ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension s)

par

HENRI FAURE (Marseille)

1. Introduction

1.1. L'intégration numérique par les méthodes de Monte-Carlo utilise des suites de points possédant une très bonne répartition dans le domaine d'intégration. Plus précisément, si $\boldsymbol{T}^s = [0, 1[^s$ est le tore à s dimensions et si f est une fonction à variation bornée (au sens de Hardy–Krause), on a l'inégalité suivante (Koksma–Hlawka, [4]):

$$\left| \int_{\boldsymbol{T}^s} f(t)\,dt - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) \right| \leqslant V(f)\,\frac{D^*(N)}{N},$$

où $V(f)$ est la variation de f et $D^*(N)$ la discrépance à l'origine (1) de la suite $x_1, \ldots, x_N$ de points de $\boldsymbol{T}^s$. (Il existe diverses variantes de cette inégalité, et d'autres notions, voisines de D^*, pour mesurer la qualité de la répartition, voir par exemple [5] ou [7].)

Au delà de son intérêt arithmétique, la recherche de suites ayant la plus faible discrépance possible est très motivée par ces méthodes, et cela explique les nombreux travaux de spécialistes du calcul numérique sur le sujet:

— J.H. Halton et J. M. Hammersley ([2], [3]) ont d'abord construit des suites dans $\boldsymbol{T}^s$, en généralisant la suite (infinie, en dimension 1) de van der Corput ([12]) et la suite (finie, en dimension 2) de Roth ([8]); pour ces suites, Halton a obtenu les majorations:

$$D^*(N) \leqslant A_s(\log N)^s \quad \text{dans le cas des suites infinies}$$

et

$$D^*(N) \leqslant A_{s-1}(\log N)^{s-1} \quad \text{pour les suites finies},$$

avec

$$\log A_s = O(s \log s).$$

(1) Voir le paragraphe 2 ci-dessous pour la définition de la discrépance.

Ensuite, I.M. Sobol' ([10]) a obtenu de nouvelles suites infinies, basées sur le système de numération binaire, qui vérifient:

$$D^*(N) \leqslant B_s(\log N)^s + O\big((\log N)^{s-1}\big),$$

avec

$$\log B_s = O(s \log\log s).$$

Signalons également les travaux de Davenport, Gabaï, Vilenkin, White et de Halton-Zaremba sur les suites finies dans T^2.

Tous ces résultats figurent dans un article très détaillé de H. Niederreiter ([7]) qui fait le point sur la question et qui contient une bibliographie complète jusqu'en 1977.

1.2. Dans cet article, nous définissons une nouvelle famille de suites dans T^s, utilisant la numération r-adique, pour lesquelles nous obtenons les majorations:

$$D^*(N) \leqslant C_s(\log N)^s + O\big((\log N)^{s-1}\big) \quad \text{avec} \quad C_s = o(1);$$

Ces suites ont les plus faibles discrépances actuellement connues pour tout $s \geqslant 2$ (voir la table en annexe).

Rappelons pour terminer le théorème de Roth ([8]) qui montre l'existence d'une constante K_s telle que, pour toute suite infinie, on ait, pour une infinité de N:

$$D^*(N) \geqslant K_s(\log N)^{s/2}.$$

On ne sait rien pour l'instant de l'ordre exact de $D^*(N)$ pour $s \geqslant 2$, et dans tous les cas cités ci-dessus, on ne connait pas d'autre minoration que celle de Roth.

2. Definitions and resultats

2.1. Le tore à s dimensions T^s est identifié au cube unité $[0,1[^s$; un pavé P de T^s est le produit de s intervalles $[a_k, b_k[$ de $[0,1[$: $P = \prod_{k=1}^{s} [a_k, b_k[$; son volume est $|P| = \prod_{k=1}^{s} (b_k - a_k)$.

Soit $X = (X_n)_n$ une suite finie ou non de points de T^s; étant donnés un sous-ensemble K de T^s et un ensemble fini T d'entiers, on pose $A(K, T, X) = \operatorname{card}\big(X(T) \cap K\big)$; si K est mesurable, on note $|K|$ son volume et on définit l'écart $E(K, T, X)$ par $E(K, T, X) = A(K, T, X) - |K|\,|T|$ avec $|T| = \operatorname{card} T$; si $T = [1, N]$, on note $E(K, T, X) = E(K, N, X)$; on pose alors:

$$D(N, X) = \sup_{P \in \mathscr{P}_s} |E(P, N, X)| \quad \text{et} \quad D^*(N, X) = \sup_{P \in \mathscr{P}_s^*} |E(P, N, X)|,$$

où $\mathscr{P}_s$ est l'ensemble des pavés de T^s et $\mathscr{P}_s^*$ l'ensemble des pavés de T^s de la forme $\prod_{k=1}^{s} [0, b_k[$.

Les fonctions D et D^* sont respectivement la discrépance et la discrépance à l'origine de la suite X; elles sont reliées l'une à l'autre par les inégalités: $D^* \leqslant D \leqslant 2^s D^*$ (voir par exemple [5]).

Les résultats énoncés ci-dessous n'ont d'intérêt que pour $s \geqslant 2$, car on a des majorations beaucoup plus fines pour le cas $s = 1$ (voir [1]).

2.2. Soit r un entier au moins égal à s (pratiquement r sera toujours un nombre premier).

On appelle *pavé élémentaire en base* r un pavé de la forme

$$\prod_{k=1}^{s} \left[\frac{u_k}{r^{p_k}}, \frac{u_k+1}{r^{p_k}}\right[,$$

avec u_k et p_k entiers positifs ou nuls, et $u_k < r^{p_k}$ pour tout k.

Soient m un entier positif ou nul et $X = (X_1, \ldots, X_{r^m})$ une suite de r^m points de T^s; on dit que X *est une suite de type* $P_{r,s}^m$ (ou un $P_{r,s}^m$-réseau) si tout pavé élémentaire en base r de volume r^{-m} contient un terme et un seul de la suite X.

Soit $X = (X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite infinie dans T^s; on dit que X *est une suite de type* $P_{r,s}$ (ou une $P_{r,s}$-suite) si, quels que soient m et l entiers positifs ou nuls, la suite finie $X_m^l = (X_{lr^m+1}, \ldots, X_{(l+1)r^m})$ est une suite de type $P_{r,s}^m$.

2.3. Les paragraphes 4 à 6 sont consacrés aux démonstrations des théorèmes suivants:

THÉORÈME 1. *Quels que soient les entiers $s \geqslant 1$ et r premier au moins égal à s il existe des suites de type $P_{r,s}$.*

De telles suites, notées $S_{R_s}^r$, seront définies au paragraphe 3.

THÉORÈME 2. *Quels que soient les entiers $s \geqslant 2$, r premier au moins égal à $s-1$ et $m \geqslant 0$, il existe des suites de type $P_{r,s}^m$.*

De telles suites finies s'obtiennent aisément à partir des suites de type $P_{r,s}$.

Remarque. Les suites de type $P_{2,2}$ sont les LP_0-suites de T^2 introduites par I. M. Sobol' ([10]), suites également étudiées par S. Srinivasan ([11]).

Les suites de type $P_{2,2}^m$ et $P_{2,3}^m$ sont les P_0-réseaux de T^2 et T^3 considérés par Sobol'.

THÉORÈM 3. (i) *Pour toute suite X de type $P_{2,2}^m$ (resp. $P_{2,3}^m$) on a la majoration:*

$$D^*(2^m, X) \leqslant (m+5)/2 \quad \left(\textit{resp. } \tfrac{1}{4}(m^2+10m+9)\right).$$

(ii) *Soient $s \geqslant 2$ et r impair au moins égal à s; pour toute suite X de type $P_{r,s}^m$ on a la majoration:*

$$D^*(r^m, X) \leqslant \left(\frac{r-1}{2}\right)^{s-1} \frac{(m+s)^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Remarques. Pour les suites X de type $P_{2,2}^m$ et $P_{2,3}^m$ Sobol' obtient respectivement m et $\frac{1}{2}(m^2-m+4)$ comme majorants (7.4 et 7.6 [10]); nos majorations sont donc meilleures pour m est assez grand.

La majoration pour r impair n'a en fait d'intérêt que pour r premier en vertu du théorème 2.

Dans les cas $s = 2$ et $s = 3$, avec r impair, nous signalons en cours de démonstration des majorations plus précises (voir le paragraphe 6.3).

THÉORÈME 4. (i) *Pour toute suite X de type $P_{2,2}$, on a la majoration:*

$$D^*(N, X) \leqslant \frac{3}{16(\log 2)^2} (\log N)^2 + O(\log N) \quad \text{pour tout } N \geqslant 1.$$

(ii) *Soient $s \geqslant 2$ et r impair (premier) au moins égal à s; pour toute suite X de type $P_{r,s}$ on a la majoration:*

$$D^*(N, X) \leqslant \frac{1}{s!}\left(\frac{r-1}{2\log r}\right)^s (\log N)^s + O\left((\log N)^{s-1}\right) \quad \text{pour tout } N \geqslant 1.$$

Remarques. Les suites de type $P_{2,2}$ sont les LP_0-suites de $\boldsymbol{T}^2$ pour lesquelles Sobol' obtient le majorant $1/2(\log 2)^2 = 1{,}04\ldots$, alors que $3/16(\log 2)^2 = 0{,}39\ldots$

Soit q_s le premier nombre premier au moins égal à s; alors le majorant $C_s = \frac{1}{s!}\left(\frac{q_s-1}{2\log q_s}\right)^s$ tend vers zéro quand s tend vers l'infini; les suites $P_{r,s}$ sont d'autant meilleures que s est grand, alors que les majorants associées aux suites de Halton et aux LP_τ-suites de Sobol' tendent vers l'infini avec s. Nous donnons en annexe un tableau comparatif pour quelques valeurs de s.

En adaptant la méthode qui permet de remplacer $(r-1)$ par $(r-1)/2$ dans les majorations, on peut diviser par 2^s la constante obtenue par Meijer ([6]) pour les suites de Halton $\varphi_{g_1,\ldots,g_s}$; on obtient ainsi:

$$D^*(N, \varphi_{g_1,\ldots,g_s}) \leqslant \prod_{k=1}^{s} \frac{g_k-1}{2\log g_k} (\log N)^s + O\left((\log N)^{s-1}\right).$$

THÉORÈME 5. *Soit N un entier au moins égal à 1 et $X = \left((x_n^1, \ldots, x_n^{s-1})\right)_{n\geqslant 1}$ une suite de type $P_{r,s-1}$. Alors la suite finie à N éléments de $\boldsymbol{T}^s$, $X' = (X'_1, \ldots$ $\ldots, X'_N)$, définie par $X'_n = (x_n^1, \ldots, x_n^{s-1}, (n-1)/N)$ vérifie la majoration:*

$$D^*(N, X') \leqslant \frac{1}{(s-1)!}\left(\frac{r-1}{2\log r}\right)^{s-1} (\log N)^{s-1} + O\left((\log N)^{s-2}\right) \quad si \quad r \geqslant 3$$

et

$$D^*(N, X') \leqslant \frac{3}{16(\log 2)^2} (\log N)^2 + O(\log N) \quad si \quad r = 2 \text{ et } s = 3.$$

Remarques. Ces suites sont pour les suites de type $P_{r,s}$ ce que sont les suites de Hammersley pour les suites de Halton.

Notons à ce propos que certains auteurs (Schmidt [9], Srinivasan [11]) désignent par suites de Hammersley les suites infinies pour lesquelles Niederreiter ([7]) utilise le terme suites de Halton; c'est cette dernière dénomination que nous avons adoptée.

Comme pour le cas infini, les suites finies associées aux suites de type $P_{r,s}$ donnent les plus faibles discrépances connues pour $s \geqslant 3$; l'étude plus spécifique du cas $s = 2$ sera abordée dans un prochain article.

3. Definition des suites $S_{R_s}^r$

3.1. Puissances successives de la matrice des coefficients binomiaux. Si a et b sont des entiers positifs ou nuls, on pose

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \quad \text{si} \quad a \geqslant b \quad \text{et} \quad \binom{a}{b} = 0 \quad \text{sinon}.$$

Soit $C = \left(\binom{a}{b}\right)$ la matrice triangulaire (d'ordre infini) dont la $(a+1)$-ième colonne est formée des coefficients binomiaux $\binom{a}{b}$ pour b allant de 0 à l'infini. On a la propriété suivante:

LEMME. *Pour tout entier $t \geqslant 1$ la matrice C vérifie $C^t = \left(t^{a-b}\binom{a}{b}\right)$, en particulier $C^t = I \pmod t$ si I est la matrice unité.*

Preuve. On procède par récurrence sur t; la propriété est vraie pour $t = 1$, et si, pour $a \geqslant b$, on note $\left(\binom{a}{b}(t+1)\right)$ le terme général de C^{t+1}, on a

$$\binom{a}{b}(t+1) = \sum_{j=b}^{a} \binom{a}{j}t \binom{j}{b} = \sum_{j=b}^{a} t^{a-j}\binom{a}{j}\binom{j}{b}$$

d'après l'hypothèse de récurrence; or $\binom{a}{j}\binom{j}{b} = \binom{a}{b}\binom{a-b}{j-b}$, d'où:

$$\binom{a}{b}(t+1) = \binom{a}{b}\sum_{j=b}^{a} t^{a-j}\binom{a-b}{j-b} = \binom{a}{b}\sum_{i=0}^{a-b}\binom{a-b}{i}t^{a-b-i} = \binom{a}{b}(t+1)^{a-b},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3.2. La fonction C. Soit A_r l'ensemble des réels de la forme k/r^n avec n et k entiers tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k < r^n$. Un élément x de A_r s'écrit $x = \sum_{j=0}^{\infty} x_j r^{-j-1}$, les x_j étant tous nuls sauf un nombre fini. On définit alors $y = Cx$ par:

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} y_j r^{-j-1} \quad \text{avec} \quad y_j = \sum_{i \geqslant j} \binom{i}{j} x_i (\operatorname{mod} r).$$

Notons que si $x = \sum_{j=0}^{t} x_j r^{-j-1}$ avec $x_t \neq 0$, alors on a

$$y = \sum_{j=0}^{t} y_j r^{-j-1} \quad \text{avec} \quad y_t \neq 0.$$

L'application C est donc une bijection de A_r sur lui-même, l'application réciproque étant C^{r-1}.

3.3. Définition des suites $S_{R_s}^r$. Soit r un entier au moins égal à 2; si n est un entier strictement positif, soit $n-1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) r^j$ l'écriture de $n-1$ en base r; posons:

$$x_n^1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) r^{-j-1}, \quad \text{puis} \quad x_n^k = C^{k-1} x_n^1 \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant k \leqslant r.$$

Si s un entier compris entre 1 et r, soient $r_1, \ldots, r_s$, s entiers distincts compris entre 1 et r; posons $R_s = (r_1, \ldots, r_s)$.

Nous définissons alors la suite $S_{R_s}^r$, à valeurs dans $\boldsymbol{T}^s$, par:

$$S_{R_s}^r(n) = (x_n^{r_1}, \ldots, x_n^{r_s}) \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

En particulier si $s = r$ et $r_k = k$, nous obtenons la suite de terme général $S^r(n) = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^r)$; et dans le cas où $r = 2$, nous retrouvons une LP_0-suite considérée par Sobol' (6.4 [10]).

4. Démonstration des théorèmes 1 et 2

4.1. Nous montrons que, pour r premier, les suites $S_{R_s}^r$ sont des suites de type $P_{r,s}$, ce qui montre le théorème 1.

Soient m et l deux entiers positifs ou nuls, et soit $P = \prod_{k=1}^{s} [u_k/r^{p_k}, (u_k+1)/r^{p_k}[$ un pavé élémentaire de volume r^{-m}. Etant donnés un entier $n \geqslant 1$ et $\sum_{j=0}^{\infty} a_j(n) r^j$ l'écriture de $n-1$ en base r, écrivons les conditions sur les entiers $a_j(n)$ pour que $X_n = S_{R_s}^r(n)$ appartienne à $X_m^l \cap P$:

On doit avoir $X_n \in X_m^l$, ce qui impose $lr^m < n \leqslant (l+1) r^m$; donc les entiers $a_j(n)$ sont déterminés avec unicité, pour $j \geqslant m$, par la donnée de l et m.

D'autre part, d'après le lemme 3.1, pour tout k compris entre 1 et s, on a:

$$x_n^{r_k} = \sum_{j=0}^{\infty} y_{n,j}^{r_k} r^{-j-1} \quad \text{avec} \quad y_{n,j}^{r_k} = \sum_{i \geqslant j} \binom{i}{j} (r_k - 1)^{i-j} a_i(n) \ (\operatorname{mod} r)$$

(en convenant que $(r_k - 1)^{i-j} = 1$ si $r_k = 1$ et $i = j$).

On voit alors que la condition $x_n^{r_k} \in [u_k/r^{p_k}, (u_k+1)/r^{p_k}[$ détermine avec unicité les entiers $y_{n,j}^{r_k}$ pour $0 \leqslant j \leqslant p_k - 1$; il en résulte que les entiers $a_i(n)$, pour $0 \leqslant i \leqslant m-1$, sont solution du système linéaire de m équations à m inconnues suivant:

$$\sum_{i \geqslant j_k} \binom{i}{j_k} (r_k - 1)^{i-j_k} a_i(n) = y_{n,j_k}^{r_k} \ (\operatorname{mod} r)$$

pour $1 \leqslant k \leqslant s$ et $0 \leqslant j_k \leqslant p_k - 1$, avec $\sum_{k=1}^{s} p_k = m$.

Le déterminant principal de ce système est égal à

$$\prod_{1 \leqslant h < k \leqslant s} (r_k - r_h)^{p_k p_h}.$$

C'est une généralisation du déterminant de Van Der Monde dont on peut trouver le calcul dans la Revue de Mathématiques Spéciales par C. Meray ([6a]), ou dans le traité de T. Muir ([6b]). Nous remercions A. Schinzel qui nous a communiqué ces références, évitant ainsi un calcul fastidieux. Le déterminant principal de notre système n'est donc pas nul modulo r si r est un nombre premier (car $r_1, \ldots, r_s$ sont des entiers distincts compris entre 1 et r); par suite il existe un et un seul n tel que $X_n \in X_m^l \cap P$, et le théorème est démontré. (Noter que pour $s = 1$, le déterminant vaut 1.)

4.2. Démonstration du théorème 2. Il résulte de la propriété suivante, dont la démonstration est classique:

Soit $X = (X_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de type $P_{r,s}$; si $X_n = (x_n^1, \ldots, x_n^s)$, alors pour tout $m \geqslant 0$ la suite $X' = (X'_1, \ldots, X'_{r^m})$, définie par $X'_n = (x_n^1, \ldots, x_n^s, (n-1)/r^m)$ pour $1 \leqslant n \leqslant r^m$, est une suite de type $P_{r,s+1}^m$.

Preuve. Soit $P' = \prod_{k=1}^{s+1} \left[\frac{u_k}{r^{p_k}}, \frac{u_k+1}{r^{p_k}}\right[$ un pavé élémentaire en base r, de volume $|P'| = r^{-m}$; nous devons montrer que $X' \cap P'$ est réduit à un point. Soit $P = \prod_{k=1}^{s} \left[\frac{u_k}{r^{p_k}}, \frac{u_k+1}{r^{p_k}}\right[$; son volume est $|P| = r^{-m'}$ avec $m' = m - p_{s+1}$; les suites $X_{m'}^l = (X_{lr^{m'}+1}, \ldots, X_{(l+1)r^{m'}})$, pour l allant de 0 à $r^{p_{s+1}}-1$, sont des suites de type $P^{m'}_{r,s}$ d'après l'hypothèse, donc P contient un point et un seul de chacune d'elles.

La relation $X'_n \in P'$ équivaut à $X_n \in P$ et aux inégalités

$$\frac{u_{s+1}}{r^{p_{s+1}}} \leqslant \frac{n-1}{r^m} < \frac{u_{s+1}+1}{r^{p_{s+1}}},$$

c'est-à-dire à $X_n \in P$ et aux inégalités $u_{s+1}r^{m'} < n \leqslant (u_{s+1}+1)r^{m'}$; d'où le résultat attendu.

On déduit alors du théorème 1 que, pour $s \geqslant 2$, les suites $\big(S^r_{R_{s-1}}(n), (n-1)/r^m\big)$ sont des suites de type $P^m_{r,s}$.

5. Etude de la discrépance dans le cas $r = 2$. Il s'agit de montrer la première partie des théorèmes 3 et 4.

5.1. Lemme. *Soit $P = [u/2^p, (u+1)/2^p[\times [0, y[$ avec u et p entiers positifs ou nuls tels que $u < 2^p$ et $y \in [0, 1]$; alors, pour toute suite X de type $P^m_{2,2}$, on a $|E(P, 2^m, X)| \leqslant 1$.*

La même propriété a lieu pour toute suite de type $P^m_{2,3}$ avec des pavés P de la forme

$$\left[\frac{u}{2^p}, \frac{u+1}{2^p}\right[\times \left[\frac{v}{2^q}, \frac{v+1}{2^q}\right[\times [0, z[.$$

Preuve. Nous montrons la propriété dans le cas $s=2$, l'autre cas se traitant de la même façon; le cas $m = 0$ étant évident, on peut supposer $m > 0$; distinguons deux cas:

si $p \geqslant m$, $A(P, 2^m, X) \leqslant 1$ car X est de type $P^m_{2,2}$, d'où $|E(P, 2^m, X)| \leqslant 1$.

si $p < m$, on décompose P en rectangles élémentaires P_i de surface au moins égale à 2^{-m} et en un rectangle P_0 de surface inférieure à 2^{-m} (cette décomposition est réalisée avec le développement binaire $\sum_{j=1}^{\infty} y_j 2^{-j}$ de y); d'après la propriété d'additivité des écarts, on obtient:

$$E(P, 2^m, X) = \sum_{i=0}^{n} E(P_i, 2^m, X) \quad \text{avec} \quad n = \sum_{j=1}^{m} y_j;$$

or $|E(P_0, 2^m, X)| \leqslant 1$ comme pour le premier cas, et $E(P_i, 2^m, X) = 0$: en effet, le rectangle P_i se décompose en $2^m|P_i|$ rectangles élémentaires de volume 2^{-m} et il y a un seul terme de la suite X dans chacun d'eux, d'où:

$$A(P_i, 2^m, X) = 2^m|P_i| \quad \text{et} \quad E(P_i, 2^m, X) = 0,$$

et le lemme 5.1 est démontré.

5.2. Démonstration du théorème 3 (i). Traitons d'abord le cas $s = 2$. Soit X une suite de type $P^m_{2,2}$ et $P = [0, x[\times [0, y[$ un rectangle de $\mathscr{P}^*_2$. On décompose P en rectangles „semi-élémentaires” P_i du type étudié au lemme 5.1 et en un rectangle P_0 de volume $|P_0| < 2^{-m}$; d'après l'additivité des écarts, si $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$, on a:

$$E(P, 2^m, X) = \sum_{i=0}^{n} E(P_i, 2^m, X) \quad \text{avec} \quad n = \sum_{j=1}^{m} x_j,$$

d'où: $|E(P, 2^m, X)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} x_j + 1$.

Le même raisonnement appliqué au rectangle $Q = [x, 1[\times [0, y[$ donne la majoration $|E(Q, 2^m, X)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} z_j + 1$ avec le développement binaire $\sum_{j=1}^{\infty} z_j 2^{-j}$ de $z = 1-x$.

Or les développements à l'ordre m de x et $1-x$ ne peuvent contenir en même temps plus de $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ termes égaux à un. Dans un cas, on a la majoration $|E(P, 2^m, X)| \leqslant (m+3)/2$ et dans l'autre, on écrit:

$$E(P, 2^m, X) = E([0, 1[\times [0, y[, 2^m, X) - E(Q, 2^m, X)$$

et on obtient $|E(P, 2^m, X)| \leqslant (m+5)/2$, car $[0, 1[\times [0, y[$ est un rectangle semi-élémentaire vérifiant les hypothèses du lemme 5.1.

Le cas $s = 3$ se traite de la même manière: tout pavé $P = [0, x[\times [0, y[\times [0, z[$ se décompose en pavés „semi-élémentaires” du type étudié au lemme 5.1 et en deux pavés de volume inférieur à 2^{-m}; les développements de x et $1-x$ d'une part, et de y et $1-y$ d'autre part ne peuvent contenir en même temps plus de $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ termes égaux à un; les pavés $[0, 1[\times [0, y[\times [0, z[$ et $[0, x[\times [0, 1[\times [0, z[$ se décomposent en m pavés „semi-élémentaires” au plus; il résulte alors des trois propriétés ci-dessus que:

$$|E(P, 2^m, X)| \leqslant \left[\frac{m+1}{2}\right]^2 + 2m + 2 \leqslant \tfrac{1}{4}(m^2+10m+9),$$

ce qu'il fallait démontrer.

5.3. Démonstration du théorème 4 (i). Il s'agit de majorer $|E(P, N, X)|$ où X est une suite de type $P_{2,2}$, N un entier supérieur ou égal à un et P un rectangle de $\mathscr{P}^*_2$.

Soit $N = \sum_{m=0}^{n} N_m 2^m$ l'écriture de N en base 2; posons $T_n =]0, 2^n]$

et, pour $0 \leqslant m \leqslant n-1$, désignons par T_m l'intervalle (éventuellement vide) $]\sum_{j=m+1}^{n} N_j 2^j, \sum_{j=m}^{n} N_j 2^j]$; on a alors $]0, N] = \bigcup_{m=0}^{n} T_m$, et par additivité des écarts:

$$|E(P, N, X)| \leqslant \sum_{m=0}^{n} |E(P, T_m, X)|.$$

La suite X étant de type $P_{2,2}$, on déduit du théorème 3(i) que:

$$|E(P, N, X)| \leqslant \sum_{m=0}^{n} \frac{m+5}{2} N_m \leqslant \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} m N_m + O(n).$$

Et le même raisonnement appliqué à $T =]N, 2^{n+1}]$ donne la majoration:

$$|E(P, T, X)| \leqslant \tfrac{1}{2} \sum_{m=1}^{n} m N'_m \quad \text{avec} \quad 2^{n+1} - N = \sum_{m=0}^{n} N'_m 2^m.$$

Si le développement de N a au plus $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ termes égaux à un, on obtient:

$$|E(P, N, X)| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{m=1}^{n} m - \sum_{m=1}^{[n+1/2]} m\right) + O(n) \leqslant \frac{3n^2}{16} + O(n).$$

Sinon, on écrit $E(P, N, X) = E(P, 2^{n+1}, X) - E(P, T, X)$ et on obtient encore $|E(P, N, X)| \leqslant 3n^2/16 + O(n)$ (car le développement de $2^{n+1} - N$ a au plus $\left[\frac{N+1}{2}\right]$ termes égaux à un).

Pour N compris entre 2^n et 2^{n+1}, on a $n \leqslant \log N/\log 2$, d'où le théorème 4 (i).

6. Etude de la discrépance dans le cas r impair. Ce paragraphe est consacré aux démonstrations des théorèmes 3 (ii) et 4 (ii). Introduisons une notation: étant donnés $s \geqslant 2$, r impair (premier) et $m \geqslant 1$, on posé:

$$\Delta(m, r, s) = \sup_{X \in \{P^m_{r,s}\}} D^*(r^m, X)$$

(on prend la borne supérieure pour toutes les suites de type $P^m_{r,s}$).

6.1. LEMME.

$$\Delta(m+1, r, s) \leqslant \Delta(m, r, s) + \tfrac{1}{2}(r-3)\Delta(m, r, s-1) + \\ + \max\big(\Delta(m, r, s-1),\ \Delta(m+1, r, s-1)\big).$$

Preuve. Soit X une suite de type $P^{m+1}_{r,s}$ et $P = \prod_{k=1}^{s} [0, y_k[$ un pavé de $\mathscr{P}^*_s$; on veut majorer $|E(P, r^{m+1}, X)|$. Distinguons deux cas suivant que y_s est compris entre ϱ/r et $(\varrho+1)/r$ avec $0 \leqslant \varrho \leqslant (r-1)/2$ (1er cas) ou avec $(r-1)/2 < \varrho < r$ (2ème cas).

Premier cas. Le pavé P se décompose en pavés disjoints

$$P_\varrho = \prod_{k=1}^{s-1} [0, y_k[\times [\varrho/r, y_s[\quad \text{et} \quad P_j = \prod_{k=1}^{s-1} [0, y_k[\times [j/r, (j+1)/r[$$

pour $0 \leqslant j < \varrho$; par additivité on a donc

$$E(P, r^{m+1}, X) = \sum_{j=0}^{\varrho} E(P_j, r^{m+1}, X).$$

Mais $E(P_\varrho, r^{m+1}, X) = E(P'_\varrho, r^m, X'_\varrho)$ avec $P'_\varrho = \prod_{k=1}^{s-1} [0, y_k[\times [0, y_s r - \varrho[$ et X'_ϱ suite de type $P^m_{r,s}$ obtenue à partir de X en effectuant une homothétie de rapport r sur la dernière coordonnée des points appartenant à $[0, 1[^{s-1} \times [\varrho/r, (\varrho+1)/r[$.

Et d'autre part $E(P_j, r^{m+1}, X) = E(P', r^m, X'_j)$ avec $P' = \prod_{k=1}^{s-1} [0, y_k[$ et X'_j suite de type $P^m_{r,s-1}$ obtenue en projetant sur $[0, 1[^{s-1}$ le réseau $X \cap \big([0, 1[^{s-1} \times [j/r, (j+1)/r[\big)$.

Finalement, on obtient dans ce premier cas:

$$|E(P, r^{m+1}, X)| \leqslant \Delta(m, r, s) + \tfrac{1}{2}(r-1)\Delta(m, r, s-1).$$

Deuxième cas. Le pavé P s'écrit $P = R \setminus Q$ avec $R = \prod_{k=1}^{s-1} [0, y_k[\times \times [0, 1[$ et $Q = \prod_{k=1}^{s-1} [0, y_k[\times [y_s, 1[$; Q se décompose en pavés disjoints

$$Q_\varrho = \prod_{k=1}^{s-1} [0, y_k[\times [y_s, (\varrho+1)/r[\quad \text{et} \quad Q_j = \prod_{k=1}^{s-1} [0, y_k[\times [j/r, (j+1)/r[$$

pour $\varrho < j \leqslant r-1$, d'où la relation:

$$E(P, r^{m+1}, X) = E(R, r^{m+1}, X) - \sum_{j=0}^{r-1} E(Q_j, r^{m+1}, X).$$

Des réductions de même nature que pour le premier cas conduisent alors à la majoration:

$$|E(P, r^{m+1}, X)| \leqslant \Delta(m+1, r, s-1) + \Delta(m, r, s) + \tfrac{1}{2}(r-3)\Delta(m, r, s-1),$$

d'où le lemme 6.1.

6.2. Lemme. *Pour tout $m \geqslant 1$, on a $\Delta(m, r, 1) \leqslant 1$ et pour tout s compris entre 2 et r on a $\Delta(1, r, s) \leqslant r$.*

Preuve. La deuxième majoration est triviale; pour la première, soit un écart $E([0, x[, r^m, X)$ avec $x \in [0, 1]$ et X suite de type $P^m_{r,1}$; d'après la propriété de la suite X, cet écart s'écrit:

$$E([0, x[, r^m, X) = [xr^m] + \varepsilon - r^m x,$$

avec ε valant 0 ou 1 suivant que $X \cap [[xr^m]/r^m, x[$ est vide ou non; d'où le résultat annoncé:

$$|E([0, x[, r^m, X)| \leqslant 1.$$

6.3. Démonstration du théorème 3 (ii). On procède par récurrence sur s. La formule annoncée est vraie pour $s = 1$ d'après le lemme 6.2.

Pour $s = 2$, en appliquant le lemme 6.1, on obtient facilement:

$$\Delta(m, r, 2) \leqslant (m-1)\tfrac{1}{2}(r-1) + r \leqslant \tfrac{1}{2}(r-1)(m+2) \qquad (\text{car } r \geqslant 3).$$

Puis, pour $s = 3$, le calcul donne:

$$\Delta(m, r, 3) \leqslant \left(\frac{r-1}{2}\right)^2 \frac{m(m-1)}{2} + mr \leqslant \left(\frac{r-1}{2}\right)^2 \frac{(m+3)^2}{2}.$$

Après ces majorations plus précises pour les dimensions 2 et 3, passons au cas général: supposons la propriété vraie à l'ordre s et notons $\delta(m, s)$ le majorant annoncé dans la formule du théorème 3 (ii); par application itérée du lemme 6.1, et du fait que $\delta(m, s)$ croît avec m, on obtient:

$$\Delta(m, r, s+1) \leqslant \tfrac{1}{2}(r-1)\sum_{j=2}^{m-1}\delta(j, s) + \Delta(1, r, s+1) + \tfrac{1}{2}(r-3)\,\delta(1, s) + \\ + \delta(m, s);$$

mais $\Delta(1, r, s+1) \leqslant r \leqslant \delta(1, s)$ (car $r \geqslant 3$ et $s \geqslant 2$), d'où finalement:

$$\Delta(m, r, s+1) \leqslant \tfrac{1}{2}(r-1)\sum_{j=1}^{m}\delta(j, s).$$

Le résultat découle alors de la majoration: $\sum_{j=1}^{m}(j+s)^{s-1} \leqslant (1/s)(m+s+1)^s$.

6.4. Démonstration du théorème 4 (ii). On procède comme au paragraphe 5.3, en utilisant ici le système de numération dont la base est $B_r = \{-(r-1)/2, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, (r-1)/2\}$.

L'entier N supérieur ou égal à un s'écrit $N = \sum_{m=0}^{n} N_m r^m$ avec $N_m \in B_r$; posons $T_n =]0, N_n r^n]$, et, pour $0 \leqslant m \leqslant n-1$, désignons par T_m l'intervalle d'entiers ouvert à gauche d'extrémités $\sum_{j=m}^{n} N_j r^j$ et $\sum_{j=m+1}^{n} N_j r^j$; chaque T_m est lui-même réunion (disjointe) de $|N_m|$ intervalles $T_{\mu,m}$ du type $]lr^m, (l+1)r^m]$, et d'après la propriété d'additivité (algébrique) des écarts, on a:

$$|E(P, N, X)| \leqslant \sum_{m=0}^{n}\sum_{\mu=1}^{|N_m|}|E(P, T_{\mu,m}, X)|, \qquad \text{pour tout pavé } P \in \mathscr{P}_s^*.$$

Mais la suite X étant de type $P_{r,s}$, pour chaque intervalle $T_{\mu,m}$, on a:

$$|E(P, T_{\mu,m}, X)| \leqslant \left(\frac{r-1}{2}\right)^{s-1}\frac{(m+s)^{s-1}}{(s-1)!}$$

d'après le théorème 3 (ii); il en résulte que:

$$|E(P, N, X)| \leqslant \left(\frac{r-1}{2}\right)^{s}\sum_{m=1}^{n}\frac{m^{s-1}}{(s-1)!} + O(n^{s-1}),$$

d'où

$$|E(P, N, X)| \leqslant \left(\frac{r-1}{2}\right)^{s}\frac{n^s}{s!} + O(n^{s-1});$$

or, pour N compris entre $r^n/2$ et $r^{n+1}/2$, on a $n \leqslant \dfrac{\log N}{\log r} + \dfrac{\log 2}{\log r}$, d'où le théorème 4 (ii).

6.5. Démonstration du théorème 5. Soit $P' = \prod_{k=1}^{s}[0, y_k[$ un pavé de $\mathscr{P}_s^*$; posons $P = \prod_{k=1}^{s-1}[0, y_k[$; on a alors

$$|E(P', N, X')| \leqslant |E(P, [Ny_s], X)| + 1$$

car

$$A(P', N, X') = A(P, [Ny_s], X) \qquad \text{et} \qquad N|P'| = (Ny_s)|P|.$$

Supposons r impair (le cas $r = 2$ se traiterait de la même façon) et soit n tel que $r^n/2 \leqslant N < r^{n+1}/2$; posons $N' = [Ny_s]$ et soit n' tel que $r^{n'}/2 \leqslant N' < r^{n'+1}/2$. On a alors

$$|E(P, N', X)| \leqslant \left(\frac{r-1}{2}\right)^{s-1}\frac{n'^{s-1}}{(s-1)!} + O(n'^{s-2})$$

(voir 6.4); et du fait que $n' \leqslant n$ (car $N' \leqslant N$), on a

$$|E(P', N, X')| \leqslant \left(\frac{r-1}{2}\right)^{s-1}\frac{n^{s-1}}{(s-1)!} + O(n^{s-2}),$$

ce qui donne le résultat annoncé.

Annexe. Comparaison des constantes A_s, B_s et C_s

Pour les *suites de Halton* $\varphi_{p_1 \dots p_s}$, où p_k est le k-ième nombre premier, on a:

$$A_s = \prod_{k=1}^{s} \frac{p_k - 1}{2 \log p_k} \quad \text{(voir la dernière remarque qui suit le théorème 4).}$$

Pour les *suites* LP_{τ_s} *de Sobol'*, on a:

$$B_s = \frac{2^{\tau_s}}{s!\,(\log 2)^s},$$

où τ_s est un entier vérifiant:

$$K \frac{s \log s}{\log \log s} \leqslant \tau_s \leqslant \frac{s \log s}{\log 2} + \frac{s \log \log s}{\log 2} + o(s \log \log s)$$

avec $K > 0$ (7.3, 4.5 [10]); les premières valeurs sont données ci-dessous (4.4 [10]):

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
τ_s	0	1	3	5	8	11	15	19	23	27	31	35

Pour les *suites de type* $P_{q_s,s}$, avec q_s premier nombre premier supérieur ou égal à s, on a:

$$C_2 = \frac{3}{16 (\log 2)^2} \quad \text{et} \quad C_s = \frac{1}{s!} \left(\frac{q_s - 1}{2 \log q_s} \right)^s \quad \text{pour } s \geqslant 3.$$

On en déduit le tableau suivant:

s	2	3	4	5	6	7	8	13
A_s	.65	.81	1.25	2.62	6.13	17.3	52.9	90580
B_s	1.04	1.00	1.44	1.66	3.20	5.28	15.2	647
C_s	.39	.12	.099	.024	.018	.0041	.0088	.000010

Bibliographie

[1] H. Faure, *Discrépance de suites associées à un système de numération (en dimension un)*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), p. 143–182.

[2] J. H. Halton, *On the efficiency of certain quasi-random sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals*, Numer. Math. 2 (1960), p. 84–90.

[3] J. M. Hammersley, *Monte-Carlo methods for solving multivariable problems*, Ann. New York Acad. Sci. 86 (1960), p. 844–874.

[4] E. Hlawka, *Funktionen von beschränkter Variation in der Theorie der Gleichverteilung*, Ann. Mat. Pura Appl. 54 (1961), p. 325–333.

[5] L. Kuipers et H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley and Sons, 1974.

[6] H. G. Meijer, *The discrepancy of a g-adic sequence*, Indag. Math. 30 (1968), p. 54–66.

[6a] C. Méray, *Sur un déterminant dont celui de Vandermonde n'est qu'un cas particulier*, Revue de Math. Spéciales 9 (1899), p. 217–219.

[6b] T. Muir, *History of determinants*, vol. IV, Macmillan & Co., London 1923, p. 201.

[7] H. Niederreiter, *Quasi Monte-Carlo methods and pseudo-random numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), p. 957–1041.

[8] K. F. Roth, *Irregularities of distribution*, Mathematika 1, part 2, (1954), p. 73–79.

[9] W. M. Schmidt, *On Irregularities of distribution*, Lectures in Mathematics and Physics Series, Tata Institute of Fondamental Research, Bombay 1977.

[10] I. M. Sobol', *On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals*, U.S.S.R. Computational Math. and Math. Physics 7 (1967), p. 86–112. Voir la bibliographie de [7] pour les autres publications de I. M. Sobol'.

[11] S. Srinivasan, *On two dimensional Hammersley's sequences*, J. Number Theory 10 (1978), p. 421–429.

[12] J. G. van der Corput, *Verteilungsfunktionen*, Proc. Akad. Amsterdam, 38 (1935); 39 (1936).

LABORATOIRE ASSOCIÉ AU C.N.R.S. n° 225
U.E.R. DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE PROVENCE
3, Place Victor-Hugo
13331 Marseille Cedex 3

Reçu le 20. 6. 1980
et dans la forme modifiée le 1. 12. 1980 (1212)