Conspectus materiae tomi XLII, fasciculi 1

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange	Address of the Editorial Board and of the exchange	Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches	Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

ISBN 83-01-03752-0 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

ACTA ARITHMETICA
XLII (1982)

Новые следствия из формулы Римана–Зигеля

Ян Мозер (Братислава)

Исходя из одной идеи Е. К. Титчмарша ([12], стр. 99) мы вводим *бесконечное* семейство последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$, $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$, $\nu=1,2,\ldots$, согласно условию

$$\vartheta[t_\nu(\tau)] = \pi\nu+\tau, \tag{1}$$

(относительно $\{t_\nu\}$, $\vartheta(t)$ см. [12], стр. 98, 100). Так как $\{t_\nu\}=\{t_\nu(0)\}$, то $\{t_\nu(\tau)\}$ представляет собой обобщение последовательности $\{t_\nu\}$.

Это новое семейство последовательностей, в соединении с формулой Римана–Зигеля ([11], стр. 60, ср. [7], стр. 94, обозначения см. там же)

$$Z(t) = 2\sum_{n<\bar t}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(t^{-1/4}),\qquad \bar t=\sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \tag{2}$$

приводит нас к интегральным теоремам о среднем, линейным относительно $Z(t)$, которые до сих пор отсутствовали в теории $\zeta(s)$. Они содержат новую информацию о распределении положительных и отрицательных значений функции $Z(t)$ на некоторых множествах (конечно, несвязных). При этом, оценка типа Харди–Литтлвуда (см. часть 2)

$$\int_T^{T+\Omega} Z(t)\,dt = o(\Omega)$$

получается лишь как простое следствие из этих новых теорем о среднем.

1. Пусть

$$\begin{aligned} G_1 &= G_1(x,T,H) = \bigcup_{T\leqslant t_{2\nu}\leqslant T+H}\{t\colon\ t_{2\nu}(-x)<t<t_{2\nu}(x),\ 0<x\leqslant\pi/2\},\\ G_2 &= G_2(y,T,H) = \bigcup_{T\leqslant t_{2\nu+1}\leqslant T+H}\{t\colon\ t_{2\nu+1}(-y)<t<t_{2\nu+1}(y),\\ &\qquad\qquad 0<y\leqslant\pi/2\},\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$H = T^{1/6}\psi^2\ln^5 T, \tag{4}$$

и $\psi = \psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция. Имеет место

Теорема 1.

$$\int_{G_1} Z(t)\,dt = \frac{2}{\pi} H \sin x + O(T^{1/6}\psi \ln^4 T), \tag{5}$$
$$\int_{G_2} Z(t)\,dt = -\frac{2}{\pi} H \sin y + O(T^{1/6}\psi \ln^4 T).$$

Так как, в силу (1),

$$\vartheta[t_{2\nu}(x)] - \vartheta[t_{2\nu}(-x)] = 2x, \quad \vartheta[t_{2\nu+1}(y)] - \vartheta[t_{2\nu+1}(-y)] = 2y, \tag{6}$$

то способом [12], стр. 102, (ср. [1], (42)) получаем

$$t_{2\nu}(x) - t_{2\nu}(-x) = \frac{4x}{\ln(T/2\pi)} + O\left(\frac{Hx}{T\ln^2 T}\right), \tag{7}$$
$$t_{2\nu+1}(y) - t_{2\nu+1}(-y) = \frac{4y}{\ln(T/2\pi)} + O\left(\frac{Hy}{T\ln^2 T}\right),$$

для $t_{2\nu}(-x), t_{2\nu+1}(y) \in \langle T, T+H\rangle$. В силу (3), (7) и [2], (23) получаем, что

$$m(G_1) = \frac{x}{\pi} H + O(x), \quad m(G_2) = \frac{y}{\pi} H + O(y), \tag{8}$$

где $m(G_1)$, $m(G_2)$ обозначают меры множеств G_1, G_2 соответстве нно Теперь из (5) получаем

Следствие 1.

$$\frac{1}{m(G_1)} \int_{G_1} Z(t)\,dt \sim 2\frac{\sin x}{x}, \tag{9}$$
$$\frac{1}{m(G_2)} \int_{G_2} Z(t)\,dt \sim -2\frac{\sin y}{y}.$$

Так как $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $[t_{2\nu}(\pi/2) = t_{2\nu+1}(-\pi/2)$, см. (1), (3)], то из (5) получаем

Следствие 2.

$$\int_{G_1\cup G_2} Z(t)\,dt = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(\sin x - \sin y)H + O(T^{1/6}\psi\ln^4 T), & x \neq y, \\ O(T^{1/6}\psi \ln^4 T), & x = y. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство теоремы 1 помещено в частях 4–6.

2. Положим ([9], стр. 177)

$$f(s) = \pi^{-s} e^{-\frac{1}{2}\left(s-\frac{1}{4}\right)\pi i}\Gamma(s)\zeta(2s), \quad s = \sigma + it$$

и

$$X(t) = f(\tfrac{1}{4} + it).$$

Харди и Литтлвуд получили ([9], стр. 178) оценку

$$\int_T^{T+M} X(t)\,dt = O(T^\delta), \quad M = T^{1/4+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \tag{11}$$

для всех положительных δ. Однако, ([9], стр. 178),

$$X(t) = -\frac{e^{\frac{1}{2}\pi t}\Xi(2t)}{\frac{1}{4}+4t^2}$$

и, ([7], стр. 94),

$$Z(t) = -2\pi^{1/4}\frac{\Xi(t)}{\left(\frac{1}{4}+t^2\right)\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+i\frac{t}{2}\right)\right|}.$$

Следовательно, используя формулу (ср. [7], стр. 81)

$$|\Gamma(\tfrac{1}{4}+it)| = t^{-1/4} e^{-\frac{1}{2}\pi t}\sqrt{2\pi}\{1 + O(1/t)\}$$

получаем соотношение

$$X(t) = 2^{1/2}\pi^{1/4}t^{-1/4} Z(2t)\{1 + O(1/t)\}. \tag{12}$$

Так как ([7], стр. 94, 109)

$$Z(t) = O(t^{1/6}\ln t), \tag{13}$$

и

$$t^{-1/4} = T^{-1/4} + O(T^{-5/4}M) = T^{-1/4} + O(T^{-1+\varepsilon}),$$

то из (11) в силу (12) следует оценка

$$\int_T^{T+M} Z(2t)\,dt = O(T^{1/4+\delta}).$$

Теперь оценку Харди–Литтлвуда (11) напишем так,

$$\int_{2T}^{2T+2M} Z(t)\,dt = O(T^{1/4+\delta}), \quad M = T^{1/4+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0. \tag{14}$$

Баласубраманиан ([8], стр. 575) получил в этом направлении следующий результат

$$\int_{T-N}^{T+N} Z(t)\,dt = O(NT^{-5\delta}), \quad N = T^{1/6+\varepsilon}. \tag{15}$$

Напомним, что с помощью соотношений (14), (15) приводится к противоречию предположение, что $Z(t)$ сохраняет знак в соответствующем промежутке. Значит, функция $Z(t)$ имеет нуль нечетного порядка в соответствующем промежутке. Идея доказательства такого типа принадлежит Э. Ландау ([10], стр. 229–230, ср. [9], стр. 178, подстрочное замечание).

Примечание 1. Из формул (5) прямо следует существование нуля нечетного порядка функции $Z(t)$ в промежутке $(T, T+H)$ (относительно H см. (4)).

Далее, в силу (7), (13),

$$\int_{T}^{T'} Z(t)\,dt = O(T^{1/6}), \quad \int_{T''}^{T+H} Z(t)\,dt = O(T^{1/6}) \tag{16}$$

для $|T'-T|$, $|T+H-T''| = O(1/\ln T)$. Еще напомним, что

$$t_{2\nu}(\pi/2) = t_{2\nu+1}(-\pi/2), \quad t_{2\nu+1}(\pi/2) = t_{2\nu+2}(-\pi/2), \tag{17}$$

(см. (1)). Полагая теперь в (10), второе соотношение, $x=\pi/2$, получаем следующую оценку типа Харди–Литтлвуда (ср. (14), (15))

Следствие 3.

$$\int_{T}^{T+H} Z(t)\,dt = O(T^{1/6}\psi\ln^4 T), \quad H = T^{1/6}\psi^2\ln^5 T. \tag{18}$$

Примечание 2. Асимптотические формулы (5) выражают более фундаментальную закономерность в вопросе о поведении функции $Z(t)$ в коротких промежутках, чем оценки типа Харди–Литтлвуда (14), (15), (18).

Наконец мы вводим следующую гипотезу:

$$\int_{G_1} Z(t)\,dt - \int_{G_2} Z(t)\,dt = \int_{G_1\cup G_2} |Z(t)|\,dt + o(H), \quad x = y. \tag{19}$$

Из (5), $(x = y = \pi/2)$, получаем

Следствие 4. *По гипотезе* (19),

$$\frac{1}{H}\int_{T}^{T+H} |Z(t)|\,dt \sim \frac{4}{\pi}. \tag{20}$$

3. В этой части мы получим некоторые результаты в вопросе о корнях уравнений $Z(t) = K, Z'(t) = L$.

В работе [6] мы показали, что

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H_1} Z(t_\nu) = O(\sqrt{H_1}\,T^{1/12}\ln^{5/2}T), \quad H_1 \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle. \tag{21}$$

Отсюда, в случае

$$H_2 = T^{1/6+1/\psi} \tag{22}$$

мы получили оценку

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H_2} Z(t_\nu) = O(T^{1/6+1/(2\psi)}\ln^{5/2}T) = o(H_2), \tag{23}$$

для возрастающей к $+\infty$ функции $\psi(T)$, для которой

$$0 < \psi(T) < \frac{1}{6}\,\frac{\ln T}{\ln\ln T}. \tag{24}$$

Оценку (23) можно несколько уточнить (в смысле локализации) в случае, когда $\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция. А именно, условию (см. (21))

$$\sqrt{H_1}\,T^{1/12}\ln^{5/2}T = \frac{H_1}{\psi} = o(H_1) \tag{25}$$

удовлетворяет H (см. (4)). Очевидно $H/H_2 = o(1)$, $T\to+\infty$. Следовательно, имеет место

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H} Z(t_\nu) = O(T^{1/6}\psi\ln^5 T), \tag{26}$$

и (ср. [6], (9))

$$\begin{aligned}\sum_{T\leqslant t_{2\nu}\leqslant T+H} Z(t_{2\nu}) &= \frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{1/6}\psi\ln^5 T),\\ \sum_{T\leqslant t_{2\nu+1}\leqslant T+H} Z(t_{2\nu+1}) &= -\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{1/6}\psi\ln^5 T).\end{aligned} \tag{27}$$

Так как (см. [2], (23))

$$\begin{aligned}\sum_{T\leqslant t_{2\nu}\leqslant T+H} \{Z(t_{2\nu})-K\} &= \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{K}{2}\right)H\ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{1/6}\psi\ln^5 T),\\ \sum_{T\leqslant t_{2\nu+1}\leqslant T+H} \{Z(t_{2\nu+1})-K\} &= -\frac{1}{2\pi}\left(1+\frac{K}{2}\right)H\ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{1/6}\psi\ln^5 T),\end{aligned} \tag{28}$$

то имеет место

Теорема 2. *Уравнение $Z(t)=K$ имеет корень в промежутке*

$$(T, T+T^{1/6}\psi^2\ln^5 T), \tag{29}$$

если

$$|K|<2. \tag{30}$$

Пусть

$$S(a,b)=\sum_{a<n\leqslant b<2a} n^{it}, \quad b\leqslant\sqrt{t/2\pi}. \tag{31}$$

В работе [5] мы получили следующие формулы: если

$$|S(a,b)|<A(\Delta)\sqrt{a}\,t^{\Delta}, \quad \Delta\in(0,1/6\rangle, \tag{32}$$

то

$$\begin{gathered}\sum_{T\leqslant\bar{t}_{2\nu}\leqslant T+H_1} Z'(\bar{t}_{2\nu})=-\frac{1}{4\pi}H_1\ln^2\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln^2 T),\\ \sum_{T\leqslant\bar{t}_{2\nu+1}\leqslant T+H_1} Z'(\bar{t}_{2\nu+1})=\frac{1}{4\pi}H_1\ln^2\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln^2 T),\end{gathered} \tag{33}$$

где $\bar{t}_\nu=t_\nu(\pi/2)$ (ср. (1) и [5], (12)). Отсюда (ср. (28), [5], (67))

$$\begin{gathered}\sum_{T\leqslant\bar{t}_{2\nu}\leqslant T+H_1}\{Z'(\bar{t}_{2\nu})-L\}=-\frac{1}{4\pi}\left(1+\frac{L}{\ln(T/2\pi)}\right)H_1\ln^2\frac{T}{2\pi}+\\ +O(T^{\Delta}\ln^2 T),\\ \sum_{T\leqslant\bar{t}_{2\nu+1}\leqslant T+H_1}\{Z'(\bar{t}_{2\nu+1})-L\}=\frac{1}{4\pi}\left(1-\frac{L}{\ln(T/2\pi)}\right)H_1\ln^2\frac{T}{2\pi}+\\ +O(T^{\Delta}\ln^2 T).\end{gathered} \tag{34}$$

В случае $H_1=T^{\Delta}\psi$, из (34) следует

Теорема 3. *Уравнение $Z'(t)=L$ имеет корень в промежутке*

$$(T, T+T^{\Delta}\psi), \tag{35}$$

если

$$|L|<\ln(T/2\pi). \tag{36}$$

4. В этой части покажем, что имеет место

Лемма 1.

$$\sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H} Z[t_\nu(\tau)]=O(T^{1/6}\psi\ln^5 T), \tag{37}$$

для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Примечание 3. Содержание леммы 1 выразим так: оценка (26) является инвариантной относительно трансляций

$$t_\nu\to t_\nu(\tau), \quad \tau\in\langle-\pi,\pi\rangle. \tag{38}$$

Доказательство. Напомним, что при доказательстве оценки (23) (т.е. и (26)), основную роль играли соотношения ([1], (42), [2], (23); $t_\nu, t_{\nu+1}\in\langle T, T+H_1\rangle$),

$$\begin{gathered}t_{\nu+1}-t_\nu=\frac{2\pi}{\ln(T/2\pi)}+O\left(\frac{H_1}{T\ln^2 T}\right),\\ \sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H_1}1=\frac{1}{2\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}+O(1).\end{gathered} \tag{39}$$

Тем же самым способом, (ср. [12], стр. 102, [1], (40)–(42)), в случае семейства последовательностей $\{t_\nu(\tau)\}$, (см. (1)), получаем соотношения ($\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$, $t_\nu(\tau), t_{\nu+1}(\tau)\in\langle T, T+H_1\rangle$)

$$\begin{gathered}t_{\nu+1}(\tau)-t_\nu(\tau)=\frac{2\pi}{\ln(T/2\pi)}+O\left(\frac{H_1}{T\ln^2 T}\right),\\ \sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H_1}1=\frac{1}{2\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}+O(1),\end{gathered} \tag{40}$$

вполне характеризующие это семейство.

Из формулы (2) (ср. [1], (57), (58)) получаем

$$Z(t)=2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(T^{-1/4}), \quad P_0=\sqrt{\frac{T}{2\pi}}, \tag{41}$$

для $t\in\langle T, T+H_1\rangle$ и, в силу (1) ($t_\nu(\tau)\in\langle T, T+H_1\rangle$)

$$\begin{gathered}Z[t_\nu(\tau)]=2(-1)^\nu\cos\tau+\\ +2(-1)^\nu\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\tau-t_\nu(\tau)\ln n\}+O(T^{-1/4}).\end{gathered} \tag{42}$$

Отсюда (см. (40))

$$\begin{aligned}&\sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H} Z[t_\nu(\tau)]=\\ &=2\cos\tau\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H}(-1)^\nu\cos\{t_\nu(\tau)\ln n\}+\\ &+2\sin\tau\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H}(-1)^\nu\sin\{t_\nu(\tau)\ln n\}+O(\ln T)=\\ &=2W_1\cos\tau+2W_2\sin\tau+O(\ln T).\end{aligned} \tag{43}$$

Применяя к сумме W_1 способ изложенный в работах [1], [6], получаем (см. также (23), (25), (26))

$$W_1 = O(T^{1/6}\psi\ln^5 T). \tag{44}$$

Далее, в силу [3], (66), вместо [1], (54) получаем (обозначения см. там же)

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu\sin(t_\nu\ln n) = \tag{54'}$$

$$=\tfrac{1}{2}(-1)^{\bar\nu}\sin\varphi+\tfrac{1}{2}(-1)^{N+\bar\nu}\sin(\omega N+\varphi)-\tfrac{1}{2}(-1)^{\bar\nu}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\cos\varphi-$$

$$-\tfrac{1}{2}(-1)^{N+\bar\nu}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\cos(\omega N+\varphi)+O\left(\frac{H^3\ln n}{T}\right)$$

а вместо [6], (42) имеем

$$\cos\varphi-\cos(\omega N+\varphi) = 2\sin\frac{\omega N}{2}\sin\left(\frac{\omega N}{2}+\varphi\right)= \tag{42'}$$

$$= -2\sin NX\sin(\tilde{T}\ln n).$$

Теперь, способом изложенным в [1], [6] получается оценка

$$W_2 = O(T^{1/6}\psi\ln^5 T). \tag{45}$$

5. В этой части покажем, что имеет место

Лемма 2. *Из* (32) *следует*

$$\sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H_1}(-1)^\nu Z[t_\nu(\tau)] = \frac{1}{\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^{\Delta}\ln T), \tag{46}$$

для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Напомним, что в работах [2], (21)–(52), [4] мы получили формулу

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H_1}(-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln T). \tag{47}$$

Примечание 4. Формула (47) не является инвариантной относительно трансляций $t_\nu\to t_\nu(\tau)$, $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$ (ср. примечание 3).

Примечание 5. Для $\tau\neq-\pi/2,\pi/2$ каждое из соотношений (46) является асимптотическим в случае $H_1 = T^{\Delta}\psi$.

Доказательство. Из (42) следует, что

$$\sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H_1}(-1)^\nu Z[t_\nu(\tau)] = \tag{48}$$

$$=\frac{1}{\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+2\cos\tau\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H_1}\cos\{t_\nu(\tau)\ln n\}+$$

$$+2\sin\tau\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{T\leqslant t_\nu(\tau)\leqslant T+H_1}\sin\{t_\nu(\tau)\ln n\}+O(\ln T) =$$

$$=\frac{1}{\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+2W_3\cos\tau+2W_4\sin\tau+O(\ln T) =$$

$$=\frac{1}{\pi}H_1\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^{\Delta}\ln T),$$

где для оценок сумм W_3, W_4 использован метод изложенный в работах [2], [4].

6. В силу (37), (46) при $\Delta = 1/6$ ([7], стр. 110), получается

Лемма 3.

$$\begin{aligned}\sum_{T\leqslant t_{2\nu}(\tau)\leqslant T+H}Z[t_{2\nu}(\tau)] &= \frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^{1/6}\psi\ln^5 T),\\ \sum_{T\leqslant t_{2\nu+1}(\tau)\leqslant T+H}Z[t_{2\nu+1}(\tau)] &= -\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}\cdot\cos\tau+O(T^{1/6}\psi\ln^5 T),\end{aligned} \tag{49}$$

для $\tau\in\langle-\pi,\pi\rangle$.

Примечание 6. Соотношения (49) представляют собой обобщение соотношений (27).

Теперь мы завершим

Доказательство теоремы 1. Так как ([12], стр. 100)

$$\vartheta'(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi}+O\left(\frac{1}{t}\right), \tag{50}$$

то из (1) получаем

$$\left(\frac{dt_\nu(\tau)}{d\tau}\right)^{-1} = \ln P_0+O\left(\frac{H}{T}\right) \tag{51}$$

для $t_\nu(\tau)\in\langle T,T+H\rangle$. Отсюда (см. (7), (13), $t = t_{2\nu}(\tau)$)

$$\int_{-x}^{x}Z[t_{2\nu}(\tau)]\,d\tau = \ln P_0\int_{t_{2\nu}(-x)}^{t_{2\nu}(x)}Z(t)\,dt+O(HT^{-5/6}). \tag{52}$$

Далее, (см. (39), (40)),

$$\sum_{T\leqslant t_{2\nu}(\tau)\leqslant T+H} Z[t_{2\nu}(\tau)] = \sum_{T\leqslant t_{2\nu}\leqslant T+H} Z[t_{2\nu}(\tau)]+O(T^{1/6}\ln T). \tag{53}$$

Наконец, интегрируя первое соотношение в (41) (после преобразования (53)), по τ в промежутке $\langle -x, x\rangle$, получаем первое соотношение в (5), и, аналогичным способом — второе.

Литература

[1] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43.
[2] — *Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 31 (1976), стр. 45–51.
[3] — *О поведении функций* $\mathrm{Re}\{\zeta(s)\}$, $\mathrm{Im}\{\zeta(s)\}$ *в критической полосе*, ibid. 34 (1977), стр. 25–35.
[4] — *Добавление к работе: Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 35 (1979), стр. 403–404.
[5] — *О корнях уравнения* $Z'(t) = 0$, ibid. 40 (1981), стр. 79–89.
[6] — *Исправление к работам*: Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43; 31 (1976), стр. 45–51; 35 (1979), стр. 403–404, ibid. 40 (1981), стр. 97–107.
[7] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.
[8] R. Balasubramanian, *An improvement of a theorem of Titchmarsh on mean square of* $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978), стр. 540–576.
[9] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), стр. 119–196.
[10] E. Landau, *Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellen Teil* 1/2, Math. Ann. 76 (1915), стр. 212–243.
[11] C. L. Siegel, *Über Riemann's Nachlass zur analytischen Zahlentheorie*: Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik, Abteilung B: Studien, 2 (1932), стр. 45–80.
[12] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the Zeta-function of Riemann, IV*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 24.1.1980 (1196)

ACTA ARITHMETICA
XLII (1982)

Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von Quadraten

von

FRANZ HALTER-KOCH (Graz)

Die Sätze über die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe von Quadraten gehören zu den schönsten und ältesten Resultaten der elementaren Zahlentheorie (siehe [3]). In der vorliegenden Arbeit untersuche ich die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe von

(a) positiven Quadraten;
(b) verschiedenen Quadraten;
(c) verschiedenen positiven Quadraten.

Einzelresultate zu diesen Themenkreisen sind seit langem bekannt, ich werde aber der Vollständigkeit halber alle Ergebnisse formulieren. Die Beweismethoden sind elementar und auch auf die Darstellung natürlicher Zahlen durch andere quadratische Formen anwendbar; ich werde das an zwei Beispielen demonstrieren. Abschließend diskutiere ich einige asymptotische Resultate im Anschluß an die Ergebnisse von Malyshev, welchen sich die angegebenen expliziten Resultate der Struktur nach unterordnen.

1. Summen von drei Quadraten. Bekanntlich ist eine natürliche Zahl genau dann Summe von drei Quadraten, wenn sie nicht von der Form $4^h u$ mit $u \equiv 7 \bmod 8$ ist. Das Problem der Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von drei positiven Quadraten wurde etwa gleichzeitig von verschiedenen Autoren behandelt ([22], [18], [8], [7], [1]). Ich schließe hier an die Untersuchungen von A. Schinzel [22] an, der auch die Darstellung als Summe von drei verschiedenen Quadraten untersuchte. Sei $r_s(n)$ die Anzahl der $(a_1, \ldots, a_s) \in \mathbf{Z}^s$ mit $(a_1, \ldots, a_s) = 1$ und $n = \sum_{i=1}^{s} a_i^2$; dann gilt:

$$r_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 4|n \text{ oder } p|n \text{ für eine Primzahl } p \equiv 3 \bmod 4, \\ 2^{\mu+2} & \text{sonst;} \end{cases}$$

$$r_3(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \equiv 0, 4, 7 \bmod 8, \\ 3\cdot 2^{\mu+2} h_0(-4n), & \text{falls } n \equiv 1, 2, 5, 6 \bmod 8,\ n \neq 1, \\ 3\cdot 2^{\mu+2} h_0(-n), & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 8,\ n \neq 3; \end{cases}$$