ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

Répartition des suites dans les progressions arithmétiques

par

ETIENNE FOUVRY* (Talence)

I. Présentation des résultats. Dans [2], on expose une technique pour montrer que l'ensemble

$$\{n;\ n \leqslant x,\ p\,|\,n \Rightarrow p > x^{\delta}\}$$

a un niveau de répartition au moins égal à x^{α}, avec $\alpha > 1/2$, pour des valeurs suffisamment petites du paramètre δ. Le but de ce travail est d'étudier d'autres situations où cette méthode s'applique pour, là aussi, dépasser la valeur critique $\alpha = 1/2$ de l'exposant du niveau de répartition.

On utilise les notations suivantes:

Si $\mathscr{C}$ est une suite d'entiers strictement positifs, on désigne par $\mathscr{C}_q$, $\mathscr{C}_q^*$, $\mathscr{C}(x)$ et $\mathscr{C}(x; q, a)$ les sous-suites d'éléments de $\mathscr{C}$ respectivement:

– multiples de q
– premiers avec q
– inférieurs ou égaux à x
– inférieurs ou égaux à x et congrus à a modulo q.

On note aussi (C_1) la condition:

(C_1) pour tout A et tout $(a, q) = 1$, on a

$$|\mathscr{C}(x; q, a)| = \frac{|\mathscr{C}(x)|}{\varphi(q)} + O\left(\frac{|\mathscr{C}(x)|}{(\log x)^{A}}\right).$$

Par exemple, on sait que la suite $\mathscr{P}$ des nombres premiers vérifie (C_1) (théorème de Siegel–Walfisz).

Dans tout ce qui suit, $\mathscr{L}'$, $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{N}'$ désignent trois parties de $\boldsymbol{N}$, a est un élément de $\boldsymbol{Z}$; L, M et N sont trois nombres $\geqslant 2$. On pose alors $\mathscr{L} = \mathscr{L}' \cap]L, 2L]$, $\mathscr{M} = \mathscr{M}' \cap]M, 2M]$ et $\mathscr{N} = \mathscr{N}' \cap]N, 2N]$. On désigne

---

* Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

respectivement par $\mathscr{A} = \mathscr{A}(a, \mathscr{M}, \mathscr{N})$ et $\mathscr{B} = \mathscr{B}(a, \mathscr{L}, \mathscr{M}, \mathscr{N})$

— la suite des nombres $mn - a$ ($m \in \mathscr{M}$, $n \in \mathscr{N}$)

— la suite des nombres $lmn - a$ ($l \in \mathscr{L}$, $m \in \mathscr{M}$, $n \in \mathscr{N}$).

On rappelle, dans le lemme 4, l'estimation classique des sommes de Kloosterman incomplètes, obtenue par les résultats de A. Weil. Mais cette majoration a l'inconvénient de ne pas tenir compte de la longueur de l'intervalle de sommation. C'est pourquoi, C. Hooley a proposé l'hypothèse:

HYPOTHÈSE R* ([4]). *Pour* $0 \leqslant \zeta_2 - \zeta_1 \leqslant |r|$, *on a, pour tout* $\varepsilon > 0$

$$\sum_{\substack{\zeta_1 \leqslant s \leqslant \zeta_2 \\ (s,r)=1}} e\left(\frac{d_1 s + d\bar{s}}{r}\right) \ll (\zeta_2 - \zeta_1 + 1)^{1/2} (d, r)^{1/2} |r|^{\varepsilon}.$$

(Si s et r sont deux entiers premiers entre eux, $\bar{s}$ désigne, dans la fraction $\bar{s}/r$, l'inverse de s modulo r.) On n'utilisera cette hypothèse que dans le cas $d_1 = 0$.

Sous cette hypothèse, on démontre:

THÉORÈME 1. *Sous l'hypothèse* R* *et sous les conditions*

(i) $\mathscr{N}'$ *vérifie* (C_1),

(ii) $1 \leqslant |a| \leqslant MN$,

(iii) $N \leqslant M^{(4/3)-\delta_0}$ $(\delta_0 > 0)$, $\log N \gg \log M$

on a, pour tout A *et tout* $\eta > 0$:

$$\sum_{\substack{q \leqslant N^{1-\eta} \\ (q,a)=1}} \left| |\mathscr{A}_q| - \frac{|\mathscr{M}_q^*| \, |\mathscr{N}_q^*|}{\varphi(q)} \right| \ll MN (\log MN)^{-A}.$$

On introduit aussi les conditions (C_2) et (C_3) pour la suite $\mathscr{C}$:

(C_2) Il existe c, tel que, pour x suffisamment grand, on a:

$$|\mathscr{C}(2x)| - |\mathscr{C}(x)| \gg x/(\log x)^c.$$

(C_3) Pour tout $q \geqslant 2$ et pour tout A, on a:

$$|\mathscr{C}_q(x)| \ll x/(\log x)^A.$$

La condition (C_2) indique que $\mathscr{C}$ est assez dense, et (C_3) que $\mathscr{C}$ a peu d'éléments divisibles par 2, par 3... Notons que, pour une suite strictement croissante, (C_1) implique (C_3) et que $\mathscr{P}$ vérifie (C_2).

On déduit du théorème 1, toujours sous l'hypothèse R*, que, si $\mathscr{M}'$ vérifie (C_2) et (C_3) et si $\mathscr{N}'$ vérifie en outre (C_2), la suite $\mathscr{A}$ a pour niveau de répartition $N^{1-\eta}$. En prenant $N = M^{(4/3)-\delta_0}$ (δ_0 très petit), ce niveau de répartition est $(MN)^{(4/7)-2\eta}$ $(4/7 = 0{,}5714\ldots)$.

Il semble difficile, sans avoir recours à l'hypothèse R*, d'obtenir pour $\mathscr{A}$ un niveau de répartition dépassant $(MN)^{1/2}$, à moins de connaître des propriétés particulières de $\mathscr{M}'$ ou de $\mathscr{N}'$. Le théorème 2 envisage le cas où $\mathscr{M}'$ est le produit de deux suites, on énonce ainsi un résultat pour $\mathscr{B}$:

THÉORÈME 2. *En supposant*:

(i) $\mathscr{N}'$ *vérifie* (C_1),

(ii) $1 \leqslant |a| \leqslant LMN$,

(iii) $L^2 N \leqslant M^{2-\delta_0}$, $L^3 N^4 \leqslant M^{4-\delta_0}$ $(\delta_0 > 0)$ *et* $\log N \gg \log M$

on a, pour tout A *et tout* $\eta > 0$:

$$\sum_{\substack{q \leqslant (LN)^{1-\eta} \\ (q,a)=1}} \left| |\mathscr{B}_q| - \frac{|\mathscr{L}_q^*| \, |\mathscr{M}_q^*| \, |\mathscr{N}_q^*|}{\varphi(q)} \right| \ll LMN (\log LMN)^{-A}.$$

De même si $\mathscr{L}'$, $\mathscr{M}'$ et $\mathscr{N}'$ vérifient (C_2) et si $\mathscr{L}'$ et $\mathscr{M}'$ vérifient (C_3), la suite $\mathscr{B}$ a pour niveau de répartition $(LN)^{1-\eta}$. En choisissant

$$L = M^{(4/5)-3\delta_0/5} \quad \text{et} \quad N = M^{(2/5)+\delta_0/5}$$

il vaut au moins $(LMN)^{(6/11)-2\eta}$ $(6/11 = 0{,}5454\ldots)$.

Le théorème 3 traite de la situation particulière où $\mathscr{N}' = \mathscr{P}$. En effet, par l'identité de Vaughan (lemme 6), on transforme une somme sur des nombres premiers, en trois sommes, dont la plus délicate à traiter, S_3, est une forme bilinéaire; on se trouve alors dans une situation analogue à celle du théorème 2.

THÉORÈME 3. *En supposant*:

(i) $\mathscr{N}' = \mathscr{P}$,

(ii) $1 \leqslant |a| \leqslant MN$,

(iii) $N \leqslant M^{(10/9)-\delta_0}$ $(\delta_0 > 0)$, $\log N \gg \log M$

on a, pour tout A *et tout* $\eta > 0$:

$$\sum_{\substack{q \leqslant N^{1-\eta} \\ (q,a)=1}} \left| |\mathscr{A}_q| - \frac{|\mathscr{M}_q^*| \, |\mathscr{N}_q^*|}{\varphi(q)} \right| \ll MN (\log MN)^{-A}.$$

Si $\mathscr{M}'$ vérifie (C_2) et (C_3) et si $N = M^{(10/9)-\delta_0}$, la suite $\mathscr{A}$ a pour niveau de répartition $(MN)^{(10/19)-2\eta}$ $(10/19 = 0{,}5263\ldots)$.

Les conditions (C_2) et (C_3) sont peu contraignantes pour $\mathscr{M}'$. Le travail de G. Greaves ([3]), sur le crible pondéré, aboutit à l'inégalité

$\Lambda_2 > 1{,}936$, qui permet de déduire un certain nombre de corollaires aux théorèmes 2 et 3. Ainsi pour $g > 1$, on pose

$$\mathscr{M} = \{p;\ n^{10/21} < p \leqslant gn^{10/21},\ p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 100)\},$$
$$\mathscr{N} = \{p;\ n^{11/21} < p \leqslant gn^{11/21}\}$$

(la lettre p désigne toujours un nombre premier).

D'après le théorème 3, la suite des $2n - p_1 p_2$ ($p_1 \in \mathscr{M}$, $p_2 \in \mathscr{N}$) a un niveau de répartition au moins égal à $n^{(11/21)-\eta}$. Puisque $(11/21)\Lambda_2 > 1$, cette suite contient un P_2, pour n suffisamment grand. Puis en faisant tendre g vers 1, on a le corollaire:

COROLLAIRE 1. *Pour n suffisamment grand, l'équation $2n = p_1p_2 + P_2$, avec les conditions $p_1 \sim n^{10/21}$, $p_2 \sim n^{11/21}$ et $p_1 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 100)$ est résoluble.*

On peut évidemment remplacer le couple $(10/21,\ 11/21)$ par $(\lambda, 1-\lambda)$ (pourvu que $1-\lambda < (10/9)\lambda$ et $(1-\lambda)\Lambda_2 > 1$) et l'entier 100, par tout entier D vérifiant $D \leqslant (\log n)^B$ (B fixé).

Ce corollaire ne peut pas être obtenu par les méthodes usuelles du crible, ou même par la méthode de Chen pour le problème de Goldbach ([1]). En effet, cette méthode appliquée ici, consisterait d'abord à minorer le cardinal de

$$\mathscr{D} = \{2n - p_1p_2;\ p_1 \in \mathscr{M},\ p_2 \in \mathscr{N},\ 2n - p_1p_2 = P_3\}$$

puis à majorer le cardinal de

$$\mathscr{D}' = \{2n - p_1'p_2'p_3';\ 2n - p_1'p_2'p_3' = p_1p_2,\ p_1 \in \mathscr{M},\ p_2 \in \mathscr{N},\ p_1', p_2' \text{ et } p_3' \text{ vérifiant certaines autres conditions}\}$$

mais le crible ne fait que majorer le cardinal de

$$\mathscr{D}'' = \Big\{2n - p_1'p_2'p_3';\ \Big(2n - p_1'p_2'p_3',\ \prod_{p \leqslant n^{10/21}} p\Big) = 1\Big\}$$

puisque le crible ne permet pas de déceler les ordres de grandeur, ni les classes de congruence des facteurs premiers des nombres non criblés. Il apparaît que $|\mathscr{D}''|$ est beaucoup plus grand que $|\mathscr{D}'|$ et dépasse largement $|\mathscr{D}|$, d'où l'impossibilité de prouver ce corollaire par les méthodes classiques.

De même, on a:

COROLLAIRE 2. *Pour n suffisamment grand, l'équation $2n = p_1p_2 + P_2$, avec les conditions: $p_1 \sim n^{10/21}$, $p_2 \sim n^{11/21}$ et $p_1 + 2 = P_2'$ est résoluble.*

Ici, on prend $\mathscr{M}' = \{p;\ p+2 = P_2\}$, et le théorème de Chen ([1]) montre que $\mathscr{M}'$ vérifie la condition (C_2).

Citons comme corollaire au théorème 2:

COROLLAIRE 3. *Pour n suffisamment grand, l'équation $2n = p_1p_2p_3 + P_2$, avec les conditions $p_1 \sim n^{1/3}$, $p_2 \sim n^{7/15}$ et $p_3 \sim n^{1/5}$ est résoluble.*

En effet, la suite des $2n - p_1p_2p_3$ où $n^{1/3} < p_1 \leqslant gn^{1/3}$, $n^{7/15} < p_2 \leqslant gn^{7/15}$ et $n^{1/5} < p_3 \leqslant gn^{1/5}$ ($g > 1$) a un niveau de distribution $\geqslant n^{(8/15)-\eta}$. Pour ce corollaire, l'inégalité de M. Laborde ([5]): $\Lambda_2 > 70/37$ est suffisante.

L'auteur tient à remercier vivement H. Iwaniec de ses conseils et de ses suggestions pour la réalisation de ce travail.

II. Lemmes. Pour x réel, $[x]$ désigne la partie entière de x et $\|x\|$ est la distance de x à l'entier le plus proche. On montre facilement le lemme suivant:

LEMME 1. *Soit $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$. Pour tout $H > 0$, on a:*

$$\psi(x) = -\sum_{0 < |h| \leqslant H} \frac{e(hx)}{2\pi i h} + O\big(\min(1, H^{-1}\|x\|^{-1})\big).$$

Les deux lemmes suivants sont les lemmes 3 et 6 de [2]:

LEMME 2. *En désignant par $\tau(q)$ le nombre de diviseurs de l'entier q, on a:*

$$\sum_{\substack{n \leqslant X \\ (n,q)=1}} 1 = \frac{\varphi(q)}{q} X + O\big(\tau(q)\big).$$

LEMME 3 (formule de réciprocité). *Si r et s sont deux entiers premiers entre eux, on a:*

$$\frac{1}{rs} = \frac{\bar r}{s} + \frac{\bar s}{r} \ (\mathrm{mod}\ 1).$$

On rappelle des majorations classiques des sommes de Kloosterman:

LEMME 4. *Pour $0 < A_2 - A_1 \leqslant |r|$, on a:*

$$\sum_{\substack{A_1 < s \leqslant A_2 \\ (s,rt)=1 \\ s \equiv \lambda\ (\mathrm{mod}\ \Lambda)}} e\Big(d\,\frac{\bar s}{r}\Big) \ll (d, r)^{1/2} |r|^{1/2} \tau(rt) \log 2|r|$$

et

$$\sum_{\substack{0 \leqslant A_1 < s \leqslant A_2 \\ (s,rt)=1 \\ s \equiv \lambda\ (\mathrm{mod}\ \Lambda)}} \frac{s}{\varphi(s)} e\Big(d\,\frac{\bar s}{r}\Big) \ll (d, r)^{1/2} |r|^{1/2} \tau(rt) \log(2|r|) \log(A_2 + 1).$$

La première partie de ce lemme est le lemme 5 de [2]. On déduit la seconde partie de la première en écrivant:

$$\frac{s}{\varphi(s)} = \sum_{\nu \mid s^\infty} \nu^{-1}$$

ce qui conduit à

$$\Bigg|\sum_{\substack{0\leqslant \Delta_1 < s \leqslant \Delta_2\\ (s,rt)=1\\ s\equiv\lambda \,(\mathrm{mod}\, \Delta)}} \frac{s}{\varphi(s)} e\left(d\,\frac{\bar{s}}{r}\right)\Bigg| \leqslant \sum_{\substack{\nu\\ p\mid\nu\Rightarrow p\leqslant \Delta_2}} \nu^{-1} \Bigg|\sum_{\substack{0\leqslant \Delta_1 < s \leqslant \Delta_2\\ (s,rt)=1;\, p\mid\nu\Rightarrow p\mid s\\ s\equiv\lambda \,(\mathrm{mod}\, \Delta)}} e\left(d\,\frac{\bar{s}}{r}\right)\Bigg|.$$

Le lemme 5 est une forme équivalente de l'hypothèse R* énoncée auparavant:

Lemme 5. *Avec l'hypothèse* R* *et en supposant* $(\Delta, r) = 1$ *et* $0 \leqslant \zeta_2 - \zeta_1 < \Delta|r|$ *on a, pour tout* $\varepsilon > 0$:

$$\sum_{\substack{\zeta_1\leqslant s\leqslant \zeta_2\\ (s,r)=1\\ s\equiv\lambda \,(\mathrm{mod}\, \Delta)}} e\left(d\,\frac{\bar{s}}{r}\right) \ll \left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\Delta}+1\right)^{1/2} (d, r)^{1/2}|r|^{\varepsilon}.$$

D'après le théorème chinois, on écrit s sous la forme

$$s = a\Delta + \beta r \quad \text{où} \quad \beta \equiv \lambda\bar{r} \,(\mathrm{mod}\, \Delta).$$

En fixant la valeur de β, la somme sur s devient une somme sur a:

$$\sum_{\substack{\zeta_1\leqslant s\leqslant \zeta_2\\ (s,r)=1\\ s\equiv\lambda \,(\mathrm{mod}\, \Delta)}} e\left(d\,\frac{\bar{s}}{r}\right) = \sum_{\substack{\frac{\zeta_1-\beta r}{\Delta}\leqslant a\leqslant \frac{\zeta_2-\beta r}{\Delta}\\ (a,r)=1}} e\left(d\,\frac{\bar{\Delta}\bar{a}}{r}\right) \ll \left(\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\Delta}+1\right)^{1/2} (d, r)^{1/2}|r|^{\varepsilon}$$

d'après l'hypothèse R*.

On utilisera le lemme 6 pour le théorème 3:

Lemme 6 (Identité de Vaughan [6]). *Soit* $f(n)$ *une fonction nulle presque partout, et soient* u *et* v *deux nombres* $\geqslant 1$. *On a*:

$$\sum_{n>v} \Lambda(n) f(n) = S_1 - S_2 - S_3$$

où

$$S_1 = \sum_{d\leqslant u} \mu(d) \sum_m \log m f(dm), \qquad S_2 = \sum_{k\leqslant u} \mu(k) \sum_{m\leqslant v} \Lambda(m) \sum_l f(klm)$$

et

$$S_3 = \sum_{m>u} \Delta_m \sum_{n>v} \Lambda(n) f(mn) \qquad \Big(\text{où } \Delta_m = \sum_{\substack{d\mid m\\ d\leqslant u}} \mu(d)\Big).$$

III. Premières transformations. Afin de présenter un début de démonstration commun aux trois théorèmes, on introduit les notations suivantes:

— pour les théorèmes 1 et 3, on pose $X = MN$, $\varkappa = 1$ et γ désigne la fonction caractéristique de $\mathscr{N}$

— pour le théorème 2, on pose $X = LMN$, $\varkappa = 2$ et γ est défini par:

$$\gamma(k) = \sum_{\substack{l\in\mathscr{L}\\ n\in\mathscr{N}\\ ln=k}} 1.$$

Pour obtenir chacun de ces théorèmes, il suffit de démontrer que

$$E(Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}} \Bigg|\sum_{k\equiv a\bar{m}\,(\mathrm{mod}\, q)} \gamma(k) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(k,q)=1} \gamma(k)\Bigg|$$

vérifie:

(1) Pour tout $Q \leqslant (XM^{-1})^{1-\eta}$, on a $E(Q) \ll X(\log X)^{-A-1}$.

L'inégalité de Cauchy–Schwarz implique

(2) $$E^2(Q) \leqslant MQD(Q)$$

où, par définition

$$D(Q) = W(Q) - 2V(Q) + U(Q)$$

avec

(3) $$U(Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}} \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(k,q)=1} \gamma(k)\right)^2,$$

(4) $$V(Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}} \Bigg(\sum_{k_1\equiv a\bar{m}\,(\mathrm{mod}\, q)} \gamma(k_1)\Bigg) \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(k_2,q)=1} \gamma(k_2)\right)$$

et

(5) $$W(Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}} \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}} \Bigg(\sum_{k\equiv a\bar{m}\,(\mathrm{mod}\, q)} \gamma(k)\Bigg)^2.$$

IV. Evaluation de $U(Q)$. D'après (3), on a:

$$U(Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}} \left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(k,q)=1} \gamma(k)\right)^2 \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ (m,q)=1}} 1$$

ce qui devient, à l'aide du lemme 2,

(6) $$U(Q) = MA(Q) + O(M^{-2}Q^{-1}X^2\log X)$$

avec

$$A(Q)=\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}}\frac{1}{q\varphi(q)}\Big(\sum_{(k,q)=1}\gamma(k)\Big)^2.$$

V. Evaluation de $V(Q)$. On notera par ε, un réel strictement positif, suffisamment petit. En échangeant les sommations dans (4), on a:

$$V(Q)=\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}}\Big(\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(k_2,q)=1}\gamma(k_2)\Big)\Big(\sum_{(k_1,q)=1}\gamma(k_1)\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ m\equiv a\bar{k}_1\,(\mathrm{mod}\,q)}}1\Big).$$

Mais

$$\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ m\equiv a\bar{k}_1\,(\mathrm{mod}\,q)}}1=\frac{M}{q}+\psi\Big(\frac{M-a\bar{k}_1}{q}\Big)-\psi\Big(\frac{2M-a\bar{k}_1}{q}\Big)\tag{7}$$

ce qui conduit à

$$V(Q)=MA(Q)+V_1(M,Q)-V_1(2M,Q)\tag{8}$$

où, par définition, on pose pour $Y=M$ ou $2M$:

$$V_1(Y,Q)=\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}}\frac{1}{\varphi(q)}\Big(\sum_{(k_2,q)=1}\gamma(k_2)\Big)\Big(\sum_{(k_1,q)=1}\gamma(k_1)\psi\Big(\frac{Y-a\bar{k}_1}{q}\Big)\Big).$$

(a) *Transformation de* $V_1(Y,Q)$. Avec le lemme 1, on développe la fonction ψ en série de Fourier, ainsi on a

$$V_1(Y,Q)=V'(H,Y,Q)+V''(H,Y,Q)\tag{9}$$

où

$$V'(H,Y,Q)=-\sum_{0<|h|\leqslant H}\frac{1}{2\pi ih}\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}}\frac{1}{\varphi(q)}\Big(\sum_{(k_2,q)=1}\gamma(k_2)\Big)\Big(\sum_{(k_1,q)=1}\gamma(k_1)e\Big(h\,\frac{Y-a\bar{k}_1}{q}\Big)\Big)$$

et

$$V''(H,Y,Q)\ll\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}}\frac{1}{\varphi(q)}\Big(\sum_{(k_2,q)=1}\gamma(k_2)\Big)\Big(\sum_{(k_1,q)=1}\gamma(k_1)\min\Big(1,H^{-1}\Big\|\frac{Y-a\bar{k}_1}{q}\Big\|^{-1}\Big)\Big).$$

Puisque $\gamma(k)$ vérifie: $\gamma(k)\ll X^{\varepsilon}$, on a:

$$V''(H,Y,Q)\ll M^{-1}X^{1+\varepsilon}\sum_{Q<q\leqslant 2Q}\frac{1}{\varphi(q)}\Big(\frac{X}{qM}+1\Big)\sum_{k\,(\mathrm{mod}\,q)}\min\Big(1,H^{-1}\Big\|\frac{Y-k}{q}\Big\|^{-1}\Big)$$

ce qui donne

$$V''(H,Y,Q)\ll M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon}\tag{10}$$

en choisissant

$$H=M^{-1}QX^{3\varepsilon}.$$

(b) *Majoration de* $V'(H,Y,Q)$. Le paramètre H ayant la valeur fixée précédemment, on écrit:

$$V'(H,Y,Q)\ll X^{2\varepsilon}\sum_{0<|h|\leqslant H}h^{-1}\sum_{XM^{-1}<k_1,k_2\leqslant 2XM^{-1}}\Big|\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,ak_1k_2)=1}}\frac{1}{\varphi(q)}e\Big(h\,\frac{Y-a\bar{k}_2}{q}\Big)\Big|.$$

En appliquant le lemme 3, on a:

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,ak_1k_2)=1}}\frac{1}{\varphi(q)}e\Big(h\,\frac{Y-a\bar{k}_2}{q}\Big)=\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,ak_1k_2)=1}}\Big(\frac{1}{q}e\Big(h\,\frac{Y-ak_2^{-1}}{q}\Big)\Big)\Big(\frac{q}{\varphi(q)}e\Big(ah\,\frac{\bar{q}}{k_2}\Big)\Big).$$

Pour utiliser la deuxième partie du lemme 4, on intègre par parties, en tenant compte de l'inégalité: $ak_2^{-1}\ll M$, fournie par les conditions (ii), ainsi on obtient:

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,ak_1k_2)=1}}\frac{1}{\varphi(q)}e\Big(h\,\frac{Y-a\bar{k}_2}{q}\Big)\ll\Big(1+\frac{|h|M}{Q}\Big)Q^{-1}(ah,k_2)^{1/2}k_2^{1/2}X^{\varepsilon}$$

ce qui amène à:

$$V'(H,Y,Q)\ll M^{-5/2}Q^{-1}X^{(5/2)+7\varepsilon}.\tag{11}$$

En regroupant (8), (9), (10) et (11), on a:

$$V(Q)=MA(Q)+O(M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon}+M^{-5/2}Q^{-1}X^{(5/2)+7\varepsilon}).\tag{12}$$

VI. Transformation de $W(Q)$. Le terme $W(Q)$ est le plus difficile à évaluer. Comme $V(Q)$, il sera exprimé comme somme d'un terme principal et d'un terme d'erreur (relation (15)). On peut écrire la relation (5) sous la forme

$$W(Q)=\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}}\sum_{\substack{k_1\equiv k_2\,(\mathrm{mod}\,q)\\(k_1k_2,q)=1}}\gamma(k_1)\gamma(k_2)\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ m\equiv a\bar{k}_1\,(\mathrm{mod}\,q)}}1.$$

Afin de mieux connaître les diviseurs de k_1 et k_2, on décompose ces entiers. On somme d'abord sur $d = (k_1, k_2)$, et on remarque que la contribution des termes d ($d > X^\varepsilon$) est petite, puisque

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \sum_{\substack{d>X^\varepsilon\\(d,q)=1}} \sum_{\substack{k_1'\equiv k_2' \,(\mathrm{mod}\, q)\\(k_1',k_2')=(k_1'k_2',q)=1}} \gamma(dk_1')\gamma(dk_2') \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ m\equiv a\overline{dk_1'}\,(\mathrm{mod}\, q)}} 1$$

$$\ll X^{\varepsilon/4} \sum_{m\leqslant 2M} \sum_{d>X^\varepsilon} \sum_{k_1'\leqslant 2\varkappa d^{-1}M^{-1}X} \sum_{\substack{q\leqslant 2Q\\ q\mid dk_1'm-a}} \sum_{\substack{k_2'\leqslant 2\varkappa d^{-1}M^{-1}X\\ k_2'\equiv k_1'\,(\mathrm{mod}\, q)}} 1$$

$$\ll X^{\varepsilon/4} \sum_{m\leqslant 2M} \sum_{d>X^\varepsilon} \sum_{\substack{k_1'\leqslant 2\varkappa d^{-1}M^{-1}X\\ k_1'md\neq a}} \tau(dk_1'm-a)(d^{-1}M^{-1}Q^{-1}X+1)+$$

$$+QX^\varepsilon(M^{-1}Q^{-1}X^{1-\varepsilon}+1)$$

$$\ll M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon/2}+X^{1+\varepsilon/2}.$$

Ainsi on a

$$(13)\qquad W(Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \sum_{\substack{d\leqslant X^\varepsilon\\(d,q)=1}} \sum_{\substack{k_1'\equiv k_2' \,(\mathrm{mod}\, q)\\(k_1',k_2')=(k_1'k_2',q)=1}} \gamma(dk_1')\gamma(dk_2') \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ m\equiv a\overline{dk_1'}\,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 +$$

$$+O(M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon/2}+X^{1+\varepsilon/2}).$$

On décompose maintenant k_1' en: $k_1' = d_1k_1''$ avec $d_1 \mid d^\infty$ et $(k_1'', d) = 1$.

On somme alors sur d_1 et on remarque que la contribution des d_1 ($d_1 > X^\varepsilon$) est petite puisque:

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \sum_{\substack{d\leqslant X^\varepsilon\\(d,q)=1}} \sum_{\substack{d_1\mid d^\infty\\ d_1>X^\varepsilon}} \sum_{\substack{d_1k_1''\equiv k_2' \,(\mathrm{mod}\, q)\\(k_1'',dk_2')=(k_1''k_2',d_1q)=1}} \gamma(dd_1k_1'')\gamma(dk_2') \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ m\equiv a\overline{dd_1k_1''}\,(\mathrm{mod}\, q)}} 1$$

$$\ll X^{\varepsilon/4} \sum_{m\leqslant 2M} \sum_{d\leqslant X^\varepsilon} \sum_{\substack{d_1\mid d^\infty\\ d_1>X^\varepsilon}} \sum_{k_1''\leqslant 2\varkappa d^{-1}d_1^{-1}M^{-1}X} \sum_{\substack{q\leqslant 2Q\\ q\mid dd_1k_1''m-a}} \sum_{\substack{k_2'\leqslant 2\varkappa d^{-1}M^{-1}X\\ k_2'\equiv d_1k_1''\,(\mathrm{mod}\, q)}} 1$$

$$\ll X^{\varepsilon/4} \sum_{m\leqslant 2M} \sum_{d\leqslant X^\varepsilon} \sum_{\substack{d_1\mid d^\infty\\ d_1>X^\varepsilon}} \sum_{\substack{k_1''\leqslant 2\varkappa d^{-1}d_1^{-1}M^{-1}X\\ k_1''dd_1m\neq a}} \tau(dd_1k_1''m-a)\times$$

$$\times(d^{-1}M^{-1}Q^{-1}X+1)+M^{-1}X^{1+\varepsilon/2}$$

$$\ll M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon/2}+X^{1+\varepsilon/2}.$$

La relation (13) devient donc, avec un changement de notations:

$$(14)\qquad W(Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \sum_{\substack{d\leqslant X^\varepsilon\\(d,q)=1}} \sum_{\substack{d_1\mid d^\infty\\ d_1\leqslant X^\varepsilon}} \sum_{\substack{d_1k_1'\equiv k_2 \,(\mathrm{mod}\, q)\\(k_1',dk_2)=(k_1'k_2,d_1q)=1}} \gamma(dd_1k_1')\gamma(dk_2)\times$$

$$\times \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ m\equiv a\overline{dd_1k_1'}\,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 + O(M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon/2}+X^{1+\varepsilon/2}).$$

On applique la formule (7) à la somme sur m, dans la relation précédente. A la contribution du terme principal M/q, on ajoute le terme

$$\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \sum_{\substack{(d,q)=1\\ d \text{ ou } d_1>X^\varepsilon}} \sum_{d_1\mid d^\infty} \sum_{\substack{d_1k_1'\equiv k_2 \,(\mathrm{mod}\, q)\\(k_1',dk_2)=(k_1'k_2,d_1q)=1}} \gamma(dd_1k_1')\gamma(dk_2)\frac{M}{q}$$

au prix d'une erreur

$$\ll M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon/2}+X^{1+\varepsilon/2}$$

(démonstration semblable faite précédemment).

Ainsi, on a:

$$(15)\quad W(Q) = MB(Q)+W_1(M,Q)-W_1(2M,Q)+O(M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon/2}+X^{1+\varepsilon/2})$$

où, par définition, on pose

$$B(Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \frac{1}{q} \sum_{\substack{k_1\equiv k_2 \,(\mathrm{mod}\, q)\\(k_1k_2,q)=1}} \gamma(k_1)\gamma(k_2) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \frac{1}{q} \sum_{\substack{\lambda\,(\mathrm{mod}\, q)\\(\lambda,q)=1}} \Big(\sum_{k\equiv\lambda\,(\mathrm{mod}\, q)} \gamma(k)\Big)^2$$

et pour $Y = M$ ou $2M$

$$W_1(Y,Q) = \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \sum_{\substack{d\leqslant X^\varepsilon\\(d,q)=1}} \sum_{\substack{d_1\mid d^\infty\\ d_1\leqslant X^\varepsilon}} \sum_{\substack{d_1k_1'\equiv k_2 \,(\mathrm{mod}\, q)\\(k_1',dk_2)=(k_1'k_2,d_1q)=1}} \gamma(dd_1k_1')\gamma(dk_2)\,\psi\Big(\frac{Y-a\overline{dd_1k_1'}}{q}\Big).$$

(a) *Développement en série de Fourier*. Comme on l'a fait pour étudier $V_1(Y, Q)$, on écrit:

$$(16)\qquad W_1(Y,Q) = W_1'(H,Y,Q)+W_1''(H,Y,Q)$$

avec

$$(17)\qquad W_1'(H,Y,Q)$$

$$= -\sum_{0<|h|\leqslant H} \frac{1}{2\pi ih} \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\(q,a)=1}} \sum_{\substack{d\leqslant X^\varepsilon\\(d,q)=1}} \sum_{\substack{d_1\mid d^\infty\\ d_1\leqslant X^\varepsilon}} \sum_{\substack{d_1k_1'\equiv k_2 \,(\mathrm{mod}\, q)\\(k_1',dk_2)=(k_1'k_2,d_1q)=1}} \gamma(dd_1k_1')\times$$

$$\times\ \gamma(dk_2)\,e\Big(h\,\frac{Y-a\overline{dd_1k_1'}}{q}\Big)$$

et

$$W_1''(H,Y,Q) \ll \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}} \sum_{\substack{d\leqslant X^\varepsilon\\ (d,q)=1}} \sum_{\substack{d_1|d^\infty\\ d_1\leqslant X^\varepsilon}} \sum_{\substack{d_1k_1'\equiv k_2 \,(\mathrm{mod}\, q)\\ (k_1',dk_2)=(k_1'k_2,d_1q)=1}} \gamma(dd_1k_1')\gamma(dk_2)\times$$
$$\times \min\left(1, H^{-1}\left\|\frac{Y-a\overline{dd_1k_1'}}{q}\right\|^{-1}\right).$$

Pour estimer $W_1''(H,Y,Q)$, on écrit

$$W_1''(H,Y,Q) \ll X^{\varepsilon/4} \sum_{Q<q\leqslant 2Q} \sum_{d\leqslant X^\varepsilon} \sum_{d_1\leqslant X^\varepsilon} \frac{X}{dqM}\left(\frac{X}{dd_1qM}+1\right)\times$$
$$\times \sum_{\lambda\,(\mathrm{mod}\, q)} \min\left(1, H^{-1}\left\|\frac{Y-\lambda}{q}\right\|^{-1}\right)$$

ce qui donne

$$W_1''(H,Y,Q) \ll M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon/2} \tag{18}$$

pour $H = M^{-1}QX^\varepsilon$.

(b) *Etude de* $W_1'(H,Y,Q)$. Les ordres de grandeur respectifs de k_1', k_2 et q, rendent la condition $d_1k_1' \equiv k_2 \,(\mathrm{mod}\, q)$ très contraignante pour les variables k_1' et k_2, on écrit cette condition sous la forme $d_1k_1'-k_2 = qr$, et, au lieu de sommer sur q, tel que:

$$q\,|\,d_1k_1'-k_2,\quad (q,ad)=1 \quad \text{et} \quad Q<q\leqslant 2Q$$

on somme sur r, tel que

$$(d_1k_1'-k_2, adr) = r,\quad 1\leqslant |r| < (2\varkappa-1)d^{-1}M^{-1}Q^{-1} \quad \text{et}$$
$$Q < \frac{d_1k_1'-k_2}{r} \leqslant 2Q.$$

Par le lemme 3, on a

$$\frac{Y-a\overline{dd_1k_1'}}{q} = \frac{Y-a/dd_1k_1'}{q} + a\frac{\overline{q}}{dd_1k_1'}$$
$$= \frac{r}{d_1k_1'-k_2}\left(Y-\frac{a}{dd_1k_1'}\right) + a\,\frac{\overline{(d_1k_1'-k_2)/r}}{dd_1k_1'} \;(\mathrm{mod}\, 1).$$

Mais

$$\left(\frac{d_1k_1'-k_2}{r}, d\right) = \left(\frac{d_1k_1'-k_2}{r}, dd_1\right) = 1,$$

aussi somme-t-on sur les classes $\alpha\,(\mathrm{mod}\, dd_1)$, avec $(\alpha, dd_1) = 1$. Avec ces remarques, on décompose la formule (17) en:

$$W_1'(H,Y,Q) \ll \sum_{0<|h|\leqslant H} h^{-1} \sum_{d\leqslant X^\varepsilon} \sum_{\substack{d_1|d^\infty\\ d_1\leqslant X^\varepsilon}} \sum_{1\leqslant r<\frac{(2\varkappa-1)X}{dMQ}} \sum_{\substack{\alpha\,(\mathrm{mod}\, dd_1)\\ (\alpha,dd_1)=1}} |W_2| \tag{19}$$

où

$$W_2 = W_2(Y,Q,h,d,d_1,r,\alpha)$$
$$= \sum_{(k_2,d_1)=1} \gamma(dk_2) \sum_{k_1'\in E_1} \gamma(dd_1k_1')\, e\left(\frac{hr}{d_1k_1'-k_2}\left(Y-\frac{a}{dd_1k_1'}\right)\right) e\left(ah\,\frac{\overline{(d_1k_1'-k_2)/r}}{dd_1k_1'}\right)$$

avec

$$E_1 = \{k_1';\ (d_1k_1'-k_2, adr) = r,\ (k_1', dk_2) = 1,\ rQ < d_1k_1'-k_2 \leqslant 2rQ,$$
$$d_1k_1'-k_2 \equiv \alpha r \,(\mathrm{mod}\, dd_1r)\}.$$

(c) *Transformation de* W_2. Dans la définition de W_2, le terme $f(k_1', k_2)$, où on a posé:

$$f(x,y) = e\left(\frac{hr}{d_1x-y}\left(Y-\frac{a}{dd_1x}\right)\right)$$

oscille lentement; on l'élimine par une intégration par parties. On définit, pour k_1' et k_2 entiers > 0:

$$g(k_1', k_2) = \gamma(dk_2)\gamma(dd_1k_1')\, e\left(ah\,\frac{\overline{(d_1k_1'-k_2)/r}}{dd_1k_1'}\right)$$

si les conditions

$$(k_2, d_1) = (k_1', dk_2) = 1,\quad (d_1k_1'-k_2, adr) = r,$$
$$d_1k_1'-k_2 \equiv \alpha r \,(\mathrm{mod}\, dd_1r)$$

sont satisfaites, et

$$g(k_1', k_2) = 0$$

dans le cas contraire.

Avec ces notations, on a:

$$W_2 = \sum_{k_2}\sum_{\substack{k_1'\\ rQ<d_1k_1'-k_2\leqslant 2rQ}} f(k_1',k_2)g(k_1',k_2)$$
$$= \sum_{k_2} \int_{(k_2+rQ)/d_1}^{(k_2+2rQ)/d_1} f(\xi,k_2)\,d\xi \Big(\sum_{k_1'\leqslant\xi} g(k_1',k_2)\Big)$$
$$= \int_{X/dd_1M}^{(2\varkappa X)/dd_1M} \sum_{d_1\xi-2rQ\leqslant k_2<d_1\xi-Qr} \left(\frac{\partial}{\partial\xi} f(\xi,k_2)\right) \sum_{k_1'\leqslant\xi} g(k_1',k_2)\,d\xi +$$

$$+O\Big(\sum_{k_2}\Big|\sum_{\substack{k_1'\\ rQ<d_1k_1'-k_2\leqslant 2rQ}} g(k_1',k_2)\Big|\Big)$$

$$\ll \Big(1+\frac{X}{dd_1M}\sup_{\substack{\xi,k_2\\ \frac{X}{dd_1M}<\xi\leqslant\frac{2\times X}{dd_1M}\\ rQ<d_1\xi-k_2\leqslant 2rQ}}\Big|\frac{d}{d\xi}f(\xi,k_2)\Big|\Big)\sup_{z}\Big(\sum_{k_2}\Big|\sum_{k_1'\leqslant z} g(k_1',k_2)\Big|\Big)$$

soit encore:

$$W_2\ll\Big(1+\frac{|h|X}{drQ^2}\Big)\sup_z|W_3| \tag{20}$$

avec

$$W_3=W_3(Y,Q,h,d_1,r,a,z)$$

$$=\sum_{(k_2,d_1)=1}\gamma(dk_2)\Big|\sum_{\substack{k_1'\in E_1'\\ k_1'\leqslant z}}\gamma(dd_1k_1')e\Big(ah\frac{\overline{(d_1k_1'-k_2)/r}}{dd_1k_1'}\Big)\Big|$$

où

$$E_1'=\{k_1';\ (d_1k_1'-k_2,adr)=r,\ (k_1',dk_2)=1,\ d_1k_1'-k_2\equiv ar\ (\mathrm{mod}\ dd_1r)\}.$$

Le point délicat de la démonstration est la majoration de W_3. Notons que sa majoration triviale est:

$$W_3\ll r^{-1}M^{-2}X^{2+\varepsilon}$$

qui conduit, grâce à (16), (18), (19) et (20) à

$$W_1(Y,Q)\ll M^{-2}X^{2+10\varepsilon}+M^{-1}Q^{-1}X^{2-\varepsilon/2}$$

dont la contribution à $E^2(Q)$ est, d'après (2)

$$\ll M^{-1}QX^{2+10\varepsilon}+X^{2-\varepsilon/2}.$$

Si la relation (1) est vérifiée, on a $Q\leqslant MX^{-10\varepsilon}$ mais on verra, au § X, que Q satisfait $Q\leqslant(XM^{-1})^{1-\varepsilon}$, ces deux conditions prouvent qu'il s'en faut de peu qu'on puisse prendre $Q=X^\delta$ ($\delta>1/2$), pour certains choix de M. Il suffit donc de gagner une puissance positive de X sur la majoration triviale de W_3, pour réussir à dépasser la valeur $\delta=1/2$.

VII. Majoration de W_3 (théorème 1). On revient aux notations propres au théorème 1, ainsi:

$$W_3\leqslant\sum_{\substack{N/d<k_2\leqslant 2N/d\\ (k_2,d_1)=1}}\Big|\sum_{k_1'\in E_2}e\Big(ah\frac{\overline{(d_1k_1'-k_2)/r}}{dd_1k_1'}\Big)\Big|$$

où

$$E_2=\{k_1';\ dd_1k_1'\in\mathcal{N},\ (d_1k_1'-k_2,adr)=r,\ (k_1',dk_2)=1,$$
$$d_1k_1'-k_2\equiv ar\ (\mathrm{mod}\ dd_1r),\ k_1'\leqslant z\}.$$

Par le lemme 3, on a:

$$\frac{1}{dd_1k_1'}=\frac{\overline{k_1'}}{dd_1}+\frac{\overline{dd_1}}{k_1'}\ (\mathrm{mod}\ 1)$$

et, puisque $(r,k_1')=1$

$$\frac{\overline{(d_1k_1'-k_2)/r}}{dd_1k_1'}=\frac{\overline{ak_1'}}{dd_1}-r\frac{\overline{dd_1k_2}}{k_1'}\ (\mathrm{mod}\ 1).$$

On reporte cette égalité dans la précédente majoration de W_3, on applique alors l'inégalité de Cauchy–Schwarz:

$$W_3\leqslant d^{-1/2}N^{1/2}\Big\{\sum_{\substack{N/dd_1<l,l'\leqslant 2N/dd_1\\ (ll',d)=1\\ l\equiv l'(\mathrm{mod}\ dr)}}\Big|\sum_{k\in E_3}e\Big(ahr\frac{l'-l}{(l,l')}\frac{\overline{dd_1k}}{[l,l']}\Big)\Big|\Big\}^{1/2}$$

où

$$E_3=\{k;\ N/d<k\leqslant 2N/d,\ k\equiv ld_1-ar\ (\mathrm{mod}\ dd_1r),$$
$$(k-ld_1,adr)=(k-l'd_1,adr)=(k,ll'd_1)=1\}.$$

Lorsque $(l,l')=1$, le dénominateur $[l,l']$ est $\gg N^2X^{-2\varepsilon}$ alors que k parcourt un segment de longueur $\ll N$, ce qui est trop court pour que le lemme 4 soit efficace. On a recours à l'hypothèse R*. Dans l'expression précédente, on écrit:

$$\Big|\sum_{k\in E_3}\Big|\leqslant\sum_{\delta|d_1}\sum_{\delta'|ad}\sum_{\delta''|ad}\Big|\sum_{k\in E_3'}\Big|$$

avec

$$E_3'=\{k;\ N/d<k\leqslant 2N/d,\ k\equiv ld_1-ar\ (\mathrm{mod}\ dd_1r),\ (k,ll')=1,$$
$$k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \delta),\ k\equiv ld_1\ (\mathrm{mod}\ r\delta'),\ k\equiv ld_1\ (\mathrm{mod}\ r\delta'')\}.$$

Si les quatre conditions de congruence de la définition de E_3' sont incompatibles, on a: $\sum_{k\in E_3'}=0$. Sinon, ces conditions s'expriment sous forme d'une seule congruence modulo $\Delta=[dd_1r,\delta,r\delta',r\delta'']=r[dd_1,\delta',\delta'']$. D'après la définition de E_3', on peut supposer que $(ll',\delta'\delta''dr)=1$, ce qui entraîne que Δ et $[l,l']$ sont premiers entre eux, et permet d'appliquer le lemme 5 à $\sum_{k\in E_3'}$. Ainsi on a:

$$W_3 \ll d^{-1/2}N^{1/2}X^{\varepsilon/4}\Bigg\{\sum_{\substack{1\leqslant l<l'\leqslant 2N/dd_1\\ (ll',rd)=1\\ l\equiv l' \,(\mathrm{mod}\ dr)}}\Big(ah\frac{l'-l}{(l,l')},[l,l']\Big)^{1/2}\Big(\frac{N}{d^2d_1r}\Big)^{1/2}+$$

$$+d^{-3}d_1^{-2}r^{-1}N^2\Bigg\}^{1/2}$$

soit encore:

$$(21)\quad W_3 \ll d^{-1}d_1^{-1/4}r^{-1/4}N^{3/4}X^{\varepsilon/4}\Big\{\sum_{\substack{1\leqslant l<l'\leqslant 2N/dd_1\\ (ll',dr)=1\\ l\equiv l' \,(\mathrm{mod}\ dr)}}(ah(l'-l),ll')^{1/2}(l,l')^{-1/2}\Big\}^{1/2}+$$

$$+d^{-2}d_1^{-1}r^{-1/2}N^{3/2}X^{\varepsilon/4}.$$

En sommant sur $\delta=(l,l')$, on a

$$\sum_{\substack{1\leqslant l<l'\leqslant 2N/dd_1\\ (ll',dr)=1\\ l\equiv l' \,(\mathrm{mod}\ dr)}}(ah(l'-l),ll')^{1/2}(l,l')^{-1/2}$$

$$=\sum_{\substack{\delta<2N/dd_1\\ (\delta,dr)=1}}\ \sum_{\substack{1\leqslant\lambda<\lambda'\leqslant 2N/\delta dd_1\\ (\lambda,\lambda')=(\lambda\lambda',dr)=1\\ \lambda\equiv\lambda' \,(\mathrm{mod}\ dr)}}\big(ah(\lambda'-\lambda),\,\delta\lambda\lambda'\big)^{1/2}.$$

Avec l'inégalité:

$$\begin{aligned}\big(ah(\lambda'-\lambda),\,\delta\lambda\lambda'\big)^{1/2} &\leqslant \big(ah(\lambda'-\lambda),\,\delta\lambda\big)^{1/2}\big(ah(\lambda'-\lambda),\,\delta\lambda'\big)^{1/2}\\ &\leqslant \big(ah(\lambda'-\lambda),\,\delta\lambda\big)+\big(ah(\lambda'-\lambda),\,\delta\lambda'\big)\end{aligned}$$

on a:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\leqslant\lambda<\lambda'\leqslant 2N/\delta dd_1\\ (\lambda,\lambda')=(\lambda\lambda',dr)=1\\ \lambda\equiv\lambda' \,(\mathrm{mod}\ dr)}}\big(ah(\lambda'-\lambda),\,\delta\lambda\lambda'\big)^{1/2} &\ll \sum_{\substack{1\leqslant\lambda\neq\lambda'\leqslant 2N/\delta dd_1\\ (\lambda,\lambda')=(\lambda\lambda',dr)=1\\ \lambda\equiv\lambda' \,(\mathrm{mod}\ dr)}}\big(ah(\lambda'-\lambda),\,\delta\lambda\big)\\ &\ll \sum_{1\leqslant\lambda\leqslant 2N/\delta dd_1}(ah,\,\delta\lambda)\sum_{1\leqslant k<2N/\delta d^2d_1r}(k,\,\delta)\\ &\ll \delta^{-2}d^{-3}d_1^{-2}r^{-1}N^2X^{\varepsilon/4}(ah,\,\delta)\,\tau(h).\end{aligned}$$

La relation (21) devient:

$$W_3 \ll d^{-2}d_1^{-1}r^{-1/2}N^{3/2}X^{\varepsilon/4}+d^{-5/2}d_1^{-5/4}r^{-3/4}N^{7/4}X^{\varepsilon}\tau(h).$$

Avec les relations (19), (20) et la valeur de H fixée au paragraphe VI.a, on a:

$$(22)\quad W_1'(H,Y,Q)$$

$$\ll \sum_{0<|h|\leqslant H}\frac{\tau(h)}{h}\sum_{d\leqslant X^{\varepsilon}}\ \sum_{0<r\leqslant N/dQ}\ \sum_{\substack{d_1\leqslant X^{\varepsilon}\\ d_1|d^{\infty}}}\frac{NX^{2\varepsilon}}{drQ}\,(d^{-1}r^{-1/2}N^{3/2}+d^{-3/2}d^{-1/4}r^{-3/4}N^{7/4})$$

$$\ll (N^{5/2}Q^{-1}+N^{11/4}Q^{-1})X^{3\varepsilon} \ll N^{11/4}Q^{-1}X^{3\varepsilon}.$$

Avec les relations (16), (18) et (22), on parvient finalement à

$$(23)\qquad W_1(Y,Q) \ll MN^2Q^{-1}X^{-\varepsilon/2}+N^{11/4}Q^{-1}X^{3\varepsilon}.$$

VIII. Majoration de W_3 (théorème 2). On utilise la nature particulière de la fonction γ, pour écrire

$$W_3 \ll X^{\varepsilon/2}\sum_k\sum_l\Big|\sum_n\Big|$$

et appliquer ensuite l'inégalité de Cauchy–Schwarz. Plus précisément, avec les notations du théorème 2, on a:

$$W_3 \ll X^{\varepsilon/2}\sum_{\substack{LN/d<k\leqslant 4LN/d\\ (k,d_1)=1}}\ \sum_{L<l\leqslant 2L}\Big|\sum_{n\in E_4}e\Big(ah\frac{\overline{(lnd^{-1}-k)/r}}{ln}\Big)\Big|$$

où

$$E_4=\{n;\ n\in\mathcal{N},\ dd_1|ln,\ (ln-dk,\,ad^2r)=dr,\ (ln/dd_1,\,dk)=1,$$

$$ln\leqslant zdd_1,\ ln-dk\equiv adr\ (\mathrm{mod}\ d^2d_1r)\}.$$

La définition de E_4 entraîne que $(ln/dd_1,\,dr)=1$ et que

$$\frac{\overline{(lnd^{-1}-k)/r}}{ln}=\frac{\overline{alnd^{-1}d_1^{-1}}}{dd_1}-r\frac{\overline{dd_1k}}{lnd^{-1}d_1^{-1}}\ (\mathrm{mod}\ 1)$$

ce qui conduit, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, à

$$(24)\qquad W_3 \ll d^{-1/2}LN^{1/2}X^{\varepsilon/2}W_4^{1/2}$$

où, on a posé

$$W_4=\sum_{N<n,n'\leqslant 2N}\ \sum_{l\in E_5}\Big|\sum_{k\in E_6}e\Big(ahr\Big(\frac{\overline{dd_1k}}{lnd^{-1}d_1^{-1}}-\frac{\overline{dd_1k}}{ln'd^{-1}d_1^{-1}}\Big)\Big)\Big|$$

avec

$$E_5=\Big\{l;\ L<l\leqslant 2L,\ dd_1|ln,\ dd_1|ln',\ ln\equiv ln'\,(\mathrm{mod}\ d^2d_1r),$$

$$\Big(\frac{ln}{dd_1},\,dr\Big)=\Big(\frac{ln'}{dd_1},\,dr\Big)=1\Big\}$$

et

$$E_6=\Big\{k;\ \frac{LN}{d}<k\leqslant 4\frac{LN}{d},\ \Big(k,\,d_1\frac{ln}{dd_1}\frac{ln'}{dd_1}\Big)=1,\ k\equiv lnd^{-1}-ar\ (\mathrm{mod}\ dd_1r),$$

$$\Big(\frac{k-lnd^{-1}}{r},\,ad\Big)=\Big(\frac{k-ln'd^{-1}}{r},\,ad\Big)=1\Big\}.$$

On écrit

$$\frac{\overline{dd_1k}}{lnd^{-1}d_1^{-1}}-\frac{\overline{dd_1k}}{ln'd^{-1}d_1^{-1}}=\frac{n'-n}{(n,n')}\,\frac{\overline{dd_1k}}{l[n,n']d^{-1}d_1^{-1}}\ (\mathrm{mod}\,1).$$

Pour $(n,n')=1$, k parcourt un segment de longueur $\gg LNX^{-\varepsilon}$ et le dénominateur $l[n,n']d^{-1}d_1^{-1}$ est $\ll LN^2$. Ici le lemme 4 est intéressant, on gagne un facteur $L^{1/2}$ sur la majoration triviale, ce qui conduit à une estimation non triviale de W_3.

On découpe l'intervalle $\left]\frac{LN}{d},4\frac{LN}{d}\right]$ en $\ll\frac{d_1(n,n')}{N}+1\ll X^\varepsilon$ intervalles de longueur $\leqslant l[n,n']d^{-1}d_1^{-1}$, pour appliquer le lemme 4, on obtient ainsi:

$$W_4\ll X^{2\varepsilon}\sum_{N<n<n'\leqslant 2N}\sum_{l\in E_5}\left(ahr\frac{n'-n}{(n,n')},\,l[n,n']d^{-1}d_1^{-1}\right)^{1/2}(l[n,n']d^{-1}d_1^{-1})^{1/2}+$$
$$+d^{-3}d_1^{-2}r^{-1}L^2N^2X^\varepsilon$$
$$\ll d^{-1/2}d_1^{-1/2}L^{1/2}NX^{2\varepsilon}\sum_{L<l\leqslant 2L}\sum_{(n,n')\in E_7}(ahr(n'-n),\,lnn'd^{-1}d_1^{-1})^{1/2}(n,n')^{-1}+$$
$$+d^{-3}d_1^{-2}r^{-1}L^2N^2X^\varepsilon$$

où:

$$E_7=\{(n,n');\ N<n<n'\leqslant 2N,\ dd_1|ln,\ dd_1|ln',\ ln\equiv ln'\,(\mathrm{mod}\ d^2d_1r),$$
$$(ln/dd_1,dr)=(ln'/dd_1,dr)=1\}.$$

Posons $ln=\nu dd_1$, $ln'=\nu'dd_1$ et $g=l/(l,dd_1)$, ainsi on a

(25) $$W_4\ll d^{-3}d_1^{-2}r^{-1}L^2N^2X^\varepsilon+d^{-1}d_1^{-1}LNX^{2\varepsilon}W_5$$

avec

$$W_5=\sum_{\substack{L<l\leqslant 2L\\(g,dr)=1}}\ \sum_{\substack{LN/dd_1<\nu<\nu'\leqslant 4LN/dd_1\\ g|\nu,\,g|\nu',\,dr|\nu'-\nu\\(\nu\nu',dr)=1}}(ahr(\nu'-\nu),\,\nu\nu')^{1/2}(\nu,\nu')^{-1}$$
$$=\sum_{\substack{L<l\leqslant 2L\\(g,dr)=1}}g^{-1/2}\sum_{\substack{LN/dd_1g<\mu<\mu'\leqslant 4LN/dd_1g\\ dr|\mu'-\mu\\(\mu\mu',dr)=1}}(ah(\mu'-\mu),\,g\mu\mu')^{1/2}(\mu,\mu')^{-1}.$$

On somme sur $\delta=(\mu,\mu')$, ce qui donne:

$$W_5=\sum_{\substack{L<l\leqslant 2L\\(g,dr)=1}}g^{-1/2}\sum_{\substack{\delta<4LN/dd_1g\\(\delta,dr)=1}}\delta^{-1/2}\sum_{\substack{LN/\delta dd_1g<\lambda\leqslant\lambda'\leqslant 4LN/\delta dd_1g\\(\lambda,\lambda')=(\lambda\lambda',dr)=1\\dr|(\lambda'-\lambda)}}(ah(\lambda'-\lambda),\,g\delta\lambda\lambda')^{1/2}.$$

Par la méthode employée au paragraphe VII, on a:

$$\sum_{\lambda,\lambda'}\ll\delta^{-2}d^{-3}d_1^{-2}g^{-2}r^{-1}L^2N^2X^\varepsilon(ah,g\delta)\tau(h)$$

ce qui conduit à la majoration de W_5:

$$W_5\ll d^{-3}d_1^{-2}r^{-1}L^2N^2X^\varepsilon\tau(h)\sum_{\substack{L<l\leqslant 2L\\(g,dr)=1}}(ah,g)g^{-5/2}\sum_{\delta\leqslant 4LN/dd_1g}(ah,\delta)\delta^{-5/2}$$

en revenant à la définition de g:

$$W_5\ll d^{-3}d_1^{-2}r^{-1}L^2N^2X^\varepsilon\tau(h)\sum_{\substack{L<l\leqslant 2L\\(l/(l,dd_1),d)=1}}\left(ah,\frac{l}{(l,dd_1)}\right)(l,dd_1)^{5/2}l^{-5/2}$$
$$\ll d^{-3/2}d_1^{-1/2}r^{-1}L^{1/2}N^2X^{2\varepsilon}\tau^2(h).$$

En reportant cette majoration de W_5 dans (25), on a:

$$W_4\ll d^{-3}d_1^{-2}r^{-1}L^2N^2X^\varepsilon+d^{-5/2}d_1^{-3/2}r^{-1}L^{3/2}N^3X^{4\varepsilon}\tau^2(h),$$

la relation (24) implique:

$$W_3\ll d^{-2}d_1^{-1}r^{-1/2}L^2N^{3/2}X^\varepsilon+d^{-7/4}d_1^{-3/4}r^{-1/2}L^{7/4}N^2X^{3\varepsilon}\tau(h)$$

puis, avec (19) et (20):

$$W_1'(H,Y,Q)\ll\sum_{0<|h|\leqslant H}\frac{\tau(h)}{h}\sum_{d\leqslant X^\varepsilon}\sum_{\substack{d_1\leqslant X^\varepsilon\\d_1|d^\infty}}\sum_{r\leqslant 3LN/dQ}\frac{LNX^\varepsilon}{drQ}(d^{-1}r^{-1/2}L^2N^3X^\varepsilon+$$
$$+d^{-3/4}d_1^{1/4}r^{-1/2}L^{7/4}N^2X^{3\varepsilon})$$
$$\ll L^3N^{5/2}Q^{-1}X^{3\varepsilon}+L^{11/4}N^3Q^{-1}X^{5\varepsilon}.$$

Finalement avec (16) et (18) on obtient

(26) $$W_1(Y,Q)\ll L^2MN^2Q^{-1}X^{-\varepsilon/2}+L^3N^{5/2}Q^{-1}X^{3\varepsilon}+L^{11/4}N^3Q^{-1}X^{5\varepsilon}.$$

IX. Majoration de W_3 (théorème 3). $\mathcal{N}'$ est maintenant la suite des nombres premiers; la seule valeur pour d et d_1, plus petite que X^ε est $d=d_1=1$. La somme W_3 s'écrit alors

$$W_3=\sum_{N<p_2\leqslant 2N}\left|\sum_{\substack{N<p_1\leqslant\min(2N,z)\\(p_1-p_2,ar)=r\\p_1\neq p_2}}e\left(ahr\frac{\overline{p_2}}{p_1}\right)\right|.$$

Au lieu d'étudier W_3, on étudie la somme $W_6=W_6(\nu,z_1)$ définie par:

(27) $$W_6(\nu,z_1)=\sum_{N<p_2\leqslant 2N}\left|\sum_{n_1\in E_8(p_2)}\Lambda(n_1)e\left(ahr\frac{\overline{p_2}}{n_1}\right)\right|$$

où, en posant $z_2=\min(2N,z,z_1)$, on définit $E_8(p_2)$ par

$$E_8(p_2)=\{n_1;\ N<n_1\leqslant z_2,\ n_1\equiv p_2\,(\mathrm{mod}\ \nu r),\ (n_1,p_2)=1\}.$$

En effet, on a la relation:

$$W_3 \ll \sum_{\nu|a} \sup_{z_1} |W_6(\nu, z_1)| + N^{3/2}X^{\varepsilon}. \tag{28}$$

On applique le lemme 6, en prenant $u = v \leqslant N$, on a:

$$\sum_{n_1 \in E_8(p_2)} \Lambda(n_1) e\left(ahr\frac{\overline{p_2}}{n_1}\right) = S_1(p_2) - S_2(p_2) - S_3(p_2)$$

avec

$$S_1(p_2) = \sum_{k \leqslant u} \mu(k) \sum_{\substack{l \\ kl \in E_8(p_2)}} (\log l) e\left(ahr\frac{\overline{p_2}}{kl}\right), \tag{29}$$

$$S_2(p_2) = \sum_{k \leqslant u} \mu(k) \sum_{m \leqslant u} \Lambda(m) \sum_{\substack{l \\ klm \in E_8(p_2)}} e\left(ahr\frac{\overline{p_2}}{klm}\right), \tag{30}$$

et

$$S_3(p_2) = \sum_{k > u} \Delta_k \sum_{\substack{m > u \\ km \in E_8(p_2)}} \Lambda(m) e\left(ahr\frac{\overline{p_2}}{km}\right). \tag{31}$$

(a) *Majoration de* $S_1(p_2)$. Avec le lemme 3, on écrit, pour $(k, p_2) = 1$

$$\sum_{\substack{l \\ kl \in E_8(p_2)}} (\log l) e\left(ahr\frac{\overline{p_2}}{kl}\right) = \sum_{\substack{Nk^{-1} < l \leqslant z_2 k^{-1} \\ kl \equiv p_2 (\mathrm{mod}\, \nu r) \\ (l, p_2) = 1}} (\log l) e\left(\frac{ahr}{klp_2}\right) e\left(-ahr\frac{\overline{kl}}{p_2}\right).$$

En intégrant par parties et en appliquant le lemme 4, on a

$$\ll \left(1 + \frac{|h|rM}{N}\right)(ah, p_2)^{1/2} N^{1/2} X^{\varepsilon}$$

enfin, d'après (29), on obtient:

$$S_1(p_2) \ll \left(1 + \frac{|h|rM}{N}\right)(ah, p_2)^{1/2} u N^{1/2} X^{\varepsilon}. \tag{32}$$

(b) *Majoration de* $S_2(p_2)$. De même que précédemment, on a, pour $(km, p_2) = 1$,

$$\sum_{\substack{l \\ klm \in E_8(p_2)}} e\left(ahr\frac{\overline{p_2}}{klm}\right) \ll \left(1 + \frac{|h|rM}{N}\right)(ah, p_2)^{1/2} N^{1/2} X^{\varepsilon}$$

ce qui donne, d'après (30):

$$S_2(p_2) \ll \left(1 + \frac{|h|rM}{N}\right)(ah, p_2)^{1/2} u^2 N^{1/2} X^{\varepsilon}. \tag{33}$$

(c) *Majoration de* $\sum_{p_2} |S_3(p_2)|$. L'étude de l'expression

$$\sum_{p_2} |S_3(p_2)| = \sum_{p_2} \Big| \sum_{k,m} \Big|$$

est à rapprocher de celle de W_3, faite au § VIII, puisque le dénominateur à l'intérieur de l'exponentielle est produit des deux entiers k et m. En découpant les intervalles de sommation de k et de m, la relation (31) entraîne:

$$\sum_{N < p_2 \leqslant 2N} |S_3(p_2)| \tag{34}$$

$$\ll X^{\varepsilon} \sup_{\substack{U_1, U_2 \\ U_1 \geqslant u, U_2 \geqslant u \\ N/4 \leqslant U_1 U_2 \leqslant 2N}} \left\{ \sum_{N < p \leqslant 2N} \Big| \sum_{\substack{km \in E_8(p) \\ U_1 < k \leqslant 2U_1, U_2 < m \leqslant 2U_2}} \Delta_k \Lambda(m) e\left(ahr\frac{\overline{p}}{km}\right) \Big| \right\}.$$

Parmi les deux nombres U_1 et U_2, l'un au moins, noté X_1 vérifie $X_1 \leqslant 2N^{1/2}$. On appelle alors X_2 l'autre nombre et on pose:

si $X_1 = U_1$

$$\begin{cases} t_1 = k & g_1(t_1) = \Delta_{t_1}, \\ t_2 = m & g_2(t_2) = \Lambda(t_2); \end{cases}$$

si $X_1 = U_2$

$$\begin{cases} t_1 = m & g_1(t_1) = \Lambda(t_1), \\ t_2 = k & g_2(t_2) = \Delta_{t_2}. \end{cases}$$

Avec ces notations, on est ramené à étudier, pour

$$u \leqslant X_1 \leqslant 2N^{1/2} \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{4}NX_1^{-1} \leqslant X_2 \leqslant 2NX_1^{-1}$$

l'expression

$$W_7 = \sum_{N < p \leqslant 2N} \Big| \sum_{\substack{X_1 < t_1 \leqslant 2X_1 \\ t_1 t_2 \in E_8(p)}} \sum_{X_2 < t_2 \leqslant 2X_2} g_1(t_1) g_2(t_2) e\left(ahr\frac{\overline{p}}{t_1 t_2}\right) \Big|$$

$$\ll \sum_{N < n \leqslant 2N} \sum_{\substack{X_2 < t_2 \leqslant 2X_2 \\ (t_2, n) = 1}} \Big| \sum_{\substack{X_1 < t_1 \leqslant 2X_1 \\ t_1 t_2 \in E_8(n)}} g_1(t_1) e\left(ahr\frac{\overline{n}}{t_1 t_2}\right) \Big| X^{\varepsilon}.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a

$$W_7 \ll N^{1/2}X_2^{1/2}X^{2\varepsilon}\Big\{\sum_{\substack{X_2<t_2\leqslant 2X_2\\ (t_2,\nu r)=1}}\ \sum_{\substack{X_1<t_1,t_1'\leqslant 2X_1\\ t_1\equiv t_1' \pmod{\nu r}\\ (t_1t_1',\nu r)=1}}\Big|\sum_{\substack{N<n\leqslant 2N\\ (n,t_1t_1't_2)=1\\ n\equiv t_1t_2 \pmod{\nu r}}} e\Big(ahr\frac{t_1-t_1'}{(t_1,t_1')}\frac{\overline{n}}{[t_1,t_1']^n}\Big)\Big|\Big\}^{1/2}.$$

Lorsque $t_1 = t_1'$, on majore trivialement. Dans le cas contraire on applique le lemme 4:

$$W_7 \ll N^{1/2}X_2^{1/2}X^{3\varepsilon}\times$$
$$\times\Big\{r^{-1}NX_1X_2+\sum_{\substack{X_2<t_2\leqslant 2X_2\\ (t_2,r)=1}}\ \sum_{\substack{X_1<t_1<t_1'\leqslant 2X_1\\ t_1\equiv t_1' \pmod r\\ (t_1t_1',r)=1}}\big(ah(t_1'-t_1),t_1t_1't_2\big)^{1/2}(t_1,t_1')^{-1}X_1X_2^{1/2}\Big\}^{1/2}.$$

Par un calcul analogue à celui fait pour la majoration de W_5, on a

$$W_7 \ll N^{1/2}X_2^{1/2}X^{4\varepsilon}\{r^{-1}N^2+r^{-1}X_1^3X_2^{3/2}\tau^2(h)\}^{1/2}.$$

La relation (34) et les inégalités entre X_1, X_2 et u entraînent

$$\text{(35)}\qquad \sum_{N<p_2\leqslant 2N}|S_3(p_2)| \ll \big(N^2u^{-1/2}+N^{15/8}\tau(h)\big)r^{-1/2}X^{5\varepsilon}.$$

En choisissant $u = N^{1/5}r^{-1/5}$, les formules (27), (28), (32), (33) et (35) entraînent

$$W_3 \ll \Big(1+\frac{|h|rM}{N}\Big)r^{-2/5}N^{19/10}X^{6\varepsilon}\tau(h)$$

avec les relations (19) et (20) on a:

$$W_1'(H,Y,Q) \ll N^{29/10}Q^{-1}X^{9\varepsilon}$$

enfin, avec (16) et (18) on parvient à

$$\text{(36)}\qquad W_1(Y,Q) \ll MN^2Q^{-1}X^{-\varepsilon/2}+N^{29/10}Q^{-1}X^{9\varepsilon}.$$

X. Le terme principal de $D(Q)$. Le terme principal de $D(Q)$ est, d'après (2), (6), (12) et (15):

$$\text{(37)}\qquad MB(Q)-MA(Q)$$
$$= M\sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}}\frac{1}{q}\sum_{\substack{\lambda \pmod q\\ (\lambda,q)=1}}\Big(\sum_{k\equiv\lambda \pmod q}\gamma(k)-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(k,q)=1}\gamma(k)\Big)^2.$$

Cette formule est valable pour les trois théorèmes. Dans le cas du théorème 3, l'application directe du théorème de Barban–Davenport–Halberstam donne, avec la condition (iii):

$$B(Q)-A(Q) \ll N^2Q^{-1}(\log N)^{-2A-2} \ll X^2M^{-2}Q^{-1}(\log X)^{-2A-2}.$$

On va montrer que cette relation est vraie aussi dans les autres cas. En effet, la condition (C_1) entraîne:

(38) Pour tout $(a,q)=1$,

$$\sum_{k\equiv a \pmod q}\gamma(k) = \frac{1}{\varphi(q)}\sum_{(k,q)=1}\gamma(k)+O\big(XM^{-1}(\log X)^{-5A-15}\big).$$

D'autre part, en introduisant les caractères de Dirichlet, la relation (37) devient:

$$0\leqslant B(Q)-A(Q)\leqslant \sum_{\substack{Q<q\leqslant 2Q\\ (q,a)=1}}\frac{1}{q\varphi(q)}\sum_{\substack{\chi \pmod q\\ \chi\neq\chi_0}}\Big|\sum\chi(k)\gamma(k)\Big|^2.$$

Soit χ^* le caractère primitif $(\operatorname{mod} d)$ induit par $\chi\,(\operatorname{mod} q)$; en sommant sur d et sur $e = qd^{-1}$, on a:

$$\text{(39)}\qquad B(Q)-A(Q) \ll Q^{-2}(\log X)\sum_{e\leqslant 2Q}\ \sum_{Q/e<d\leqslant 2Q/e}\ \sum_{\substack{\chi^* \pmod d\\ \chi^*\neq\chi_0}}\Big|\sum_{(k,e)=1}\chi^*(k)\gamma(k)\Big|^2.$$

La relation (38) implique, pour χ caractère modulo d ($\chi\neq\chi_0$ et $d\leqslant(\log X)^{2A+6} = Q_0$)

$$\sum_{(k,e)=1}\chi(k)\gamma(k) = \sum_{\delta|e}\mu(\delta)\sum_{\substack{\lambda \pmod d\\ (\lambda,d)=1}}\chi(\lambda)\sum_{\substack{k\equiv\lambda \pmod d\\ k\equiv 0 \pmod\delta}}\gamma(k) = O\Big(\frac{XM^{-1}\tau(e)}{(\log X)^{3A+9}}\Big),$$

ce qui conduit à

$$Q^{-2}\log X\sum_{2QQ_0^{-1}<e\leqslant 2Q}\ \sum_{Q/e<d\leqslant 2Q/e}\ \sum_{\substack{\chi^* \pmod d\\ \chi^*\neq\chi_0}}\Big|\sum_{(k,e)=1}\chi^*(k)\gamma(k)\Big|^2$$
$$\ll X^2M^{-2}Q^{-1}(\log X)^{-2A-2}.$$

L'inégalité de grand crible donne, pour la contribution des petites valeurs de e

$$Q^{-2}\log X\sum_{e\leqslant 2QQ_0^{-1}} \ll Q^{-2}\log X\sum_{e\leqslant 2QQ_0^{-1}}\Big(\frac{Q^2}{e^2}+XM^{-1}\Big)\sum\gamma(k)^2$$
$$\ll X^2M^{-2}Q^{-1}(\log X)^{-2A-2}+XM^{-1}(\log X)^4.$$

Finalement, on obtient:

$$\text{(40)}\qquad MB(Q)-MA(Q) \ll X^2M^{-1}Q^{-1}(\log X)^{-2A-2}+X\log^4X.$$

XI. Fin de la démonstration.

(a) *Cas du théorème* 1. En regroupant les formules (2), (6), (12), (15), (23) et (40) on obtient:

$$E^2(Q) \ll MQ\{MN^2Q^{-1}(\log X)^{-2A-2}+N^{5/2}Q^{-1}X^{7\varepsilon}+N^{11/4}Q^{-1}X^{3\varepsilon}+MNX^{\varepsilon/2}\}$$

soit encore, pour ε suffisamment petit par rapport à η

$$E^2(Q) \ll M^2N^2(\log X)^{-2A-2}+MN^{11/4}X^{3\varepsilon} \ll M^2N^2(\log X)^{-2A-2}$$

d'après la condition (iii), pourvu que ε soit suffisamment petit par rapport à δ_0. La formule (1) est démontrée.

(b) *Cas du théorème* 2. De même avec les formules (2), (6), (12), (15), (26) et (40), on a:

$$E^2(Q) \ll MQ\{L^2MN^2Q^{-1}(\log X)^{-2A-2}+L^3N^{5/2}Q^{-1}X^{7\varepsilon}+ +L^{11/4}N^3Q^{-1}X^{5\varepsilon}+LMNX^{\varepsilon/2}\}$$

$$\ll L^2M^2N^2(\log X)^{-2A-2}$$

sous la condition (iii) et ε suffisamment petit par rapport à η et δ_0, ce qui termine la démonstration du théorème 2.

(c) *Cas du théorème* 3. De même avec les formules (2), (6), (12), (15), (36) et (40), on a:

$$E^2(Q) \ll MQ\{MN^2Q^{-1}(\log X)^{-2A-2}+N^{29/10}Q^{-1}X^{9\varepsilon}\} \ll M^2N^2(\log X)^{-2A-2}$$

sous la condition (iii) et ε suffisamment petit. Le théorème 3 est démontré.

Bibliographie

[1] J. R. Chen, *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica (1973), p. 157–176.

[2] E. Fouvry and H. Iwaniec, *On a theorem of Bombieri–Vinogradov type*, Mathematika 27 (1980), p. 135–152.

[3] G. Greaves, *A weighted sieve of Brun's type*, Acta Arith. 40 (1982), p. 297–332.

[4] C. Hooley, *On the greatest prime factor of a cubic polynomial*, J. Reine Angew. Math. 303/304 (1978), p. 21–50.

[5] M. Laborde, *Buchstab's sifting weights*, Mathematika 26 (1979), p. 250–257.

[6] R. C. Vaughan, *On the estimation of trigonometric sums over primes and related questions*, Institut Mittag-Leffler, Report n°9 (1977).

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
F 33405 Talence Cedex

Reçu le 21. 10. 1980
et dans la forme modifiée le 2. 2. 1981 (1228)

ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

Erweiterung eines Satzes von Schinzel über Potenzreste

von

VOLKER SCHULZE (West Berlin)

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper und $n \in \mathbf{N}$ eine natürliche Zahl. Für eine ganze Zahl $a \in K$, $a \neq 0$, wird mit $P_K(a, n)$ die Menge aller Primideale $\mathfrak{p}$ von K bezeichnet, für die die Kongruenz

$$X^n \equiv a \pmod{\mathfrak{p}}$$

lösbar ist. In einer Reihe von Arbeiten (siehe [1] bis [8]) wird untersucht, wann $P_K(a, n) \doteq P_K(b, m)$ bzw. $P_K(a, n) \dot\subseteq P_K(b, m)$ gilt; d.h. $P_K(a, n) = P_K(b, m)$ bzw. $P_K(a, n) \subseteq P_K(b, n)$ bis auf endlich viele Ausnahmen. Ein einfaches notwendiges und hinreichendes Kriterium ist bisher nur in Spezialfällen bekannt, und zwar für $P_K(a, n) \dot\subseteq P_K(b, m)$ unter der Voraussetzung $n\,|\,m$ durch Schinzel [4] und für $P_Q(a, n) \doteq P_Q(b, m)$ durch Schulze [7]. Die übrigen bisher bekannten Resultate sind Spezialfälle hiervon.

In der vorliegenden Arbeit werden diese Ergebnisse durch die Sätze 2 und 3 erweitert. Beim Beweis von Satz 3 wird zurückgegriffen auf die Arbeit von Schinzel. Für $g \in \mathbf{N}$ bezeichne ζ_g eine primitive g-te Einheitswurzel. Dann gilt

SATZ 1 (Schinzel [4]). *Es sei K ein algebraischer Zahlkörper und τ die größte natürliche Zahl derart, daß $\zeta_{2^\tau}+\zeta_{2^\tau}^{-1} \in K$. Ferner seien n, m aus $\mathbf{N}$ mit $n\,|\,m$. Dann ist*

$$P_K(a, n) \dot\subseteq P_K(b, m)$$

genau dann, wenn es eine Zahl $s \in \mathbf{N}$ und ein $d \in K$ gibt derart, daß wenigstens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(1) $a^{\frac{m}{n}\cdot s}\cdot b = d^m$;

(2) $m \not\equiv 0 \pmod{2^\tau}$, $a^{\frac{m}{n}\cdot s}\cdot b = -d^m$, $\prod_{2|n} a^l = -c^2$ *für ein* $c \in K$, $l \in \mathbf{N}$;

(3) $m \equiv 2^\tau \pmod{2^{\tau+1}}$, $a^{\frac{m}{n}\cdot s}\cdot b = -(\zeta_{2^\tau}+\zeta_{2^\tau}^{-1}+2)^{m/2}\cdot d^m$, $\prod_{2|n} a^l = -c^2$ *für ein* $c \in K$, $l \in \mathbf{N}$;

(4) $m \equiv 0 \pmod{2^{\tau+1}}$, $a^{\frac{m}{n}\cdot s}\cdot b = (\zeta_{2^\tau}+\zeta_{2^\tau}^{-1}+2)^{m/2}\cdot d^m$.