\sum_{p\leqslant x}{}' \frac{|f(p)|\log p}{p} \leqslant \sum_{p\leqslant x}{}' \frac{h(p)\log p}{p} + \frac{A\log x}{(\log\log x)^{1+\varepsilon}},$$

а вместо требования ограниченности $h(p)$ достаточно, например, условие существования $\delta>0$ такого, что

$$\sum_{p\leqslant x} \big(h(p)\big)^{1+\delta} \frac{\log p}{p} = O(\log x).$$

Требование $f(p^r)=O(1)$, $h(p^r)=O(1)$ при $r\geqslant 1$ может быть заменено ограниченностью в среднем по r и p.

Выведем несколько следствий из теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть* $h(n)\in A$, $f(n)\in M(c)$ *и* $|f(p)|\leqslant h(p)$. *Тогда*

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{Cx^{it_0}}{1+it_0} \exp\Big[i\sum_{p\leqslant x}\frac{\operatorname{Im} f(p)p^{-it_0}}{p}\Big]\cdot \sum_{n\leqslant x} h(n) + o\Big(\sum_{n\leqslant x} h(n)\Big),$$

где

$$C=\prod_p\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+it_0)}}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Big)^{-1} e^{-i\frac{\operatorname{Im} f(p)p^{-it_0}}{p}},$$

если существует t_0 *такое, что ряд*

$$\sum_p \big(h(p)-\operatorname{Re} f(p)p^{-it_0}\big)/p$$

сходится и $C=0$, *если ряд расходится при любом* t.

Доказательство. Если существует t_0, при котором ряд сходится, то найдется постоянная c_1 такая, что

$$\sum_p \big(h(p)-\operatorname{Re} f(p)p^{-it_0}\big)/p \leqslant c_1.$$

Кроме этого, из сходимости ряда следует, что

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\big(h(p)-\operatorname{Re} f(p)p^{-it_0}\big)\frac{\log p}{p}\leqslant$$

$$\leqslant \lim_{y\to\infty}\Big[\frac{\log\log y}{\log y}\sum_{p\leqslant \log y}\big(h(p)-\operatorname{Re} f(p)p^{-it_0}\big)\frac{1}{p}+$$

$$+\sum_{p>\log y}\big(h(p)-\operatorname{Re} f(p)p^{-it_0}\big)\frac{1}{p}\Big]=0.$$

То есть, $f(n)\in N(h,c_1)$. И из теоремы 1 следует первая часть следствия 1. Если же ряд расходится при любом t, то утверждение следствия непосредственно вытекает из второй части теоремы 1.

Из следствия 1 довольно просто получаются многие известные результаты. Так, например, положив $h(n)=1$, получаем теорему Halász'а [2]. При другом выборе $h(n)$, получаем обобщение и усиление теоремы Halász'а в духе работ [3], [4], [7].

Следствие 2. *Пусть* $h(n)\in A$, *тогда*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{n\leqslant x}\mu^2(n)h(n)}{\sum_{n\leqslant x}h(n)}=\prod_p\Big(1+\frac{h(p)}{p}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}{}'\frac{h(p^r)}{p^r}\Big)^{-1}.$$

Доказательство. Возьмем $f(n)=\mu^2(n)h(n)$. Очевидно, что существует c такое, что $f(n)\in M(c)$, $f(n)\in N(h,0)$, $t_0=0$ и поэтому, на основании теоремы 1, следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть* $h(n)\in A$, *тогда*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,k)=1}}h(n)}{\sum_{n\leqslant x}h(n)}=\prod_{p|k}\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Big)^{-1}.$$

Доказательство получается, если выбрать

$$f(p^r)=\begin{cases}0, & \text{при } p\,|\,k,\\ h(p^r), & \text{при } (p,k)=1.\end{cases}$$

Следствия 2 и 3 вытекают из более общего следствия 4.

Определение 4. Назовем множество $\mathscr{M}$ — *мультипликативным*, если выполнены следующие условия

1) $n\in\mathscr{M}$, $m\in\mathscr{M}$, $(n,m)=1\Rightarrow n\cdot m\in\mathscr{M}$,
2) $n\cdot m\in\mathscr{M}$, $(n,m)=1\Rightarrow n\in\mathscr{M}$, $m\in\mathscr{M}$.

Следствие 4. *Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное мультипликативное множество, тогда для $h(n)\in A$*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\in M}}h(n)}{\sum\limits_{n\leqslant x}h(n)}=\begin{cases}\prod\limits_{p}\left(1+\sum\limits_{r=1}^{\infty}\dfrac{\chi_M(p^r)h(p^r)}{p^r}\right)\cdot\left(1+\sum\limits_{r=1}^{\infty}\dfrac{h(p^r)}{p^r}\right)^{-1}, & \\ \qquad\qquad \text{если ряд } \sum\limits_{p\notin M}\dfrac{h(p)}{p} \text{ сходится}, & \\ 0, \quad \text{в противном случае.} & \end{cases}$$

Здесь $\chi_M(n)$ — характеристическая функция M.

Несколько более сложно доказывается:

Следствие 5. *Пусть $h(n)\in A$, тогда, если $(l,k)=1$, то*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}}h(n)}{\sum\limits_{n\leqslant x}h(n)}=c_{l,k}.$$

Доказательство следствия. Применим следствие 1 к $f(n)=\chi(n)\cdot h(n)$. Заметим в начале, что при $t\neq 0$ ряд

$$\sum_p\left(h(p)-\mathrm{Re}f(p)p^{-it}\right)/p$$

расходится. Действительно, пусть $\psi(l)=\arg\chi(l)$ при $p\equiv l(\mathrm{mod}\,k)$, тогда при $\delta>1$

$$\sum_p\left(h(p)-\mathrm{Re}\,\chi(p)h(p)p^{-it}\right)\frac{1}{p^\sigma}\geqslant\sum_{\substack{l=1\\(l,k)=1}}^{k}\ \sum_{p\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}\left(1-\cos\left(\psi(l)-t\log p\right)\right)\frac{h(p)}{p^\sigma}.$$

Дальнейшие рассуждения проводятся точно так же, как и при доказательстве леммы 4. Разбиение проводится в зависимости от величины $1-\cos\left(\psi(l)-t\log p\right)$.

Обозначим через H множество характеров по модулю k, для которых

$$\sum_p h(p)\left(1-\chi(p)\right)\frac{1}{p}$$

сходится. Тогда из следствия 1 получаем

$$\sum_{n\leqslant x}\chi(n)h(n)=l(\chi)\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi(p^r)h(p^r)}{p^r}\right)\Bigg(1+ \\ +\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Bigg)^{-1}\sum_{n\leqslant x}h(n)+o\Big(\sum_{n\leqslant x}h(n)\Big),$$

где $l(\chi)=1$, если $\chi\in H$ и $l(\chi)=0$ в противном случае. Отсюда для $(l,k)=1$ получаем

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,k)}}h(n)=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi\,\mathrm{mod}\,k}\overline{\chi}(l)\sum_{n\leqslant x}\chi(n)h(n)=$$

$$=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\substack{\chi\,\mathrm{mod}\,k\\ \chi\in H}}\overline{\chi}(l)\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{\chi(p^r)h(p^r)}{p^r}\right)\Bigg(1+ \\ +\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Bigg)^{-1}\sum_{n\leqslant x}h(n)+o\Big(\sum_{n\leqslant x}h(n)\Big)=$$

$$=c_{l,k}\sum_{n\leqslant x}h(n)+o\Big(\sum_{n\leqslant x}h(n)\Big).$$

С помощью теоремы 1 легко выводится следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $h(n)\in A$, $g(n)$ — аддитивная функция. Если существует b такое, что*

$$\sum_p\frac{h(p)\,\|g(p)-b\log p\|^2}{p}<+\infty,\ \text{где } \|u\|=\begin{cases}1, & \text{если} \quad u>1,\\ u, & \text{если} \quad -1\leqslant u\leqslant 1,\\ -1, & \text{если} \quad u<-1,\end{cases}$$

то существует функция распределения $F(u)$ такая, что во всех точках непрерывности функции распределения $F(u)$:

$$\frac{1}{\sum\limits_{n\leqslant x}h(n)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ g(n)\leqslant u+A(x)}}h(n)\to F(u)\qquad \text{при}\quad x\to\infty,$$

где

$$A(x)=b\log x+\sum_{p\leqslant x}\|g(p)-b\log p\|\frac{h(p)}{p}+d,\quad d=\mathrm{const}.$$

При этом характеристическая функция $\tau(\xi)$ закона распределения $F(u)$ равна

$$\frac{e^{-i\xi d}}{1+i\xi b}\prod_p\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)e^{i\xi(g(p^r)-b\log p^r)}}{p^r}\right)\Bigg(1+ \\ +\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Bigg)^{-1}e^{-i\xi\frac{\|g(p)-b\log p\|}{p}h(p)}.$$

Обратно, из существования предела $F(u)$ вытекает существование постоянных b и d, с которыми $A(x)$ имеет выше указанный вид и ряд

$$\sum_p \| g(p) - b\log p \|^2 \frac{h(p)}{p}$$

сходится.

Если $h(n) = 1$, то получаем известное усиление теоремы Эрдеша–Винтнера [1], [5].

Следствие 6. *Пусть* $h(n) \in A$, $u > 0$, $H(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} h(n)$, *тогда* $\lim_{x\to\infty}\big(H(ux)/H(x)\big) = 1$, *то есть* $H(x)$ *медленно меняется в смысле Карамата.*

Доказательство. В теореме 2 положим $g(n) = \log n$, $b = 1$, $d = 0$, тогда

$$\frac{1}{\sum_{n\leqslant x} h(n)} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\leqslant e^v\cdot x}} h(n) \to F(v).$$

Обозначим $e^v = u$, тогда при $v < 0$, то есть при $u < 1$, имеем

$$\frac{1}{\sum_{n\leqslant x} h(n)} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\leqslant ux}} h(n) \to F(\log u).$$

Характеристическая функция для $F(v)$ равна $1/(1+i\xi)$.

Следовательно,

$$F(v) = \begin{cases} e^v, & \text{при} \quad v\leqslant 0,\\ 1, & \text{при} \quad v > 0,\end{cases}$$

и

$$\frac{1}{\sum_{n\leqslant x} h(n)} \sum_{n\leqslant ux} h(n) \to u$$

при $0\leqslant u\leqslant 1$ и $x\to\infty$. Отсюда легко получается доказательство следствия 6.

Метод доказательства в работе аналитический с учетом идей работы Halász'a [2].

Рассмотрим функцию

$$F(f, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

при $\operatorname{Re} s > 1$. Положим

$$G(f, s) = F(f, s)\exp\Big(-\sum_p \frac{f(p)}{p^s}\Big). \tag{1}$$

Тогда $G(f, s) = O(1)$ и $G'(f, s) = O(1)$ (равномерно по t и $f\in M(c)$) при $\sigma\geqslant 1$. Причем ряды Дирихле для $G(f, s)$ и $G'(f, s)$ абсолютно сходятся при $\sigma = 1$.

Докажем вначале несколько подготовительных лемм.

Лемма 1. *При любом* $d > 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big| F'(f, s)\exp\Big(-\sum_p \frac{f(p)}{p^s}\Big)\Big|^2 \frac{dt}{|s|^d} = O\Big(\frac{1}{\sigma-1}\Big), \tag{2}$$

где $t = \operatorname{Im} s$, $\sigma = \operatorname{Re} s > 1$, *для всех* $f\in M(c)$ *равномерно по* f.

Доказательство. Из (1) следует, что

$$F'(f, s) = \Big[G'(f, s) - G(f, s)\sum_p \frac{f(p)}{p^s}\log p\Big]\exp\Big(\sum_p \frac{f(p)}{p^s}\Big).$$

И поэтому, учитывая, что $G'(f, s) = O(1)$, $G(f, s) = O(1)$, для доказательства (2) достаточно убедиться, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\sum_p \frac{f(p)}{p^s}\log p\Big|^2 \frac{dt}{|s|^d} = O\Big(\frac{1}{\sigma-1}\Big). \tag{3}$$

Для доказательства (3) поступим следующим образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\sum_p \frac{f(p)}{p^s}\log p\Big|^2 \frac{dt}{|s|^d} \leqslant \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\big||n|-\frac12\big|^d} \int_{n-1/2}^{n+1/2} \Big|\sum_p \frac{f(p)}{p^s}\log p\Big|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\max_{n\in\mathbf{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big|\sum_p \frac{f(p)p^{in}}{p^s}\log p\Big|^2 \frac{dt}{|s|^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\big||n|-\frac12\big|^d}.$$

Подинтегральную функцию можно представить в виде преобразования Фурье, то есть

$$\frac{1}{s}\sum_p \frac{f(p)p^{in}}{p^s}\log p = \int_0^{+\infty} \sum_{p\leqslant e^u} f(p)p^{in}\log p\, e^{-\sigma u} e^{-iut}\, du,$$

следовательно, пользуясь равенством Парсеваля и тем, что

$$\int_0^{+\infty} \Big(\sum_{p\leqslant e^u} |f(p)|\log p\Big)^2 e^{-2\sigma u}\, du = O\Big(\frac{1}{\sigma-1}\Big),$$

получаем (3).

Пусть $0<\alpha<1$ и

$$F(\alpha,f,s)=\exp\left(\alpha\sum_p \frac{f(p)}{p^s}\right)=\sum_n \frac{f(\alpha,n)}{n^s},$$

$$D_1(f,s)=\exp\left(\alpha\sum_{p\leqslant x^\delta}\frac{f(p)}{p^s}\right),$$

$$D(f,s)=F(\alpha,f,s)-D_1(f,s)=\sum_n{}'\frac{f(\alpha,n)}{n^s},$$

где $\sum'$ означает, что суммирование распространено по тем n, для которых существует $p|n$ такое, что $p>x^\delta$.

Лемма 2. *Для любого $\delta>0$, равномерно по δ*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac1s D(f,s)\right|^2dt=O\left(\frac{1}{\delta^2\log^2x}\exp\left(2\alpha\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)\frac{1}{\sigma-1}\right)$$

для всех $f\in M(c)$.

Доказательство. Так как

$$\frac1s D(f,s)=\int_0^\infty\left(\sum_{x^\delta<n\leqslant e^u}{}' f(\alpha,n)\right)e^{-\sigma u}e^{-iut}du$$

то, применяя равенство Парсеваля, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac1s D(f,s)\right|^2dt=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{x^\delta<n\leqslant e^u}{}' f(\alpha,n)\right|^2e^{-2\sigma u}du\leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\frac{1}{\delta^2\log^2x}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\sum_{n\leqslant e^u}|f(\alpha,n)|\log n\right|^2e^{-2\sigma u}du.$$

Используем еще раз равенство Парсеваля для функции

$$\frac1s\sum_n\frac{|f(\alpha,n)|}{n^s}\log n=-\frac1s\left(\exp\left(\alpha\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)\right)',$$

получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac1s D(f,s)\right|^2dt\leqslant\frac{1}{\delta^2\log^2x}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac1s\left(\exp\left(\alpha\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)\right)'\right|^2dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\alpha^2}{\delta^2\log^2x}\exp\left(2\alpha\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac1s\sum_p\frac{|f(p)|}{p^s}\log p\right|^2dt.$$

Отсюда, так как равенство (3) справедливо для любой функции, удовлетворяющей условию $f\in M(c)$, получаем лемму 2.

Лемма 3. *Пусть I произвольное множество на прямой $\operatorname{Re}s=\sigma$, $\bar I$ — его дополнение, $\delta>0$, $0<\alpha<1$, произвольные постоянные. Тогда для всех $f\in M(c)$*

$$\int_{(\sigma)}\frac{x^s}{s^2}F'(f,s)\,ds=$$

$$=\int_{\bar I}\frac{x^s}{s^2}F'(f,s)\,ds-\int_{\bar I}\frac{x^s}{s^2}F'(f,s)\exp\left(-\alpha\sum_{p\geqslant x^\delta}\frac{f(p)}{p^s}\right)ds+$$

$$+O\Bigg(x^\sigma\exp\left(\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}-\alpha\sum_{p>x^\delta}\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)+$$

$$+x^\sigma\max_{t\in I}\left|\frac{1}{|s|^{1/4}}\exp\left((1-\alpha)\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)\right|\exp\left(\alpha\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)\frac{1}{\delta(\sigma-1)\log x}\Bigg).$$

Доказательство. Запишем $F'(f,s)$ в виде

$$F'(f,s)=F'(f,s)\exp\left(-\alpha\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)(D_1(f,s)+D(f,s)).$$

Отсюда

$$\int_{(\sigma)}\frac{x^s}{s^2}F'(f,s)\,ds=$$

$$=\int_{\bar I}\frac{x^s}{s^2}F'(f,s)\,ds+\int_I\frac{x^s}{s^2}F'(f,s)\exp\left(-\alpha\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)D_1(f,s)\,ds+$$

$$+O\Bigg(x^\sigma\max_{t\in I}\left|\frac{1}{|s|^{1/4}}\exp\left((1-\alpha)\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)\right|\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F'(f,s)\exp\left(-\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)D(f,s)\right|\frac{dt}{|s|^{7/4}}\Bigg).$$

Применяя неравенство Шварца и леммы 1, 2, получаем

$$(4)\qquad \int_{(\sigma)} \frac{x^s}{s^2} F'(f,s)\,ds =$$

$$= \int_{\bar I} \frac{x^s}{s^2} F'(f,s)\,ds - \int_{\bar I} \frac{x^s}{s^2} F'(f,s)\exp\Big(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{f(p)}{p^s}\Big)ds +$$

$$+ \int_{(\sigma)} \frac{x^s}{s^2} F'(f,s)\exp\Big(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{f(p)}{p^s}\Big)ds +$$

$$+ O\left(\frac{x^\sigma}{(\sigma-1)\,\delta\log x}\max_{t\in I}\left|\frac{1}{s^{1/4}}\exp\Big((1-a)\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\Big)\right|\exp\Big(a\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\Big)\right).$$

Оценим третий интеграл в правой части последнего равенства. Так как

$$F'(f,s) = \Big[G(f,s)\Big(-\sum_p\frac{f(p)\log p}{p^s}\Big) + G'(f,s)\Big]\exp\Big(\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\Big),$$

то третий интеграл разбивается на две части. Оценим каждую из них, используя формулу Перрона и ограниченность $f(p^r)$. Для первой получаем

$$M = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\frac{x^s}{s^2}G(f,s)F(1-a,f,s)D_1(f,s)\sum_p\frac{f(p)\log p}{p^s}\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n=plkm,\, m|\pi(x^\delta)}} |a(l)f(1-a,k)f(a,m)f(p)|\log p\log\frac{x}{n},$$

где $a(l)$ — коэффициент ряда Дирихле для $G(f,s)$ и $m|\pi(x^\delta)$ означает, что все простые делители m меньше x^δ. Отсюда, учитывая, что $f(p) = O(1)$, $\sigma > 1$, получаем

$$(5)\qquad M = O\Big(\int_1^x \sum_{\substack{lkm\leqslant u\\ m|\pi(x^\delta)}} |a(l)f(1-a,k)f(a,m)| \sum_{p\leqslant u/klm}\log p\,\frac{du}{u}\Big) =$$

$$= O\Big(\int_1^x \sum_{k=1}^\infty\frac{|f(1-a,k)|}{k^\sigma}\sum_{m|\pi(x^\delta)}\frac{f(a,m)}{m^\sigma}u^{\sigma-1}du\Big) =$$

$$= O\Big(x^\sigma\exp\Big(\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma} - a\sum_{p>x^\delta}\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\Big)\Big).$$

Здесь мы использовали сходимость ряда $\sum|a(l)|/l$. Аналогично получаем

$$(6)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)}\frac{x^s}{s^2}G'(f,s)F(1-a,f,s)D_1(f,s)\,ds =$$

$$= O\Big(x^\sigma\exp\Big(\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma} - a\sum_{p>x^\delta}\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\Big)\Big).$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получаем доказательство леммы 3.

Лемма 4. *Если $h(n)\in A$, то существует b такое, что*

$$\sum_p h(p)\frac{1-\cos t\log p}{p^\sigma} \geqslant b\log K \qquad (\text{при } 1<\sigma\leqslant\sigma_0)$$

в любой области вида

$$K(\sigma-1)\leqslant|t|\leqslant K,$$

где $K\geqslant K_0$ произвольная постоянная.

Доказательство. Имеем

$$\sum_p h(p)\frac{1-\cos t\log p}{p^\sigma} \geqslant \frac{1}{e}\sum_{e^{1/t}\leqslant p\leqslant e^{1/\sigma-1}} h(p)\frac{1-\cos t\log p}{p}.$$

Для оценки полученной суммы выделим те p, для которых $1-\cos t\log p \geqslant \varepsilon > 0$ и заменим $1-\cos t\log p$ на ε. Остальные слагаемые отбросим. Затем вновь полученную сумму дополним до полной. Пусть $\alpha = \arccos(1-\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ будет выбрано позднее,

$$y_1(n) = \exp\Big(\frac{(2\pi n-\alpha)}{|t|}\Big),\quad y_2(n) = \exp\Big(\frac{(2\pi n+\alpha)}{|t|}\Big)$$

и

$$T = \Big[\frac{1}{2\pi}\Big(\frac{t}{\sigma-1}-\alpha\Big)\Big].$$

Тогда

$$\sum_p h(p)\frac{1-\cos t\log p}{p} \geqslant \frac{\varepsilon}{e}\sum_{y_1(1)\leqslant p\leqslant y_2(T)}\frac{h(p)}{p} - \frac{\varepsilon}{e}\sum_{n=1}^T\sum_{y_1(n)\leqslant p\leqslant y_2(n)}\frac{h(p)}{p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\varepsilon}{e}\int\limits_{y_1(1)}^{y_2(T)} \frac{1}{u\log u}\, d\sum_{p\leqslant u} h(p)\log p - c_2\frac{\varepsilon}{e}\sum_{n=1}^{T}\left(\log\frac{2\pi n+a}{2\pi n-a}+\frac{|t|^2}{(2\pi n-a)^2}\right)=$$

$$=\frac{\varepsilon}{e}\Bigg(-\frac{1}{y_1(1)\log y_1(1)}\sum_{p\leqslant y_1(1)} h(p)\log p+\frac{1}{y_2(T)\log y_2(T)}\sum_{p\leqslant y_2(T)} h(p)\log p-$$

$$-\int\limits_{y_1(1)}^{y_2(T)}\sum_{p\leqslant u} h(p)\log p\, d\,\frac{1}{u\log u}-c_3\frac{\varepsilon}{e}\,a\log T-c_4\,|t|^2\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant\frac{\varepsilon\tau_0}{e}\log\frac{2\pi T+a}{2\pi-a}+O(1)-c_5\varepsilon a\log T-c_4\,|t|^2\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{\varepsilon\tau_0}{e}-c_5\varepsilon a\right)\log T-c_4\,|t|^2\varepsilon+O(1).$$

Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы $\varepsilon\tau_0/e-c_5\varepsilon a\geqslant 3b>0$. Тогда

$$\sum_p h(p)\,\frac{1-\cos t\log p}{p^\sigma}\geqslant 2b\log\frac{|t|}{\sigma-1}-c_4\,|t|^2$$

при $1<\sigma<\sigma_1$ и ограниченных t. Отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Применяя формулу Перрона и интегрируя по частям, воспользовавшись (1), получим

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\log\frac{x}{n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma)}\frac{x^s}{s^2}F(f,s)\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^\sigma F(f,\sigma+it)\,d\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{x^{iu}du}{(\sigma+iu)^2}=$$

$$=\frac{-1}{2\pi i\log x}\int\limits_{(\sigma)}\frac{x^s}{s^2}F'(f,s)\,ds+$$

$$+O\left(\log x\cdot\exp\left(\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)+\frac{x^\sigma}{\log^2 x}\int\limits_{(\sigma)}\frac{1}{|s|^3}|F'(f,s)|\,|ds|\right).$$

Здесь и в дальнейшем $d_2/\log x<\sigma-1<d_1/\log x$, где $d_2>0$. Из леммы 1 с $d=2$ следует, что

$$\int\limits_{(\sigma)}\frac{1}{|s|^3}\left|F'(f,s)\exp\left(-\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)\right||ds|=$$

$$=O\left(\sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|F'(f,s)\exp\left(-\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)\right|^2\frac{dt}{|s|^2}}\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma-1}}\right)=$$

$$=O(\sqrt{\log x}).$$

Из последних двух соотношений получаем

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\log\frac{x}{n}=\frac{-1}{2\pi i\log x}\int\limits_{(\sigma)}\frac{x^s}{s^2}F'(f,s)\,ds+O\left(\frac{x}{(\log x)^{3/2}}\exp\left(\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)\right).$$

Применим лемму 3 с

$$I=I(t_0)=\{s\colon\ \mathrm{Re}\,s=\sigma,\ |t-t_0|>K(\sigma-1)\}.$$

Учитывая, что $|f(p)|\leqslant h(p)$, получим

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\log\frac{x}{n}= \tag{7}$$

$$=\frac{-1}{2\pi i\log x}\int\limits_{I(t_0)}\frac{x^s}{s^2}\left[F'(f,s)-F'(f,s)\exp\left(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{f(p)}{p^s}\right)\right]ds+$$

$$+O\Bigg(\frac{x}{\log^{3/2}x}\exp\left(\sum_p\frac{h(p)}{p^\sigma}\right)+\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}-a\sum_{p>x^\delta}\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)+$$

$$+\frac{x}{\delta\log x}\max_{t\in I(t_0)}\left|\frac{1}{s^{1/4}}\exp\left((1-a)\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)\right|\exp\left(a\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)\Bigg).$$

Оценим последовательно члены, стоящие в остатке. Рассмотрим сначала случай, когда ряд

$$\sum_p\frac{h(p)-|f(p)|}{p} \tag{8}$$

сходится. Заметим, что, если $f\in N(h,c_1)$ и $|f(p)|\leqslant h(p)$, то этот ряд сходится. Тогда, учитывая, что

$$\sum_{p>x}\frac{h(p)}{p^\sigma}=O\left(\sum_{p>x}\frac{1}{p^\sigma}\right)=O(1)\quad\text{при}\quad\sigma=1+O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

получим

$$\sum_{p>x^\delta}\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\geqslant\sum_{x^\delta<p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}+O(1)=\int\limits_{x^\delta}^{x}\frac{1}{u\log u}\,d\sum_{p\leqslant u}h(p)\log p+O(1)=$$

$$=-\int\limits_{x^\delta}^{x}\sum_{p\leqslant u}h(p)\log p\,d\,\frac{1}{u\log u}+O(1)\geqslant\tau_0\log\frac{1}{\delta}+O(1).$$

Таким образом, если ряд (8) сходится, то первые два члена остатка в (7) равны

$$O\left(\frac{x}{\log x}\left(\delta^{a\tau_0}+o(1)\right)\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right). \tag{9}$$

Если ряд (8) расходится, то

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)-|f(p)|}{p}\to+\infty$$

при $x\to\infty$, и, следовательно, в этом случае также справедливо соотношение (9). Оценим третье слагаемое остатка в (7). Пусть $f\in N(h, c_1)$. Тогда, так как

$$|f(p)|-\operatorname{Re}f(p)p^{-it}=$$
$$=h(p)\left(1-\cos(t-t_0)\log p\right)-\left(h(p)-|f(p)|\right)\left(1-\cos(t-t_0)\log p\right)+$$
$$+\left(|f(p)|-\operatorname{Re}f(p)p^{-it_0}\right)\cos(t-t_0)\log p-\operatorname{Im}f(p)p^{-it_0}\sin(t-t_0)\log p,$$

то при $K\geqslant|t-t_0|\geqslant K(\sigma-1)$ из леммы 4 следует, что

$$\sum_p\left(|f(p)|-\operatorname{Re}f(p)p^{-it}\right)\frac{1}{p^\sigma}\geqslant$$
$$\geqslant\sum_p h(p)\left(1-\cos(t-t_0)\log p\right)\frac{1}{p^\sigma}-2\sum_p\frac{h(p)-\operatorname{Re}f(p)p^{-it_0}}{p}-$$
$$-\sqrt{\sum_p\frac{h(p)-\operatorname{Re}f(p)p^{-it_0}}{p}\cdot 4\sum_p\frac{h(p)\left(1-\cos(t-t_0)\log p\right)}{p^\sigma}}\geqslant\frac{b}{2}\log K.$$

Таким образом, в этом случае

$$\max_{t\in I(t_0)}\left|\frac{1}{s^{1/4}}\exp\left((1-a)\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)\right|\leqslant\frac{1}{K^m}\exp\left((1-a)\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right), \tag{10}$$

где $m>0$. Если же для некоторой функции $f\in M(c)$ ряд

$$\sum_p\frac{h(p)-\operatorname{Re}f(p)p^{-it}}{p} \tag{11}$$

расходится при любом t, то

$$\exp\left(-\sum_p\frac{\left(h(p)-\operatorname{Re}f(p)p^{-it}\right)}{p^\sigma}\right)$$

стремится к нулю монотонно при $\sigma\to1+0$ и, следовательно, равномерно по t в любой области $|t|\leqslant K$. Поэтому, и в этом случае, имеет место соотношение (10). Подставляя (9) и (10) в (7) и заменяя s на $s+it_0$, находим

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\log\frac{x}{n}= \tag{12}$$
$$=\frac{-x^{it_0}}{2\pi i\log x}\int\limits_{I(0)}\frac{x^s}{(s+it_0)^2}F'(s+it_0)\left(1-\exp\left(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{f(p)p^{-it_0}}{p^s}\right)\right)ds+$$
$$+O\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\left(\delta^{a\tau_0}+o(1)+\frac{1}{\delta K^m}\right)\right).$$

Если ряд (11) расходится при любом t, то учитывая, что

$$F'(f, s)=$$
$$=G'(f, s)\exp\left(\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)+G(f, s)\sum_p\frac{-f(p)\log p}{p^s}\exp\left(\sum_p\frac{f(p)}{p^s}\right)=$$
$$=o\left(\frac{1}{\sigma-1}\exp\left(\sum_p\frac{h(p)}{p^\sigma}\right)\right),$$

получим

$$\sum_{n\leqslant x}f(n)\log\frac{x}{n}=O\left(\frac{x}{\log x}\left(\delta^{a\tau_0}+\frac{1}{\delta K^m}+o(1)\right)\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right). \tag{13}$$

Преобразуем интеграл в (12). Заменим $(s+it_0)^2$ на $(1+it_0)^2$. Тогда так как для $s\in\overline{I(0)}$ имеем $|t|\leqslant K(\sigma-1)$, то применяя лемму 1, получим

$$\int\limits_{I(0)}\left|\frac{1}{(s+it_0)^2}-\frac{1}{(1+it_0)^2}\right|\left|F'(f, s+it_0)\left(1-\exp\left(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{f(p)}{p^s}\right)\right)\right||ds|=$$
$$=O\left(2K(\sigma-1)\exp\left(\sum_p\frac{|f(p)|}{p^\sigma}\right)\sqrt{\frac{1}{\sigma-1}}\right)=$$
$$=O\left(K\sqrt{\sigma-1}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right).$$

Таким образом,

$$\text{(14)}\qquad \sum_{n\leqslant x} f(n)\log\frac{x}{n} =$$

$$=\frac{-x^{it_0}}{2\pi i(1+it_0)^2\log x}\int_{I(0)} x^s F'(f,\,s+it_0)\Big(1-\exp\Big(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{f(p)}{p^{s+it_0}}\Big)\Big)\,ds+$$

$$+O\Big(\frac{x}{\log x}\Big(\delta^{a\tau_0}+\frac{1}{\delta K^m}+o(1)\Big)\exp\Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\Big)\Big).$$

Из представления (1) для $F(f,s)$ и $F(h,s)$, учитывая равномерную ограниченность $G'(f,s)$ и $G'(h,s)$ при $\sigma>1$, получаем для $s\in\overline{I(0)}$

$$F(f,\,s+it_0)=G(f,\,s+it_0)\exp\Big(\sum_p\frac{f(p)}{p^{s+it_0}}\Big)=$$

$$=G(f,\,\sigma+it_0)\exp\Big(-\sum_p\frac{h(p)-f(p)p^{-it_0}}{p^s}\Big)\exp\Big(\sum_p\frac{h(p)}{p^s}\Big)+$$

$$+O\Big(|G'(f,z)|\cdot|t|\exp\Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\Big)\Big)=$$

$$=\frac{F(f,\,\sigma+it_0)}{F(h,\,\sigma)}F(h,s)\exp\Big(\sum_p\frac{h(p)-f(p)p^{-it_0}}{p^\sigma}(1-p^{-it})\Big)+$$

$$+O\Big(K(\sigma-1)\exp\Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\Big)\Big).$$

Но учитывая, что $f\in N(h,\,c_1)$, получим

$$\text{(15)}\qquad \Big|\sum_p\frac{h(p)-f(p)p^{-it_0}}{p^\sigma}(1-p^{-it})\Big|\leqslant|t|\sum_p\frac{|h(p)-f(p)p^{-it_0}|}{p}\log p=$$

$$=O\Big(K(\sigma-1)\log\frac{1}{\sigma-1}+$$

$$+K(\sigma-1)\sqrt{\sum_{p>1/(\sigma-1)}\frac{h(p)-\mathrm{Re}f(p)p^{-it_0}}{p^\sigma}\log p\sum_p\frac{\log p}{p^\sigma}}\Big)=$$

$$=O\Big(K\sqrt{\sigma-1}\Big(\log\frac{1}{\sigma-1}+$$

$$+\sqrt{\int_{1/(\sigma-1)}^{\infty}u^{-\sigma+1}d\sum_{p\leqslant u}\big(h(p)-\mathrm{Re}f(p)p^{-it_0}\big)\frac{\log p}{p}}\Big)\Big)=o(1)+$$

$$+O\Big(\sqrt{(\sigma-1)^2\int_{1/(\sigma-1)}^{\infty}\frac{\log u}{u^\sigma}\,\frac{1}{\log u}\sum_{p\leqslant u}\frac{\big(h(p)-\mathrm{Re}f(p)p^{-it_0}\big)\log p}{p}\,du}\Big)=$$

$$=o(1)$$

при $\sigma\to1+0$ равномерно по $f\in N(h,\,c_1)$, следовательно

$$F(f,\,s+it_0)=\frac{F(f,\,\sigma+it_0)}{F(h,\,\sigma)}F(h,s)+o\Big(\exp\Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\Big)\Big)$$

при $\sigma\to1+0$. Отсюда, применяя формулу Коши с $\gamma=\{\zeta:\ |\zeta-s|=(\sigma-1)/2\}$, получим

$$\text{(16)}\qquad F'(f,\,s+it_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{F(f,\zeta)}{(\zeta-s)^2}\,d\zeta=$$

$$=\frac{F(f,\,\sigma+it_0)}{F(h,\,\sigma)}F'(h,s)+o\Big(\frac{1}{\sigma-1}\exp\Big(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\Big)\Big).$$

Кроме этого имеем

$$\text{(17)}\qquad -\sum_{p>x^\delta}\frac{f(p)}{p^{s+it_0}}+\sum_{p>x^\delta}\frac{h(p)}{p^\sigma}=O\Big(\sum_{p>x^\delta}\frac{|h(p)-f(p)p^{-it_0}|}{p^\sigma}\Big)=$$

$$=O\Big(\sqrt{\sum_{p>x^\delta}\frac{h(p)-\mathrm{Re}f(p)p^{-it_0}}{p^\sigma}\sum_{p>x^\delta}\frac{1}{p^\sigma}}\Big)=o(1),$$

так как для любого фиксированного $\delta>0$

$$\sum_{p>x^\delta}1/p^\sigma=O(1)$$

и

$$\text{(18)}\qquad \sum_{p>x^\delta}\frac{h(p)-\mathrm{Re}f(p)p^{-it_0}}{p^\sigma}=$$

$$= \int_{x^{\delta}}^{\infty} \frac{u^{1-\sigma}}{\log u}\, d \sum_{p\leqslant u} \left(h(p) - \operatorname{Re} f(p) p^{-it_0}\right)\frac{\log p}{p} =$$

$$= O\Bigg(\frac{1}{\log x^{\delta}} \sum_{p\leqslant x^{\delta}}\left(h(p)-\operatorname{Re}f(p)p^{-it_0}\right)\frac{\log p}{p} +$$

$$+ \int_{x^{\delta}}^{\infty} \frac{1}{\log u}\sum_{p\leqslant u}\left(h(p)-\operatorname{Re} f(p)p^{-it_0}\right)\frac{\log p}{p}\left(\frac{\sigma-1}{u^{\sigma}}+\frac{u^{-\sigma}}{\log u}\right)du\Bigg)$$

стремится к нулю при $x\to\infty$, в силу условия 2) принадлежности $f(n)$ классу $N(h, c_1)$. Из (16) и (17) следует, что (14), если $f\in N(h,c_1)$, можно записать в следующем виде

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\log\frac{x}{n} =$$

$$= \frac{-x^{it_0}F(f,\sigma+it_0)}{2\pi i(1+it_0)^2\log x\cdot F(h,\sigma)}\int_{l(0)} x^{s}F'(h,s)\left(1-\exp\left(-a\sum_{p>x^{\delta}}\frac{h(p)}{p^{s}}\right)\right)ds +$$

$$+O\left(\frac{x}{\log x}\left(\delta^{a\tau_0}+\frac{1}{\delta K^{m}}+o(1)\right)\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right).$$

Заметим, что если ряд (11) расходится при любом t, то данное соотношение переходит в (13), так как

$$\frac{F(f,\sigma+it_0)}{F(h,\sigma)}\to 0 \quad \text{при} \quad \sigma\to 1+0.$$

Для функции $h(n)$ также справедливо аналогичное равенство. То есть

$$(19)\qquad \sum_{n\leqslant x} h(n)\log\frac{x}{n} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i\log x}\int_{l(0)} x^{s}F'(h,s)\left(1-\exp\left(-a\sum_{p>x^{\delta}}\frac{h(p)}{p^{s}}\right)\right)ds +$$

$$+O\left(\frac{x}{\log x}\left(\delta^{a\tau_0}+\frac{1}{\delta K^{m}}+o(1)\right)\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right)$$

и поэтому, учитывая, что δ и K произвольные постоянные, получаем

$$\sum_{n\leqslant x} f(n)\log\frac{x}{n} =$$

$$= \frac{x^{it_0}F(f,\sigma+it_0)}{(1+it_0)^2F(h,\sigma)}\sum_{n\leqslant x} h(n)\log\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right).$$

Отсюда, взяв σ одно и то же для x и $x(1+\varepsilon)$, при любом $\varepsilon>0$ имеем

$$\sum_{n\leqslant x(1+\varepsilon)} f(n)\log\frac{x(1+\varepsilon)}{n} - \sum_{n\leqslant x} f(n)\log\frac{x}{n} =$$

$$= \Bigg[\left(\frac{x^{it_0}(1+\varepsilon)^{it_0}}{(1+it_0)^2}-\frac{x^{it_0}}{(1+it_0)^2}\right)\sum_{n\leqslant x(1+\varepsilon)} h(n)\log\frac{x(1+\varepsilon)}{n} +$$

$$+\frac{x^{it_0}}{(1+it_0)^2}\Bigg(\sum_{n\leqslant x} h(n)\log(1+\varepsilon) +$$

$$+\sum_{x<n\leqslant x(1+\varepsilon)} h(n)\log\frac{x(1+\varepsilon)}{n}\Bigg)\Bigg]\frac{F(f,\sigma+it_0)}{F(h,\sigma)} +$$

$$+o\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right).$$

Или

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \left[it_0\sum_{n\leqslant x} h(n)\log\frac{x}{n}+\sum_{n\leqslant x} h(n)\right]\frac{x^{it_0}}{(1+it_0)^2}\,\frac{F(f,\sigma+it_0)}{F(h,\sigma)} +$$

$$+O\left(\varepsilon\sum_{n\leqslant x(1+\varepsilon)} h(n)\left|\log\frac{x}{n}\right| + \sum_{x<n\leqslant x(1+\varepsilon)}\left(h(n)+|f(n)|\right)\right) +$$

$$+o\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right).$$

Из ограниченности $h(p^{r})$ и $f(p^{r})$ следует, что

$$(20)\qquad \sum_{x<n\leqslant x(1+\varepsilon)}\left(h(n)+|f(n)|\right)\leqslant\frac{1}{\log x}\sum_{x<n\leqslant x(1+\varepsilon)}\left(h(n)+|f(n)|\right)\sum_{p^{a}\|n}\log p^{a}\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\log x}\sum_{p^a\leqslant x(1+\varepsilon)} \big(h(p^a)+|f(p^a)|\big)\log p^a \sum_{\frac{x}{p^a}\leqslant n\leqslant\frac{x(1+\varepsilon)}{p^a}} \big(h(n)+|f(n)|\big) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\log x}\sum_{n\leqslant x(1+\varepsilon)}\big(h(n)+|f(n)|\big)\sum_{\frac{x}{n}\leqslant p^a\leqslant\frac{x(1+\varepsilon)}{n}}\log p^a\right) =$$

$$= O\left(\frac{\varepsilon x}{\log x}\sum_{n\leqslant x(1+\varepsilon)}\frac{h(n)+|f(n)|}{n}+\frac{1}{\log x}\sum_{n\leqslant x(1+\varepsilon)}\big(h(n)+|f(n)|\big)\right).$$

Из последних двух соотношений, учитывая, что (см. теорему 1 [6])

$$(21)\qquad \sum_{n\leqslant x}\big(h(n)+|f(n)|\big) = O\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right),$$

так как $\varepsilon>0$ любое, и

$$(22)\qquad \sum_{n\leqslant x} h(n)\log\frac{x}{n} = \int_1^x \sum_{n\leqslant u} h(n)\frac{du}{u} = O\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right),$$

получаем

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \left[it_0\sum_{n\leqslant x}h(n)\log\frac{x}{n}+\sum_{n\leqslant x}h(n)\right]\frac{x^{it_0}}{(1+it_0)^2}\,\frac{F(f,\sigma+it_0)}{F(h,\sigma)} +$$

$$+o\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right).$$

Докажем, что

$$(23)\qquad \sum_{n\leqslant x} h(n) = \sum_{n\leqslant x} h(n)\log\frac{x}{n}+o\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right)$$

и выясним поведение $F(f,\sigma+it_0)/F(h,\sigma)$ при $\sigma\to1+0$. Из (19) следует, что

$$\sum_{n\leqslant x(1+\varepsilon)} h(n)\log\frac{x(1+\varepsilon)}{n} - \sum_{n\leqslant x}h(n)\log\frac{x}{n} =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i\log x}\int_{\overline{I(0)}} x^s[(1+\varepsilon)^s-1]F'(h,s)\left(1-\exp\left(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{h(p)}{p^s}\right)\right)ds+$$

$$+O\left(\frac{x}{\log x}\left(\delta^{a\tau_0}+\frac{1}{\delta K^m}+o(1)\right)\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right)+$$

$$+o\left(\frac{x}{\log^2 x}\int_{(\sigma)}\frac{1}{|s|^3}\left|F'(h,s)\left(1-\exp\left(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{h(p)}{p^s}\right)\right)\right||ds|\right).$$

Отсюда, заметив, что $x^s\big((1+\varepsilon)^s-1\big) = x^s\big(\exp(s\log(1+\varepsilon))-\exp(\log(1+\varepsilon))+\varepsilon\big) = \varepsilon x^s+O(|x||s-1|)$, и учитывая, что при $s\in \overline{I(0)}$, $|s-1|\leqslant K(\sigma-1)$, получаем

$$\sum_{n\leqslant x} h(n) = \sum_{n\leqslant x} h(n)\log\frac{x}{n}+O\left(\varepsilon\sum_{n\leqslant x}h(n)\log\frac{x}{n}+\right.$$

$$+\sum_{x<n\leqslant x(1+\varepsilon)}h(n)+\frac{1}{\varepsilon}\left(\delta^{a\tau_0}+\frac{1}{\delta K^m}+o(1)\right)\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)+$$

$$\left.+\frac{Kx}{\log^2 x}\int_{(\sigma)}\frac{1}{|s|^3}\left|F'(h,s)\left(1-\exp\left(-a\sum_{p>x^\delta}\frac{h(p)}{p^s}\right)\right)\right||ds|\right).$$

Оценив, используя лемму 1, последний интеграл, отсюда из (20)–(22), получаем (23). Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{x^{it_0}F(f,\sigma+it_0)}{(1+it_0)F(h,\sigma)}\sum_{n\leqslant x}h(n)+o\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right).$$

При $\sigma = 1+O(1/\log x)$ имеем, учитывая (1),

$$\frac{F(f,\sigma+it_0)}{F(h,\sigma)}\prod_{p\leqslant x}\left(1+\sum_{r=1}^\infty\frac{h(p^r)}{p^r}\right)\left(1+\sum_{r=1}^\infty\frac{f(p^r)}{p^{r(1+it_0)}}\right)^{-1} =$$

$$=\big(1+o(1)\big)\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)-f(p)p^{-it_0}}{p}\,(1-p^{1-\sigma})+\right.$$

$$\left.+O\left(\sum_{p>x}\frac{|h(p)-f(p)p^{-it_0}|}{p^\sigma}\right)\right).$$

Выражение, стоящее под знаком exp стремится к нулю. Последнее доказывается аналогично (15) и (18). Следовательно, получаем

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{x^{it_0}}{1+it_0}C(x)\sum_{n\leqslant x}h(n)+o\left(\frac{x}{\log x}\exp\left(\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\right)\right).$$

Для завершения доказательства осталось убедиться, что для $h(n)\in A$ справедливо соотношение

$$(24)\qquad \frac{x}{\log x}\exp\Bigl(\sum_{p\le x}\frac{h(p)}{p}\Bigr)=O\Bigl(\sum_{n\le x}h(n)\Bigr).$$

Имеем

$$\sum_{n\le x}h(n)\ge\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}h(n)\log n=\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}h(n)\sum_{p^\alpha\| n}\log p^\alpha\ge$$

$$\ge\frac{1}{\log x}\sum_{p\le x}h(p)\log p\sum_{n\le x/p}h(n)-\frac{1}{\log x}\sum_{p\le x}h(p)\log p\sum_{n\le x/p^2}h(np).$$

Для оценки вычитаемого используем неравенство (21). Получим, учитывая, что $h(n)\in A$,

$$(25)\qquad \sum_{n\le x}h(n)\ge\frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}h(n)\sum_{p\le x/n}h(p)\log p+$$

$$+O\Bigl(\frac{x}{\log x}\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p^2\log(2x/p)}\exp\Bigl(\sum_{p\le x}\frac{h(p)}{p}\Bigr)\Bigr)\ge$$

$$\ge\tau_0\frac{x}{\log x}\sum_{n\le x/y_0}\frac{h(n)}{n}+O\Bigl(\frac{x}{\log^2 x}\exp\Bigl(\sum_{p\le x}\frac{h(p)}{p}\Bigr)\Bigr).$$

Пусть $y=x^\varepsilon$ и $n|\pi(y)$ означает, что все простые делители n меньше y. Тогда

$$(26)\qquad \sum_{n\le x/y_0}\frac{h(n)}{n}\ge\sum_{\substack{n\le x/y_0\\ n|\pi(y)}}\frac{h(n)}{n}=\prod_{p\le y}\Bigl(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Bigr)-\sum_{\substack{n>x/y_0\\ n|\pi(y)}}\frac{h(n)}{n}.$$

Пусть $\gamma=1/\log y$, тогда

$$\sum_{\substack{n>x/y_0\\ n|\pi(y)}}\frac{h(n)}{n}\le\Bigl(\frac{y_0}{x}\Bigr)^\gamma\sum_{n|\pi(y)}\frac{h(n)}{n^{1-\gamma}}=$$

$$=y_0^\gamma\exp\Bigl[\sum_{p\le y}\frac{h(p)}{p^{1-\gamma}}+\sum_{p\le y}\Bigl(\log\Bigl(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^{r(1-\gamma)}}\Bigr)-\frac{h(p)}{p^{1-\gamma}}\Bigr)-\gamma\log x\Bigr]=$$

$$=O\Bigl(\exp\Bigl[\sum_{p\le y}\frac{h(p)}{p}+\sum_{p\le y}\frac{h(p)}{p}\bigl(e^{\frac{\log p}{\log y}}-1\bigr)-\frac{1}{\varepsilon}\Bigr]\Bigr).$$

Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon>0$ получаем

$$\prod_{p\le y}\Bigl(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Bigr)^{-1}e^{\frac{h(p)}{p}}\cdot\exp\Bigl(-\sum_{p\le y}\frac{h(p)}{p}\Bigr)\sum_{\substack{n>x/y_0\\ n|\pi(y)}}\frac{h(n)}{n}\le\frac{1}{2}.$$

Отсюда и из (26) находим

$$\sum_{n\le x/y_0}\frac{h(n)}{n}\ge\frac{1}{2}\prod_{p\le y}\Bigl(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Bigr)\ge c_6\exp\Bigl(\sum_{p\le y}\frac{h(p)}{p}\Bigr)=$$

$$=c_6\exp\Bigl(-\sum_{y<p\le x}\frac{h(p)}{p}\Bigr)\cdot\exp\Bigl(\sum_{p\le x}\frac{h(p)}{p}\Bigr)\ge c_7\varepsilon\exp\Bigl(\sum_{p\le x}\frac{h(p)}{p}\Bigr),$$

где $\varepsilon>0$. И, наконец, учитывая последнее соотношение, и (25), получаем (24). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим последовательность характеристических функций

$$\tau_x(\xi)=\Bigl(\sum_{n\le x}h(n)\Bigr)^{-1}\sum_{n\le x}h(n)e^{i\xi g(n)}.$$

Мультипликативные функции $h(n)e^{i\xi g(n)}$ при $|\xi|\le C$ принадлежат классу $N(h,c_1)$. Действительно, из сходимости ряда

$$(27)\qquad \sum_{p}\|g(p)-b\log p\|^2\frac{h(p)}{p}$$

следует, что

$$\sum_{p}\bigl(h(p)-\operatorname{Re}h(p)e^{i\xi g(p)}p^{-i\xi b}\bigr)\frac{1}{p}=\sum_{p}\bigl(1-\cos\xi(g(p)-b\log p)\bigr)\frac{h(p)}{p}\le$$

$$\le 2(\xi^2+1)\sum_{p}\|g(p)-b\log p\|^2\frac{h(p)}{p}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{1}{\log y}\sum_{p\le y}\bigl(1-\cos\xi(g(p)-b\log p)\bigr)\frac{h(p)\log p}{p}\le$$

$$\le\frac{2}{\log y}\sum_{p\le\log y}\frac{h(p)\log p}{p}+2(\xi^2+1)\sum_{p>\log y}\|g(p)-b\log p\|^2\frac{h(p)}{p}\to 0$$

при $y\to\infty$.

Применяя теорему 1, находим

$$\tau_x(\xi) = \frac{x^{i\xi b}\big(1+o(1)\big)}{1+i\xi b}\prod_{p\leqslant x}\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}e^{i\xi(g(p^r)-b\log p^r)}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Big)^{-1}$$

равномерно по ξ в любой области $|\xi|\leqslant C$. Но так как

$$\big|e^{i\xi(g(p)-b\log p)}-1-i\xi\|g(p)-b\log p\|\big| = O\big((\xi^2+1)\|g(p)-b\log p\|^2\big),$$

то

$$\tau_x(\xi)\cdot\exp\Big[-i\xi\Big(b\log x+\sum_{p\leqslant x}\|g(p)-b\log p\|\frac{h(p)}{p}+d\Big)\Big] = \tag{28}$$

$$= \frac{e^{-i\xi d}\big(1+o(1)\big)}{1+i\xi b}\prod_{p\leqslant x}\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}e^{i\xi(g(p^r)-b\log p^r)}\Big)e^{-i\xi\frac{\|g(p)-b\log p\|}{p}h(p)}\times$$

$$\times\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Big)^{-1} = \tau(\xi)+o(1)$$

равномерно по ξ при $|\xi|\leqslant C$. Отсюда, переходя к функциям распределения, получим утверждение первой части теоремы 2.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. В этом случае для характеристических функций имеем

$$\tau_x(\xi)e^{-i\xi A(x)} = \Big(\sum_{n\leqslant x}h(n)\Big)^{-1}\Big(\sum_{n\leqslant x}h(n)e^{i\xi(g(n)-A(x))}\Big) = \tau(\xi)+o(1) \tag{29}$$

равномерно по ξ при $|\xi|\leqslant C$. Так как $\tau(0)=1$ и $\tau(\xi)$ непрерывная функция, то существует $\xi_0>0$ такое, что $|\tau(\xi)|\geqslant 1/2$ при $|\xi|\leqslant\xi_0$. Тогда для любого $\xi\in[-\xi_0,\xi_0]$ существует $t(\xi)$, с которым

$$\sum_p\frac{h(p)-\operatorname{Re}h(p)e^{i(\xi g(p)-t(\xi)\log p)}}{p} < +\infty.$$

Действительно, если для какого-нибудь $\xi_1\in[-\xi_0,\xi_0]$ ряд

$$\sum_p\frac{h(p)-\operatorname{Re}h(p)e^{i\xi_1 g(p)}p^{-it}}{p}$$

расходится при любом t, то в силу теоремы 1 левая часть равенства (29) стремится к 0 при $x\to\infty$, что невозможно, так как $|\tau(\xi_1)|\geqslant 1/2$. Применим теорему 1 для любого фиксированного $\xi\in[-\xi_0,\xi_0]$. Тогда получим

$$\tau_x(\xi)e^{-i\xi A(x)} = \tag{30}$$

$$= \frac{x^{it(\xi)}e^{-i\xi A(x)}\big(1+o(1)\big)}{1+it(\xi)}\prod_{p\leqslant x}\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)e^{i\xi g(p^r)}}{p^{r(1+it(\xi))}}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Big)^{-1} =$$

$$= \frac{x^{it(\xi)}e^{-i\xi A(x)}\big(1+o(1)\big)}{1+it(\xi)}\times$$

$$\times\exp\Big[-\sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)-h(p)\exp\big(i(\xi g(p)-t(\xi)\log p)\big)}{p}\Big]\varphi(\xi),$$

где

$$\varphi(\xi) = \prod_{p\leqslant x}\frac{\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}e^{i\xi g(p^r)-it(\xi)\log p^r}\Big)e^{h(p)/p}}{\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Big)\exp\Big(\frac{h(p)}{p}e^{i\xi g(p)-it(\xi)\log p}\Big)}$$

равномерно по ξ ограничена. Из этого представления и из (29), учитывая, что $|\tau(\xi)|\geqslant 1/2$, при $\xi\in[-\xi_0,\xi_0]$, получаем

$$|t(\xi)|\leqslant c_0 \quad\text{и}\quad \sum_p\frac{h(p)}{p}\big(1-\cos(\xi g(p)-t(\xi)\log p)\big)\leqslant c_1 \tag{31}$$

равномерно по $\xi\in[-\xi_0,\xi_0]$. Докажем, что функция $t(\xi)$ непрерывна на $[-\xi_0,\xi_0]$. Пусть $\xi_n\to\xi'$ — произвольная последовательность. Тогда, так как $|t(\xi_n)|\leqslant c_0$, то существует подпоследовательность ξ_{n_l}, для которой $t(\xi_{n_l})\to t_1$ при $l\to\infty$. Но в силу (31)

$$\sum_p\frac{h(p)}{p}\big(1-\cos(\xi' g(p)-t_1\log p)\big)\leqslant c_1$$

и

$$\sum_p\frac{h(p)}{p}\big(1-\cos(\xi' g(p)-t(\xi')\log p)\big)\leqslant c_1.$$

Следовательно,

$$\sum_p\frac{h(p)}{p}\big(1-\cos(t_1-t(\xi'))\log p\big)\leqslant$$

$$\leqslant 2c_1+\sum_p|\sin(\xi' g(p)-t_1\log p)|\,|\sin(\xi' g(p)-t(\xi')\log p)|\frac{h(p)}{p}\leqslant$$

$$\leqslant 2c_1 + \sqrt{2\sum_p \frac{h(p)}{p}\Big(1-\cos\big(\xi' g(p) - t_1 \log p\big)\Big)} \times$$
$$\times \sqrt{2\sum_p \frac{h(p)}{p}\Big(1-\cos\big(\xi' g(p)\big) - t(\xi')\log p\Big)} \leqslant 4c_1.$$

Отсюда и из леммы 4 следует, что $t_1 = t(\xi')$. Таким образом, $t(\xi)$ функция непрерывная и, следовательно, $\varphi(\xi)$ так же непрерывная функция. Из (29) и (31) получаем

$$(32)\qquad \exp\Big[-\sum_{p\leqslant x}\big(h(p)-h(p)e^{i\xi g(p)-it(\xi)\log p}\big)\frac{1}{p} - i\xi A(x) + it(\xi)\log x\Big] = \psi(\xi)+o(1)$$

для $\xi \in [-\xi_0, \xi_0]$, где $\psi(\xi)$ — непрерывная функция. Отсюда следует, что

$$\sum_p \frac{h(p)}{p}\Big(1-\cos\big(\xi g(p) - t(\xi)\log p\big)\Big) = \log|\psi(\xi)|$$

и так как $\log|\psi(\xi)|$ функция непрерывная, то ряд сходится равномерно по ξ при $|\xi| \leqslant \xi_0$. Следовательно, функции $h(n)\exp\big(i\xi g(n) - it(\xi)\log n\big) \in N(h, c_1)$ при $|\xi| \leqslant \xi_0$. Применяя теорему 1, получим, что (30), а поэтому и (32) имеет место равномерно по ξ при $|\xi| \leqslant \xi_0$. В частности, имеем

$$\sum_{x/2<p\leqslant x} \frac{h(p)}{p}\sin\big(\xi g(p) - t(\xi)\log p\big) - \xi\big(A(x)-A(x/2)\big) + t(\xi)\log 2 = o(1)$$

равномерно по ξ при $|\xi| \leqslant \xi_0$. Или

$$t(\xi) = \xi\,\frac{A(x)-A(x/2)}{\log 2} + o(1).$$

Отсюда получаем, что $t(\xi) = b\cdot\xi$ и, учитывая (31), получим

$$\sum_p \frac{h(p)}{p}\Big(1-\cos\xi\big(g(p)-b\log p\big)\Big) \leqslant c_1$$

равномерно по ξ при $|\xi| \leqslant \xi_0$. Разобъем эту сумму на две. В $\sum_1$ суммирование распространено по тем p, для которых $|\xi_0(g(p)-b\log p)| \leqslant 2$, а в $\sum_2$ по оставшимся. В $\sum_1$, используя неравенство $1-\cos\alpha \geqslant 2\alpha^2/\pi^2$, справедливое при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi/2$, получим при $|\xi| \leqslant (\pi/4)\xi_0$

$$\frac{2}{\pi^2}\xi^2 \sum\nolimits_1 \frac{h(p)}{p}\big(g(p)-b\log p\big)^2 \leqslant c_1.$$

Вторую сумму проинтегрируем от 0 до ξ_0 и поделим на ξ_0. Получим

$$\sum_p \frac{h(p)}{p}\left(1-\frac{\sin\xi_0\big(g(p)-b\log p\big)}{\xi_0\big(g(p)-b\log p\big)}\right) \leqslant c_1.$$

Из последних двух неравенств следует, что ряд

$$\sum_p \frac{h(p)}{p}\|g(p)-b\log p\|^2$$

сходится. Но тогда, как было показано, имеет место (29) с

$$A(x) = b\log x + \sum_{p\leqslant x}\frac{h(p)}{p}\|g(p)-b\log p\| + d.$$

Отсюда и из теоремы сходимости типов следует вторая часть теоремы 2.

Литература

[1] P. D. T. A. Elliott and G. Reavec, *The distribution of values of additive arithmetical functions*, Acta Math. 126 (1971), стр. 143–164.

[2] G. Halász, *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischen Funktion*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 19 (1968), стр. 365–404.

[3] Б. В. Левин, Н. М. Тимофеев, *Суммы мультипликативных функций*, ДАН СССР 103 (3) (1970), стр. 1062–1065.

[4] —, — *Средние значения мультипликативных функций*, Тезисы докладов Всесоюзной конференции, г. Вильнюс, (1974), стр. 145–148.

[5] —, — *Аналитический метод в вероятностной теории чисел*, Ученые записки ВГПИ, сер. мат., 38 (2) (1971), стр. 57–156.

[6] Б. В. Левин, А. С. Файнлейб, *Мультипликативные функции и вероятностная теория чисел*, ИАН СССР, сер. мат., 34 (5) (1970), стр. 1064–1109.

[7] Н. М. Тимофеев, *Применение аналитического метода к суммированию мультипликативных функций*, Ученые записки ВГПИ 38 (2) (1971), стр. 205–252.

Поступило 23.7.1980
и в исправленной форме 13.3.1981 (1217)