ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

Propriétés d'indépendance algébrique de nombres liés aux fonctions de Weierstrass

par

ERIC REYSSAT (Paris)

1. Introduction. Soient σ, ζ, $\wp$ les fonctions de Weierstrass associées à un réseau Λ de $\boldsymbol{C}$ d'invariants g_2, g_3 algébriques. Pour tout nombre complexe u n'appartenant pas au réseau Λ, et tout élément non nul ω de Λ, on définit les fonctions $g_{u,\omega}$ et s_ω par les formules

$$g_{u,\omega}(z) = \frac{\sigma(z-u)}{\sigma(z)\sigma(u)}\exp(zu\eta/\omega) \quad \text{et} \quad s_\omega(z) = \sigma(z)\exp(-z^2\eta/2\omega)$$

où η est la quasi-période de ζ associée à ω.

Les propriétés de ces fonctions ont été récemment utilisées pour obtenir des énoncés qualitatifs et quantitatifs sur la transcendance de nombres s'y rattachant (cf. [12], [13], [7], [11]).

Le but de cet article est de donner des minorations du degré de transcendance de corps engendrés sur $\boldsymbol{Q}$ par certains nombres liés aux fonctions introduites plus haut et à la fonction exponentielle. On obtient par exemple des degrés de transcendance supérieurs ou égaux à trois (th. 3 et cor. 4, 6, 7), ce qui est assez rare dans la théorie des fonctions elliptiques (voir cependant [5], théorème C).

Nous énonçons au paragraphe 2 les résultats généraux obtenus, et nous donnons au paragraphe 3 les corollaires qui en découlent dans le cas de multiplication complexe lorsqu'on utilise les formules de multiplication complexe pour les fonctions ζ et σ. Le paragraphe 4 rassemble l'essentiel des résultats auxiliaires nécessaires à la démonstration des résultats du paragraphe 2. Ceux qui ne sont pas classiques sont démontrés entièrement, excepté le lemme 8 (cf. [5]) dont la démonstration n'est pas complètement publiée. Ce lemme est utilisé uniquement dans la démonstration du théorème 3. Les démonstrations des résultats du paragraphe 2 sont esquissées puis détaillées au paragraphe 5.

2. Enoncés des principaux résultats. Le réseau Λ est fixé comme dans l'introduction. On rappelle qu'un nombre complexe u est dit sans torsion (dans $\boldsymbol{C}/\Lambda$) si le nombre nu n'appartient à Λ pour aucun entier non nul n. On dit que u est un point algébrique de $\wp$ si $\wp(u$ est défini et algébrique.

THÉORÈME 1. *Soient u et v deux nombres complexes sans torsion dis tincts modulo Λ; soit ω une période non nulle de $\wp$, et η la quasi-périod de ζ associée à ω. Alors parmi les cinq nombres*

$$\wp(u), \quad \wp(v), \quad \zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u, \quad \exp(i\pi u/\omega), \quad g_{u,\omega}(v)$$

deux au moins sont algébriquement indépendants. En particulier, si u et v sont deux points algébriques de $\wp$ sans torsion, deux des trois nombres

$$\zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u, \quad \exp(i\pi u/\omega), \quad g_{u,\omega}(v)$$

sont algébriquement indépendants.

On en déduit le résultat suivant

COROLLAIRE 2. *Soient u un point algébrique de $\wp$ sans torsion, et ω une période non nulle de $\wp$. Alors deux au moins des trois nombres*

$$\exp(i\pi u/\omega), \quad s_\omega(u), \quad s'_\omega(u)$$

sont algébriquement indépendants.

THÉORÈME 3. *Soient u et v deux nombres complexes sans torsion distincts modulo Λ; soient ω, ω' deux périodes de $\wp$ linéairement indépendantes sur $\boldsymbol{Q}$, $\tau = \omega'/\omega$, et soit η la quasi-période de ζ associée à ω. Alors parmi les dix nombres*

$$\wp(u), \ \wp(v), \ \frac{\pi}{\omega}, \ \frac{\eta}{\omega}, \ \zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u, \ \zeta(v)-\frac{\eta}{\omega}v, \ e^{i\pi\tau}, \ e^{i\pi u/\omega}, \ e^{i\pi v/\omega}, \ g_{u,\omega}(v)$$

trois au moins sont algébriquement indépendants.

On en déduit le

COROLLAIRE 4. *Sous les hypothèses du théorème 3, et si u est de plus un point algébrique de $\wp$, trois des six nombres*

$$\frac{\pi}{\omega}, \ \frac{\eta}{\omega}, \ e^{i\pi\tau}, \ e^{i\pi u/\omega}, \ s_\omega(u), \ s'_\omega(u)$$

sont algébriquement indépendants.

Remarques. 1. On peut donner un autre corollaire du théorème 3, analogue au corollaire 4, en terme des variables $q = e^{2i\pi\tau}$ et $q_z = e^{2i\pi z}$. Considérons pour cela les deux opérateurs différentiels

$$\theta = q\frac{d}{dq} \quad \text{et} \quad \theta_1 = q_z\frac{d}{dq_z}$$

agissant sur les fonctions des variables q et q_z. Soit $J(q) = j(\tau)$ la fonction invariant modulaire. Des formules explicites (cf. [2]) montrent que si $J(q)$ est algébrique différent de 0 et 1728, alors

$$\overline{\boldsymbol{Q}(\theta J(q))} = \overline{\boldsymbol{Q}(\pi/\omega)} \quad \text{et} \quad \overline{\boldsymbol{Q}(\theta J(q),\ \theta^2 J(q))} = \overline{\boldsymbol{Q}(\pi/\omega, \eta/\omega)}$$

où la barre horizontale désigne la clôture algébrique dans $\boldsymbol{C}$. Par ailleurs, il résulte des formules d'homogénéité des fonctions σ et ζ (cf. [6]) et de la périodicité de la fonction s_ω que la formule

$$S(q_z, q) = \frac{2i\pi}{\omega}s_\omega(\omega z)$$

définit une fonction S de q_z et q. On a évidemment

$$\theta_1 S(q_z, q) = s'_\omega(\omega z).$$

De plus, d'après le q-développement de la fonction $\wp$ (cf. [6]) la formule

$$P(q_z, q) = \left(\frac{\omega}{2i\pi}\right)^2 \wp(\omega z)$$

définit aussi une fonction P de q_z et q. Enfin, il est équivalent de dire que le nombre z est sans torsion ou que les nombres q et q_z sont multiplicativement indépendants.

On obtient donc l'analogue suivant du corollaire 4:

On suppose que q et q_z sont multiplicativement indépendants, que $P(q_z, q)$ et $J(q)$ sont algébriques et que $J(q)$ est différent de 0 et 1728. Alors trois des six nombres

$$q, \ \theta J(q), \ \theta^2 J(q), \ q_z, \ S(q_z, q), \ \theta_1 S(q_z, q)$$

sont algébriquement indépendants.

D. Bertrand a conjecturé dans [2] que les trois nombres q, $\theta J(q)$, $\theta^2 J(q)$ eux mêmes sont algébriquement indépendants.

2. Il st enfin intéressant de noter que si les résultats concernant la nature arithmétique des valeurs des fonctions $g_{u,\omega}$ et s_ω sont très récents (voir l'introduction), la fonction $S(q_z)$ de la remarque précédente (pour q fixé tel que $J(q)$ soit algébrique) a déjà été utilisée en théorie des nombres transcendants: ainsi Mahler (cf. [8], § 141) utilise le développement de Taylor à l'origine de $S(q_z)$ pour déduire d'un résultat de Popken sur les séries formelles que l'un des nombres π/ω, η/ω est transcendant (bien que le résultat de Schneider disant que chacun est transcendant fût déjà connu; on sait maintenant que ces deux nombres sont algébriquement indépendants).

3. Le cas de multiplication complexe. Lorsque $\wp$ admet une multiplication complexe, il existe des relations algébriques liant certains des nombres considérés plus haut. Les principales découlent des formules de multiplication complexe des fonctions $\wp$, ζ, et σ que nous rappelons maintenant.

PROPOSITION 5. *Soient ω et ω' deux périodes non nulles de $\wp$, et η et η' les quasi-périodes correspondantes de ζ; on note $\tau = \omega'/\omega$. On suppose que τ et $\bar\tau$ sont les deux racines du polynôme $A+BX+CX^2$ où $A, B, C \in \mathbf{Z}$, $C > 0$, et que $C\tau\Lambda \subset \Lambda$. Il existe des polynômes $P, Q \in \mathbf{Q}(g_2, g_3, \tau)[X]$ vérifiant les propriétés suivantes:*

(1) *Si S est un système de représentants de $\dfrac{1}{C\tau}\Lambda\setminus\Lambda$ modulo Λ, alors*

$$Q(X) = \prod_{s\in S}\big(X-\wp(s)\big) = X^{AC-1}+\gamma X^{AC-2}+\ldots$$

où $\gamma = -\sum_S \wp(s) = \dfrac{C}{\omega}(A\eta - C\tau\eta')$;

$$P(X) = (C\tau)^{-2}\,(X^{AC}+\gamma X^{AC-1}+\ldots),$$

(2) $$\wp(C\tau z) = P\big(\wp(z)\big)/Q\big(\wp(z)\big),$$

(3) $$\sigma(C\tau z)^2 = (C\tau)^2\sigma(z)^{2AC}e^{-\gamma z^2}Q\big(\wp(z)\big),$$

(4) $$C\tau\zeta(C\tau z) = AC\zeta(z)-\gamma z+\wp'(z)Q'\big(\wp(z)\big)/2Q\big(\wp(z)\big).$$

Remarque. Cette proposition est utile en pratique dans deux cas particuliers:

(a) τ est entier rationnel et $A+BX+CX^2 = (X-\tau)^2$,

(b) (ω, ω') est une base du réseau Λ qui admet une multiplication complexe par τ, et $A+BX+CX^2$ est le polynôme minimal de τ sur $\mathbf{Z}$.

Démonstration de la proposition. On choisit une base (ω_1, ω_2) de Λ telle que $\omega = n\omega_1$ ($n\in \mathbf{N}$). On note H la fonction qui à toute période de Λ associe la quasi-période de ζ correspondante. Ainsi

$$H(\omega_1) = \eta/n \quad \text{et} \quad H(C\tau\omega_1) = C\eta'/n.$$

On définit le nombre γ par

$$\gamma = (A\eta - C\tau\eta')C/\omega,$$

et la fonction f par

$$f(z) = (C\tau)^{-2}\,\sigma(C\tau z)^2\sigma(z)^{-2AC}e^{\gamma z^2}.$$

Alors, d'après les formules de pseudo-périodicité de la fonction σ, on a

$$f(z+\omega_i)/f(z) = \exp\big\{\big(C\tau H(C\tau\omega_i)-ACH(\omega_i)+\gamma\omega_i\big)(2z+\omega_i)\big\} \qquad (i = 1, 2).$$

Or,

$$\gamma\omega_1 = ACH(\omega_1) - C\tau H(C\tau\omega_1)$$

ce qui montre que ω_1 est période de f.

Par ailleurs, en appliquant la formule de Legendre aux deux parallélogrammes homothétiques de sommets $(\pm\omega_1\pm\omega_2)/2$ et $(\pm C\tau\omega_1\pm C\tau\omega_2)/2$, on obtient

$$C\tau\omega_1H(C\tau\omega_2)-C\tau\omega_2H(C\tau\omega_1) = |C\tau|^2\big(\omega_1H(\omega_2)-\omega_2H(\omega_1)\big).$$

Puisque

$$|C\tau|^2 = C^2\tau\bar\tau = AC$$

on en déduit donc que

$$C\tau H(C\tau\omega_2)-ACH(\omega_2)+\gamma\omega_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}\big(C\tau H(C\tau\omega_1)-ACH(\omega_1)+\gamma\omega_1\big) = 0$$

ce qui montre que ω_2 est période de f. Ainsi, f est une fonction elliptique par rapport à Λ, paire, et sans pôle en dehors de Λ.

Donc $f(z) = Q\big(\wp(z)\big)$ où $Q\in \mathbf{C}[X]$. Le développement de Laurent de f en 0 montre que $Q = X^{AC-1}+\gamma X^{AC-2}+\ldots$ On déduit de l'étude des zéros de f que $Q = \prod_S\big(X-\wp(s)\big)$. La fonction

$$h(z) = \wp(C\tau z)\,Q\big(\wp(z)\big)$$

est encore elliptique paire sans pôle hors de Λ d'où l'existence d'un polynôme $P\in \mathbf{C}[X]$ vérifiant (2). Le développement de h à l'origine montre que $P = (C\tau)^{-2}(X^{AC}+\gamma X^{AC-1}+\ldots)$. Il montre aussi que les coefficients de P et Q sont solutions d'un système linéaire à coefficients dans $\mathbf{Q}(g_2, g_3, \tau)$, donc appartiennent à ce corps. Enfin on obtient (4) par dérivation logarithmique de (3). La proposition est ainsi démontrée.

Sous les mêmes hypothèses, on déduit de (3) qu'il existe une fraction rationnelle $R\in \mathbf{Q}(g_2, g_3, \tau)(X)$ telle que

$$g_{u,\omega}(\tau u)^2 = \sigma(u/C)^{2BC}\exp\left(\Big(2ni\pi - \frac{B}{C}\,\omega\eta\Big)u^2/\omega^2\right)R\big(\wp(u/C)\big)$$

où $n = (\omega'\eta-\omega\eta')/2i\pi$ est un entier.

En particulier, lorsque τ est imaginaire pur, on obtient

(5) $$g_{u,\omega}(\tau u)^2 = \exp(2ni\pi u^2/\omega^2)R\big(\wp(u/C)\big).$$

Nous pouvons maintenant appliquer les résultats du paragraphe 2 au cas de multiplication complexe. D'après (2), (3), (4), (5) et le fait que le nombre γ est algébrique, on déduit facilement des théorèmes 1 et 3 le

COROLLAIRE 6. *Soient $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ le corps de multiplication complexe de $\wp$, u un nombre complexe sans torsion, ω une période non nulle de $\wp$ et η la quasi-période associée. Alors*

(1) *Deux des nombres*

$$\wp(u),\ \zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u,\ e^{i\pi u/\omega},\ e^{i\pi u^2/\omega^2}$$

sont algébriquement indépendants.

(2) *Trois des nombres*

$$\omega,\ \pi,\ u,\ \wp(u),\ \zeta(u),\ e^{\pi\sqrt{d}},\ e^{i\pi u/\omega},\ e^{\pi\sqrt{d}u/\omega},\ e^{i\pi u^2/\omega^2}$$

sont algébriquement indépendants.

(3) *En particulier, si p est un entier rationnel tel que les nombres $-dp$ et p ne soient pas des carrés dans $\mathbf{Z}$ (par exemple $p=2$), alors deux des trois nombres*

$$e^{i\pi\sqrt{p}},\ \wp(\omega\sqrt{p}),\ \zeta(\omega\sqrt{p})-\eta\sqrt{p}$$

sont algébriquement indépendants, ainsi que trois des sept nombres

$$\omega,\ \pi,\ e^{\pi\sqrt{d}},\ e^{i\pi\sqrt{p}},\ e^{\pi\sqrt{dp}},\ \wp(\omega\sqrt{p}),\ \zeta(\omega\sqrt{p}).$$

On en déduit que si de plus g_2, g_3 et ω sont réels et si $p>0$, alors les deux nombres

$$e^{i\pi\sqrt{p}} \quad \text{et} \quad \wp(\omega\sqrt{p})+i\big(\zeta(\omega\sqrt{p})-\eta\sqrt{p}\big)$$

sont algébriquement indépendants. En effet, dans le cas contraire le nombre $\wp(\omega\sqrt{p})+i\big(\zeta(\omega\sqrt{p})-\eta\sqrt{p}\big)$ est algébrique sur $\mathbf{Q}(e^{i\pi\sqrt{p}})$ car $e^{i\pi\sqrt{p}}$ est transcendant. Par conjugaison, $\wp(\omega\sqrt{p})-i\big(\zeta(\omega\sqrt{p})-\eta\sqrt{p}\big)$ est algébrique sur $\mathbf{Q}(e^{-i\pi\sqrt{p}})=\mathbf{Q}(e^{i\pi\sqrt{p}})$. Il en est donc de même des deux nombres $\wp(\omega\sqrt{p})$ et $\zeta(\omega\sqrt{p})-\eta\sqrt{p}$, ce qui est absurde.

Par exemple, dans le cas où $g_2=4$, $g_3=0$, les deux nombres $e^{i\pi\sqrt{2}}$ et $\wp(t)+i\big(\zeta(t)-2\pi/t\big)$ avec $t=\Gamma(1/4)^2/2\sqrt{\pi}$ sont algébriquement indépendants.

Remarquons enfin que dans le cas de multiplication complexe par i, on déduit du corollaire 4 que si u est un point algébrique de $\wp$ sans torsion, et si ω est une période non nulle de $\wp$, trois des six nombres

$$\omega,\ \pi,\ e^{\pi},\ e^{i\pi u/\omega},\ s_\omega(u),\ s'_\omega(u)$$

sont algébriquement indépendants.

4. Lemmes auxiliaires. Nous rassemblons dans cette section les outils essentiels dont nous nous servirons au cours des démonstrations des théorèmes 1 et 2. Nous utiliserons en particulier un certain nombre de propriétés fondamentales des fonctions $g_{u,\omega}$ (lemmes 1 à 6) ainsi que deux résultats de la théorie des nombres transcendants (lemmes 7 et 8).

LEMME 1. *Soient u un nombre complexe n'appartenant pas à Λ, et ω un élément non nul de $\Lambda\setminus 2\Lambda$. Alors le nombre $g_{u,\omega}(\omega/2)$ est algébrique sur le corps $\mathbf{Q}(\wp(u))$.*

Démonstration. On déduit de la formule de multiplication de la fonction σ (voir (3) avec $\tau\in\mathbf{Z}$) que le nombre $\sigma(\omega/2)e^{-\omega\eta/8}$ est algébrique, et que $e^{\eta(-u/2+\omega/8)}\sigma\left(\frac{\omega}{2}-u\right)/\sigma(u)$ est algébrique sur le corps $\mathbf{Q}(\wp(u))$, d'où le résultat.

LEMME 2. *Soient k, L deux entiers $\geqslant 0$. On note*

$$G(z)=2^k\big(\wp(z)-\wp(u)\big)^k g^L_{u,\omega}(z).$$

Alors

$$G^{(k)}(z)=g^L_{u,\omega}(z)P\left(\wp(z),\wp'(z),\wp''(z),\wp(u),\wp'(u),\zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u\right)$$

où P est un polynôme à coefficients entiers rationnels, de degré $\leqslant 2k$ et de hauteur $\leqslant (Lk)^{c_0k}$, où c_0 est une constante absolue.

Démonstration. Le lemme s'établit par récurrence en utilisant l'équation différentielle vérifiée par la fonction $g_{u,\omega}$:

$$g'_{u,\omega}(z)=g_{u,\omega}(z)\left\{\frac{\eta}{\omega}u-\zeta(u)+\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(z)+\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}\right\}$$

(cf. [11], lemme 4).

LEMME 3. *Notons $z_0=-u$ et $g=g_{u,\omega}$; alors*

$$\frac{g(z_1+z_2)}{g(z_1)g(z_2)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2}\frac{\wp'(z_i)}{\big(\wp(z_i)-\wp(z_{i-1})\big)\big(\wp(z_i)-\wp(z_{i+1})\big)}$$

où l'on prend les indices modulo 3, et où le signe $=$ désigne l'égalité entre fonctions méromorphes. En particulier

$$g(2z)=g^2(z)\frac{1}{\big(\wp(z)-\wp(u)\big)}\left\{\frac{\wp'(z)+\wp'(u)}{\wp(z)-\wp(u)}-\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right\}.$$

Démonstration. Cf. [11], lemme 5.

LEMME 4. *Pour tout entier $m>0$, il existe des polynômes P_m et Q_m vérifiant:*

(i) $g_{u,\omega}(mz)=g^m_{u,\omega}(z)\dfrac{P_m}{Q_m}\big(\wp(z),\wp'(z),\wp(u),\wp'(u)\big)$.

(ii) *Ces polynômes sont de degré $\leqslant c_1m^2$ et leurs coefficients sont des éléments de $\mathbf{Z}[g_2,g_3]$ de taille $\leqslant c_1m^2$, où c_1 ne dépend que de $\wp$.*

(iii) *Soit v un nombre complexe sans torsion distinct de $\pm u$ modulo Λ; alors*

$$Q_m\big(\wp(v),\wp'(v),\wp(u),\wp'(u)\big)\neq 0.$$

Démonstration. Récurrence à partir du lemme précédent (cf. [11], corol. 6).

LEMME 5. *Soient u un nombre complexe sans torsion, et ω un élément non nul de Λ. Les quatre fonctions*

$$\wp(z),\ \exp(2i\pi z/\omega),\ \zeta(z)-\frac{\eta}{\omega}z,\ g_{u,\omega}(z)$$

sont algébriquement indépendantes.

Démonstration. On obtient facilement le résultat en étudiant le comportement des 4 fonctions aux points $z_0+n\omega'$ où ω' est une période de $\wp$ non colinéaire à ω, et z_0 est fixé, puis en utilisant le fait que la fonction $\wp$ est transcendante. Le résultat est en fait un corollaire d'un énoncé beaucoup plus précis de M. Laurent (cf. [7], lemme 5.5).

LEMME 6. *Soient u un nombre complexe sans torsion, et ω une période non nulle de $\wp$; on note $g=g_{u,\omega}$. Il existe une constante c_2 ne dépendant que de $\wp$, u, ω telle que pour tout polynôme $P\in \mathbf{C}[X_1, X_2]$ non nul de degré en X_i au plus L_i (avec $L_i\geqslant 2$) et pour tout réel $r\geqslant 1$, le nombre $n(F,r)$ de zéros de la fonction $F(z)=P(\wp(z),g(z))$ dans le disque de centre 0 et de rayon r vérifie*

$$n(F,r)\leqslant c_2(L_1+L_2)(L_2^2+r^2+\log L_1).$$

Démonstration. Les constantes $c_3,\ldots,c_{11}$ ne dépendent que de $\wp$, u, ω. En appliquant le lemme de Schwarz (cf. par exemple [14], chap. 1) à la fonction

$$G(z)=\sigma(z)^{2L_1+L_2}F(z)$$

on obtient pour $R\geqslant r$

$$n(F,r)\leqslant n(G,R)\leqslant \log|G|_{3eR}-\log|G|_R.$$

Les fonctions σ, $\sigma^2\wp$ et σg étant d'ordre 2, on a

$$|G|_{3eR}\leqslant c_3^{(L_1+L_2)R^2}H(P)$$

où $H(P)$ est la hauteur du polynôme P. Soit ω' une période primitive de $\wp$ non colinéaire à ω. Notons $\alpha=g(z+\omega')/g(z)$ (indépendant de z). Pour tout couple (r_1,r_2) d'entiers vérifiant $0\leqslant r_i\leqslant L_i$, posons

$$z(r_1,r_2)=\frac{\omega'}{4}+\frac{r_1}{L_1}\varepsilon+r_2\omega'$$

où ε est un réel positif assez petit. Ecrivons le polynôme P sous la forme

$$P=\sum_{\lambda_1=0}^{L_1}\sum_{\lambda_2=0}^{L_2}p(\lambda_1,\lambda_2)X_1^{\lambda_1}X_2^{\lambda_2}.$$

Alors

$$F(z(r_1,r_2))=\sum_{\lambda_2=0}^{L_2}q(\lambda_2,r_1)\left(\alpha^{r_2}g\left(\frac{\omega'}{4}+\frac{r_1}{L_1}\varepsilon\right)\right)^{\lambda_2}$$

où

$$q(\lambda_2,r_1)=\sum_{\lambda_1=0}^{L_1}p(\lambda_1,\lambda_2)\wp\left(\frac{\omega'}{4}+\frac{r_1}{L_1}\varepsilon\right)^{\lambda_1}.$$

Or, $\omega'/4$ n'est ni zéro ni pôle de g, donc si ε est assez petit (indépendamment de L_1, L_2 et r), alors

$$\left|\log\left|g\left(\frac{\omega'}{4}+\frac{r_1}{L_1}\varepsilon\right)\right|\right|$$

est majoré par une constante. On déduit alors de la formule d'interpolation de Lagrange (cf. [9], lemme 1.3) que

$$\max_{\lambda_2,r_1}|q(\lambda_2,r_1)|\leqslant c_4^{L_2^2}\max_{r_1,r_2}|F(z(r_1,r_2))|.$$

Par ailleurs, puisque $\wp'(z)$ ne s'annule pas au voisinage de $\omega'/4$, on a pour ε assez petit

$$\max_{r_1}\left|\wp\left(\frac{\omega'}{4}+\frac{r_1}{L_1}\varepsilon\right)\right|\leqslant c_5\quad \text{et}\quad \min_{r_1\neq r_1'}\left|\wp\left(\frac{\omega'}{4}+\frac{r_1}{L_1}\varepsilon\right)-\wp\left(\frac{\omega'}{4}+\frac{r_1'}{L_1}\varepsilon\right)\right|\geqslant L_1^{-c_6}.$$

En appliquant une nouvelle fois la formule d'interpolation de Lagrange, on en déduit que

$$H(P)=\max_{\lambda_1,\lambda_2}|p(\lambda_1,\lambda_2)|\leqslant c_7^{L_1\log L_1}\max_{\lambda_2,r_1}|q(\lambda_2,r_1)|$$

d'où

$$H(P)\leqslant c_8^{L_2^2+L_1\log L_1}\max_{r_1,r_2}|F(z(r_1,r_2))|.$$

D'autre part, le point $z(r_1,r_2)$ étant construit loin des zéros de σ, on a pour $r_i\leqslant L_i$ et $R\geqslant|\omega'|(L_2+1)$

$$|F(z(r_1,r_2))|=|\sigma(z(r_1,r_2))^{-2L_1-L_2}G(z(r_1,r_2))|\leqslant c_9^{(L_1+L_2)L_2}|G|_R.$$

Ainsi

$$H(P)\leqslant c_{10}^{(L_1+L_2)L_2+L_1\log L_1}|G|_R$$

et donc

$$n(F,r)\leqslant c_{11}\{(L_1+L_2)(L_2+R^2)+L_1\log L_1\}$$

d'où le résultat.

Nous énonçons maintenant le critère de transcendance de Gel'fond que nous utiliserons pour démontrer le théorème 1. La démonstration est esquissée dans [15]; toute autre version classique de ce critère (cf.

par exemple [14], [3]) serait suffisante pour la démonstration du théorème 1.

Lemme 7. *Soient θ un nombre complexe et (t_N) une suite croissante de nombres réels tendant vers $+\infty$. On suppose qu'il existe une suite (P_N) de polynômes de $\boldsymbol{Z}[X]$ vérifiant*

$$\deg(P_N)+\log H(P_N)\leqslant t_N \quad \text{et} \quad \log|P_N(\theta)|\leqslant -3t_{N+1}^2 \quad \text{pour } N\geqslant N_0.$$

Alors le nombre θ est algébrique.

Nous aurons enfin besoin des notion de taille et de type de transcendance. Tout sous-corps $\mathscr{K}$ de $\boldsymbol{C}$ de type fini sur $\boldsymbol{Q}$ est de la forme $\boldsymbol{Q}(x_1, \ldots, x_q, y)$ où $x_1, \ldots, x_q$ sont algébriquement indépendants sur $\boldsymbol{Q}$ et y est entier de degré d sur $\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q]$. Cela permet d'écrire tout élément a de $\mathscr{K}$ sous la forme (non unique)

$$a=\frac{1}{P_0}\sum_{i=0}^{d}P_iy^{i-1} \quad \text{où} \quad P_i\in\boldsymbol{Z}[x_1, \ldots, x_q].$$

On peut ainsi définir la taille $t(a)$ d'un élément non nul a de $\mathscr{K}$ (relative au système générateur $x_1, \ldots, x_q, y$) comme étant la valeur minimale de $\max_{i,j}\big(1+\deg_{x_j}P_i, \log H(P_i)\big)$.

Soit τ un nombre réel $\geqslant 1$. On dit que $\mathscr{K}$ a un type de transcendance $\leqslant\tau$ sur $\boldsymbol{Q}$ s'il existe une constante c dépendant de $(x_1, \ldots, x_q, y)$ telle que tout élément a non nul de $\mathscr{K}$ vérifie

$$\log|a|\geqslant ct(a)^\tau.$$

On montre que cela ne dépend pas du système générateur choisi, et reste aussi vrai pour les sous-corps et les extensions algébriques finies de $\mathscr{K}$. Pour ces résultats et les propriétés classiques de la taille, nous renvoyons à [14].

La démonstration du théorème 3 utilisera alors le résultat suivant, qui découle du théorème C de [5]:

Lemme 8. *Soient ω une période non nulle de $\wp$, et η la quasi-période associée. Le corps $\boldsymbol{Q}\left(\frac{\pi}{\omega}, \frac{\eta}{\omega}\right)$ a un type de transcendance $<35/11$.*

5. Les démonstrations. Nous prouvons ici les résultats annoncés au paragraphe 2. Les démonstrations des théorèmes 1 et 3, un peu longues et techniques, seront d'abord esquissées. Chacune de ces deux démonstrations utilisera un certain nombre de constantes qui seront indépendamment numérotées à partir de c_1 (et indépendamment des constantes $c_0, \ldots, c_{11}, c$ des lemmes auxiliaires).

5.1. Démonstration des corollaires 2 et 4. Pour démontrer le corollaire 2, notons $v=u/2$. Puisque u est sans torsion, le nombre v est aussi sans torsion et distinct de u modulo Λ. De plus v est encore un point algébrique de $\wp$. D'après le théorème 1, le corps engendré par les trois nombres

$$\zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u, \quad e^{i\pi u/\omega}, \quad g_{u,\omega}(u/2)$$

a un degré de transcendance supérieur ou égal à 2. Or,

$$g_{u,\omega}(u/2)=1/s_\omega(u)$$

et

$$\zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u=s'_\omega(u)/s_\omega(u)$$

d'où le résultat.

La démonstration du corollaire 4 est analogue, en posant encore $v=u/2$ et en utilisant le théorème 3; on se sert des égalités précédentes et du fait que le nombre $\zeta(u)-\frac{\eta}{\omega}u-2\left(\zeta(v)-\frac{\eta}{\omega}v\right)$ est algébrique puisque v est un point algébrique de $\wp$.

Remarque. Il est également possible de prouver les corollaires 2 et 4 en choisissant $v=2u$, ou bien en se ramenant au cas où $\omega/2\notin\Lambda$ puis en choisissant $v=u+\omega/2$.

5.2. Démonstration du théorème 1. Le principe de la démonstration est le suivant: on suppose que le corps engendré sur $\boldsymbol{Q}$ par les cinq nombres du théorème 1 a un degré de transcendance au plus 1 (donc exactement 1 d'après un résultat de Choodnovsky) et par suite est de la forme $\boldsymbol{Q}(x, y)$ où x est transcendant et y est algébrique sur $\boldsymbol{Q}(x)$. On construit une suite de fonctions auxiliaires $F_N(z)=P_N\big(\wp(z), g_{u,\omega}(z)\big)$ où P_N est un polynôme non nul à coefficients dans $\boldsymbol{Q}(x, y)$ dépendant d'un paramètre N, de telle sorte que le degré et les coefficients de P_N ne soient pas trop grands et que F_N ait un zéro d'ordre élevé (fonction de N) aux points $\omega/2+\omega'+hv$ pour beaucoup de valeurs de $\omega'\in\Lambda$ et de $h\in\boldsymbol{Z}$. La fonction F_N ne pouvant avoir trop de zéros dans un disque donné (cf. lemme 6), on en déduit qu'on peut trouver une valeur $\gamma_0=F_N^{(k_0)}(z_0)\neq 0$ où $z_0=\omega/2+\omega'_0+h_0v$ avec une majoration de k_0, $|\omega'_0|$, $|h_0|$. Ce nombre γ_0 est très petit grâce au lemme de Schwarz car F_N a beaucoup de zéros. Par ailleurs, γ_0 est un élément de $\boldsymbol{Q}(x, y)$ de taille majorée (grâce aux majorations de k_0, $|\omega'_0|$, $|h_0|$ ainsi que du degré et des coefficients de P); il fournit alors par un argument de norme un polynôme $Q_N(x)$ vérifiant les conditions du critère de Gel'fond (lemme 7). On en déduit que x est algébrique, d'où la contradiction cherchée.

Nous donnons maintenant la démonstration plus détaillée. Il est clair qu'on peut se restreindre au cas où ω est une période primitive de $\wp$ (en divisant ω par un entier convenable, ce qui ne change pas η/ω et transforme $e^{i\pi u/\omega}$ en une de ses puissances entières) et où $u \notin \Lambda \oplus \boldsymbol{Z}v$ (quitte à remplacer v par $2mv$ si $u \equiv mv \bmod \Lambda$ et à utiliser le lemme 4). On note $\mathscr{K}$ le corps engendré sur $\boldsymbol{Q}$ par les nombres g_2, g_3, $\wp(u)$, $\wp(v)$, $\zeta(u)-(\eta/\omega)u$, $e^{i\pi u/\omega}$, $g_{u,\omega}(v)$, $\wp'(u)$, $\wp'(v)$, $g_{u,\omega}(\omega/2)$, $\wp(\omega/2)$. Le corps $\mathscr{K}$ a même degré de transcendance que le corps engendré sur $\boldsymbol{Q}$ par les nombres considérés dans l'énoncé du théorème 1 (cf. lemme 1). On suppose alors par l'absurde que ce degré de transcendance est inférieur ou égal à un et on cherche à obtenir une contradiction. Ainsi $\mathscr{K} = \boldsymbol{Q}(x, y)$ où y est entier sur $\boldsymbol{Z}[x]$. Nous supposerons, sans restreindre la généralité, que x est transcendant ou égal à 1 (on pourrait montrer directement que x est transcendant en utilisant le fait que l'un des deux nombres $\wp(u)$, $\zeta(u)-(\eta/\omega)u$ est transcendant (cf. [4]) mais cela n'est pas nécessaire). On notera alors $t(a)$ la taille d'un élément non nul a de $\mathscr{K}$ relative au système générateur (x, y) ou y suivant que x est transcendant ou non.

Pour tout entier N suffisamment grand, on définit les paramètres suivants dépendant de N:

$$K = N^8,\ L_1 = [N^{5,7}],\ L_2 = [N^{5,4}],$$
$$H_1 = [N^{5,1}],\ H_2 = N^2,\ H_2' = [N^{2,5}],\ H_3 = N.$$

Toutes les constantes $c, c_1, \ldots$ qui suivent sont indépendantes de N, ainsi que celles impliquées par le signe $\ll$.

Remarquons dès maintenant que si c est une constante > 0, les inégalités suivantes sont vérifiées pourvu que N soit suffisamment grand en fonction de c:

$$L_1 L_2 > cKH_2H_3 \tag{8}$$

qui assure que l'on peut construire la fonction auxiliaire F grâce au lemme de Siegel (résolution d'un système linéaire);

$$KH_1H_2'H_3 > c(L_1+L_2)(L_2+H_1+H_2'+H_3)^2 \tag{9}$$

qui permettra de montrer que F ne peut avoir plus de $KH_1H_2'H_3$ zéros dans un disque de rayon $H_1+H_2'+H_3$ grâce au lemme 6;

$$KH_1H_2H_3 > c\big((L_1+L_2)(H_1+H_2'+H_3)^2+K\log K\big) \tag{10}$$

d'où l'on déduira grâce au lemme de Schwarz que puisque F a beaucoup de zéros par construction, la "première valeur non nulle de ses dérivées" est un nombre très petit, malgré la croissance de F et la taille de ses coefficients;

$$KH_1H_2H_3 > c\big(K\log K+L_2H_2'+(L_1+L_2)H_3^2\big)^{2+\varepsilon} \tag{11}$$

pour ε assez petit (indépendant de N), ce qui montrera que le nombre construit précédemment est (après normalisation) un polynôme en x assez petit en fonction de sa taille pour vérifier les hypothèses du critère de transcendance de Gel'fond.

Nous construisons maintenant la fonction auxiliaire F, polynôme en $\wp$ et $g = g_{u,\omega}$. Considérons d'abord les monômes

$$F_\lambda(z) = \wp(z)^{\lambda_1} g(z)^{\lambda_2} \quad \text{où} \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2),\ 0 \leqslant \lambda_i \leqslant L_i.$$

Nous aurons besoin d'exprimer les valeurs $F_\lambda^{(k)}(\omega/2+h_2\omega'+h_3v)$ où ω' désigne une période de $\wp$ non colinéaire à ω. Du point de vue technique (cf. [10]) il est avantageux pour les estimations d'exprimer un tel nombre comme valeur au point $\omega/2$ de la k-ième dérivée de la fonction $F_\lambda(z+h_2\omega'+h_3v)$. Nous commençons par étudier cette fonction; on notera $a = g(z+\omega')/g(z)$ qui est une puissance indépendante de z de $e^{i\pi u/\omega}$ et donc est un élément de $\mathscr{K}$.

Lemme 9. *Soient $\lambda_1, \lambda_2, h_2, h_3$ des entiers naturels vérifiant $\lambda_i \leqslant L_i$ $(i = 1, 2)$ et $h_3 \leqslant H_3$. Alors*

$$F_\lambda(z+h_2\omega'+h_3v) = \big(g(z)g(v)^{h_3}a^{h_2}\big)^{\lambda_2}\frac{P_{\lambda,h}(z)}{Q_h(z)}$$

où $P_{\lambda,h}(z)$ et $Q_h(z)$ sont des polynômes en $\wp(u)$, $\wp'(u)$ (degré partiel $\ll L_2H_3^2$); $\wp(v)$, $\wp'(v)$ (d.p. $\ll (L_1+L_2)H_3^2$); $\wp(z)$, $\wp'(z)$ (d.p. $\ll L_1+L_2$); g_2, g_3 (d.p. $\ll (L_1+L_2)H_3^2$) et dont les coefficients sont des entiers rationnels dont le logarithme des valeurs absolues est $\ll (L_1+L_2)H_3^2$. De plus, on peut supposer que Q_h est indépendant de λ et que $Q_h(\omega/2) \neq 0$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les formules d'addition et de multiplication des fonctions $\wp$ et g (prop. 5 et lemmes 3 et 4) et d'utiliser le fait que v est sans torsion et que $u \notin \Lambda \oplus \boldsymbol{Z}v$ pour montrer que $Q_h(\omega/2) \neq 0$. Pour voir que Q_h peut être choisi indépendant de λ, il suffit de remarquer qu'on peut choisir pour Q_h le produit (respectivement L_1 et L_2 fois) des polynômes Q_h correspondant aux couples $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 0)$ et $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 1)$.

L'équation différentielle de la fonction g faisant apparaître des dénominateurs, il est commode d'introduire la notation suivante (suggérée par le lemme 2): pour $0 \leqslant k \leqslant K$ et avec les notations du lemme précédent, on note

$$\begin{aligned}\psi_{h,\lambda,k}(z) &= 2^k\big(\wp(z)-\wp(u)\big)^k Q_h(z)F(z+h_2\omega'+h_3v)\\ &= 2^k\big(\wp(z)-\wp(u)\big)^k P_{\lambda,h}(z)\big(g(z)g(v)^{h_3}a^{h_2}\big)^{\lambda_2}.\end{aligned}$$

Lemme 10. *Le système*

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L_1}\sum_{\lambda_2=0}^{L_2} p(\lambda_1, \lambda_2)\psi_{h,\lambda,k}^{(k)}(\omega/2) = 0 \tag{12}$$
$$0 \leqslant k \leqslant K, \quad 0 \leqslant h_i \leqslant H_i\ (i = 2, 3)$$

admet une solution non triviale $p(\lambda) = p(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{Z}[x, y]$, *vérifiant*

$$t(p(\lambda)) \leqslant K \log K.$$

Démonstration. On écrit d'après la formule de Leibnitz

$$\psi_{h,\lambda,k}^{(k)}(z) = \big(g(v)^{h_3}\alpha^{h_2}\big)^{\lambda_2}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}2^k\big\{(\wp(z)-\wp(u))^k g(z)^{\lambda_2}\big\}^{(p)}P_{\lambda,h}^{(k-p)}(z).$$

D'après le lemme 2 et les estimations classiques pour les dérivées de la fonction $\wp$ (cf. [1], lemme 2) on en déduit que

$$\psi_{h,\lambda,k}^{(k)}(z) = \big(g(z)g(v)^{h_3}\alpha^{h_2}\big)^{\lambda_2}P_{h,\lambda,k}(z)$$

où $P_{h,\lambda,k}(z)$ est un polynôme de degré total $\leqslant K+(L_1+L_2)H_3^2$ en $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\wp(v)$, $\wp'(v)$, $\wp(z)$, $\wp'(z)$, $\zeta(u)-(\eta/\omega)u$, g_2, g_3, et dont les coefficients sont des entiers rationnels dont le logarithme des valeurs absolues est $\leqslant K\log K+(L_1+L_2)H_3^2$. Par suite, le nombre $\psi_{h,\lambda,k}^{(k)}(\omega/2)$ est un élément de $\mathcal{K}$ qui peut s'écrire

$$\psi_{h,\lambda,k}^{(k)}(\omega/2) = \sum_{i=1}^{d}\frac{R_{i,h,\lambda,k}}{S_{h,k}}\,y^{i-1}$$

où d est le degré de y sur $\mathbf{Q}(x)$ et où $R_{i,h,\lambda,k}$ et $S_{h,k}$ sont des polynômes en x de taille $\leqslant K\log K+(L_1+L_2)H_3^2+L_2H_2$ (et $S_{h,k}$ ne dépend pas de i ni de λ). Le système (12) étant clairement équivalent au système

$$S_{h,k}\sum_{\lambda_1,\lambda_2}p(\lambda)\,\psi_{h,\lambda,k}^{(k)}(\omega/2) = 0$$

le résultat découle du lemme 4.3.1 de [14] d'après l'inégalité (8).

On choisit alors une telle solution $p(\lambda)$ et on définit la fonction

$$F(z) = \sum_{\lambda_1=0}^{L_1}\sum_{\lambda_2=0}^{L_2}p(\lambda)F_\lambda(z).$$

Ainsi, par définition de $\psi_{h,\lambda,k}$, on déduit de la formule de Leibnitz de dérivation des produits que le système (12) équivaut au système

$$F^{(k)}(\omega/2+h_2\omega'+h_3v) = 0,\qquad 0\leqslant h_i\leqslant H_i,\ 0\leqslant k\leqslant K,$$

puisque $2^k\big(\wp(\omega/2)-\wp(u)\big)^kQ_h(\omega/2)\neq 0$.

Par ailleurs, la fonction F admet ω pour période. Il en résulte que

$$F^{(k)}(\omega/2+h_1\omega+h_2\omega'+h_3v) = 0\quad\text{pour}\quad 0\leqslant k\leqslant K\ \text{et}\ 0\leqslant h_i\leqslant H_i\ (i=1,2,3).$$

Notons h_2' le plus petit entier positif tel qu'il existe des nombres entiers $h_3'\leqslant H_3$ et $k'\leqslant K$ vérifiant

$$F^{(k)}(\omega/2+h_2'\omega'+h_3'v) = 0\quad\text{si}\quad k<k'$$

et

$$\gamma_0 = F^{(k')}(\omega/2+h_2'\omega'+h_3'v)\neq 0$$

et tels que la distance du point $\omega/2+h_3'v$ à Λ soit supérieure ou égale à $c_1 = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(v,\Lambda)$ (cette dernière condition est uniquement technique et sans grande importance). Par construction, on a $h_2'\geqslant H_2$. Inversement, remarquons que pour tout z, l'un des deux nombres z et $z+v$ est à une distance supérieure à c_1 de Λ; ainsi la moitié au moins des $H_1H_2'H_3$ nombres $z = \omega/2+h_1\omega+h_2\omega'+h_3v$ vérifient $\operatorname{dist}(z,\Lambda)\geqslant c_1$. On en déduit que $h_2'\leqslant H_2'$ puisque sinon par périodicité F aurait au moins $\frac{1}{2}KH_1H_2'H_3$ zéros dans un disque de rayon $c_2(H_1+H_2'+H_3)$ ce qui est contraire au lemme 6 d'après l'inégalité (9).

Le fait que F ait beaucoup de zéros va maintenant nous permètre de majorer le nombre $|\gamma_0|$ grâce au lemme de Schwarz. Considérons pour cela la fonction

$$G(z) = \sigma(z)^{2L_1+L_2}F(z).$$

Cette fonction est entière et vérifie

$$G^{(k)}(\omega/2+h_1\omega+h_2\omega'+h_3v) = 0$$

pour $0\leqslant k\leqslant K$ et $0\leqslant h_i\leqslant H_i$ $(i=1,2,3)$.

De plus

$$\begin{aligned}|\gamma_0| &= |\sigma(\omega/2+h_2'\omega'+h_3'v)^{-2L_1-L_2}G^{(k')}(\omega/2+h_2'\omega'+h_3'v)|\\ &\leqslant c_3^{(L_1+L_2)(H_2'+H_3)^2}\,|G^{(k')}(\omega/2+h_2'\omega'+h_3'v)|.\end{aligned}$$

Le lemme de Schwarz (cf. par exemple [10], lemme 4.5) appliqué à la fonction G montre que si $R = c_4(H_1+H_2'+H_3)$ on a

$$\log|G^{(k')}(\omega/2+h_2'\omega'+h_3'v)|\leqslant 2K\log K+\log|G|_R-3KH_1H_2H_3.$$

Les fonctions σ, $\sigma^2\wp$ et σg étant d'ordre deux, on déduit de l'estimation des coefficients $p(\lambda)$ donnée dans le lemme 10 que

$$\log|G|_R\leqslant c_5\big(K\log K+(L_1+L_2)(H_1+H_2'+H_3)^2\big);$$

On en déduit finalement (grâce à l'inégalité (10))

$$\log|\gamma_0|\leqslant -2KH_1H_2H_3.$$

Notons $\xi_0 = \sum_\lambda p(\lambda)\psi_{h',\lambda,k'}^{(k')}(\omega/2)$ où $h' = (h_2', h_3')$. D'après la minimalité de k' et la formule de Leibnitz, on a

$$\xi_0 = 2^{k'}\big(\wp(\omega/2)-\wp(u)\big)^{k'}Q_{h'}(\omega/2)\gamma_0\neq 0.$$

Les mêmes estimations que celles du lemme 9 montrent donc que

$$-\infty<\log|\xi_0|\leqslant\log|\gamma_0|+c_6\big(K+(L_1+L_2)H_3^2\big)<-KH_1H_2H_3.$$

Les calculs faits au lemme 10 et la majoration des tailles des nombres $p(\lambda)$ montrent que ξ_0 est un élément de $\mathscr{K}$ de taille

$$t(\xi_0) \leqslant K\log K + (L_1+L_2)H_3^2 + L_2 H_2'.$$

Si l'on note alors P le dénominateur de ξ_0 relatif au système générateur (x, y) et $\pi_N \in \boldsymbol{Z}[x]$ la norme de $P\xi_0$ sur $\boldsymbol{Q}(x)$, alors on a (cf. [14], lemme 4.2.20)

$$t(\pi_N) \leqslant K\log K + (L_1+L_2)H_3^2 + L_2 H_2' \leqslant N^8(\log N)^2$$

et

$$\log|\pi_N| \leqslant -KH_1H_2H_3 = -N^{16,1}.$$

Le critère de Gel'fond (lemme 7) entraîne ainsi que x est algébrique, donc $x = 1$ et $\pi_N \in \boldsymbol{Z}\setminus\{0\}$ d'où $\log|\pi_N| \geqslant 0$ qui contredit l'inégalité précédente. Le théorème 1 est ainsi démontré.

5.3. Démonstration du théorème 3. La méthode de démonstration est essentiellement la même que pour le théorème 1 mis à part l'argument final. On suppose que le corps $\mathscr{K}_1$ engendré par les dix nombres du théorème 3 a un degré de transcendance au plus deux, donc est une extension algébrique de $\boldsymbol{Q}(\pi/\omega, \eta/\omega)$. On construit une fonction $F(z) = P\big(\wp(z), e^{2i\pi z/\omega}, \zeta(z)-(\eta/\omega)z, g_{u,\omega}(z)\big)$ où P est un polynôme non nul à coefficients dans $\mathscr{K}_1$, de sorte que le degré et les tailles des coefficients de P ne soient pas trop grands et que F ait un zéro d'ordre élevé aux points $\omega/2+\omega''+hv$ pour beaucoup de valeurs de $\omega'' \in \Lambda$ et $h \in \boldsymbol{Z}$. La fonction F étant non identiquement nulle (lemme 5), on en déduit une valeur $\gamma_0 = F^{(k_0)}(z_0) \neq 0$ pour un nombre $z_0 = \omega/2+\omega_0''+h_0 v$. Le nombre γ_0 est un élément de $\mathscr{K}_1$ dont on peut majorer la taille (en fonction de $|\omega_0''|$ et h_0), et montrer grâce au lemme de Schwarz qu'il est très petit puisque F a beaucoup de zéros. Ces deux estimations contredisent le fait que $\mathscr{K}_1$ a un type de transcendance $< 35/11$ (lemme 8).

Remarquons que contrairement au cas du théorème 1, il n'est pas nécessaire ici de construire une suite (F_N) de fonctions auxiliaires, ni de savoir majorer k_0, $|\omega_0''|$, $|h_0|$ ("lemme de zéros") du fait que l'on n'utilise pas le critère de Gel'fond.

Voici maintenant le détail de la démonstration. De même que pour le théorème 1, il est clair que l'on peut supposer que ω est une période primitive de $\wp$, et que $u \notin \Lambda\oplus\boldsymbol{Z}v$. On note $\mathscr{K}$ le corps engendré sur $\boldsymbol{Q}$ par les nombres $g_2, g_3, \wp(\omega/2), \wp(u), \wp'(u), \wp(v), \wp'(v), i\pi/\omega, \eta/\omega, \zeta(u)-(\eta/\omega)u, \zeta(v)-(\eta/\omega)v, e^{i\pi\tau}, e^{i\pi u/\omega}, e^{i\pi v/\omega}, g_{u,\omega}(\omega/2), g_{u,\omega}(v)$.

Ce corps a même degré de transcendance sur $\boldsymbol{Q}$ que le corps engendré par les nombres considérés dans le théorème 3. Les deux nombres π/ω et η/ω étant algébriquement indépendants (cf. [4]), le degré de transcendance de $\mathscr{K}$ est au moins deux. On suppose par l'absurde que ce degré de transcendance est égal à deux. Ainsi $\mathscr{K} = \boldsymbol{Q}(\pi/\omega, \eta/\omega, y)$ où y est entier sur $\boldsymbol{Z}[\pi/\omega, \eta/\omega]$. On notera $t(a)$ la taille d'un élément non nul a de $\mathscr{K}$ relative à ce système générateur. On note τ un réel $< 35/11$ tel que $\mathscr{K}$ ait un type de transcendance $\leqslant \tau$ (un tel réel existe grâce au lemme 8).

Pour tout entier N, on définit les paramètres $K(N) = [N^{11}\log N]$, $L(N) = [N^5\log N]$, $H_1(N) = [N^{15}\log N]$, $H_2(N) = [N^6\log N]$, $H_3(N) = [N^3\log N]$.

On fixe alors un entier N_0 suffisamment grand; pour abréger nous noterons $K = K(N_0)$, $L = L(N_0)$, $H_i = H_i(N_0)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Les constantes $c, c_1, \ldots$ ainsi que celles impliquées par le signe $\ll$ sont indépendantes de N_0.

Remarquons dès maintenant que si c est une constante > 0, les inégalités suivantes sont vérifiées pour tout $N \geqslant N_0$, pourvu que N_0 soit assez grand devant c:

$$L^4 > cKH_2H_3 \tag{13}$$

qui permet de construire la fonction auxiliaire par le lemme de Siegel;

$$K(N)H_1(N)H_2(N)H_3(N) > c\big\{K\log K + L\big(H_1(N)^2+H_2+H_3^2\big)\big\} \tag{14}$$

qui montrera que la "première dérivée non nulle de F" est un nombre petit malgré la croissance de F et la taille de ses coefficients.

$$K(N)H_1(N)H_2(N)H_3(N) > c\big\{K(N)\log K(N) + L\big(H_2(N)+H_3(N)^2\big)\big\}^{\tau} \tag{15}$$

d'où l'on déduira que cette première dérivée non nulle est un nombre trop petit par rapport à sa taille pour pouvoir appartenir à un corps de type de transcendance $\leqslant \tau$.

La construction de la fonction auxiliaire se fait comme pour le théorème 1. On note encore $g = g_{u,\omega}$ et $\alpha = g(z+\omega')/g(z)$ qui est un élément de $\mathscr{K}$. On considère les monômes

$$F_\lambda(z) = e^{\lambda_1 2i\pi z/\omega}\wp(z)^{\lambda_2}\left(\zeta(z)-\frac{\eta}{\omega}z\right)^{\lambda_3} g(z)^{\lambda_4}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \boldsymbol{N}^4$. Nous nous servirons d'un analogue du lemme 9:

LEMME 11. *Soient $h = (h_2, h_3) \in \boldsymbol{N}^2$ et $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \boldsymbol{N}^4$ tels que $0 \leqslant h_i \leqslant H_i$ $(i = 2, 3)$, $0 \leqslant \lambda_i \leqslant L$. Alors*

$$F_\lambda(z+h_2\omega'+h_3v) = \big(e^{2i\pi z/\omega}e^{2i\pi\tau h_2}e^{2i\pi v h_3/\omega}\big)^{\lambda_1}\big(g(z)g(v)^{h_3}\alpha^{h_2}\big)^{\lambda_4}\frac{P_{\lambda,h}(z)}{Q_h(z)}$$

où $P_{\lambda,h}(z)$ et $Q_h(z)$ sont des polynômes en $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\wp(v)$, $\wp'(v)$ (avec degré partiel $\ll LH_3^2$); $\wp(z)$, $\wp'(z)$ (d.p. $\ll L$); $\zeta(v)-(\eta/\omega)v$ (d.p. $\leqslant L$); $i\pi/\omega$ (d.p. $\leqslant L$); g_2, g_3 (d.p. $\ll LH_3^2$) et dont les coefficients sont des entiers rationnels dont le logarithme des valeurs absolues est $\ll LH_3^2$.

On peut de plus supposer que Q_h est indépendant de λ et que $Q_h(\omega/2) \neq 0$.

Démonstration. Les arguments du lemme 9 restent valables, en utilisant de plus les formules d'addition et de multiplication de la fonction ζ (cf. prop. 5 ou plus précisément le lemme 4.8 de [10]).

Pour $h = (h_2, h_3) \in \boldsymbol{N}^2$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \boldsymbol{N}^4$ et $k \in \boldsymbol{N}$ on note

$$\psi_{h,\lambda,k}(z) = 2^k\big(\wp(z) - \wp(u)\big)^k Q_h(z) F(z + h_2\omega' + h_3 v).$$

La construction de la fonction auxiliaire se fait grâce au

Lemme 12. *Le système*

$$\sum_{\lambda_1=0}^{L}\sum_{\lambda_2=0}^{L}\sum_{\lambda_3=0}^{L}\sum_{\lambda_4=0}^{L} p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)\psi_{h,\lambda,k}^{(k)}(\omega/2) = 0 \tag{16}$$

pour $0 \leqslant h_2 \leqslant H_2$, $0 \leqslant h_3 \leqslant H_3$, $0 \leqslant k \leqslant K$ *admet une solution non triviale* $p(\lambda) = p(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \boldsymbol{Z}[\pi/\omega, \eta/\omega, y]$ *vérifiant*

$$t\big(p(\lambda)\big) \ll K\log K. \tag{17}$$

Démonstration. Analogue à celle du lemme 10 en montrant que

$$\psi_{h,\lambda,k}^{(k)}(z) = \big(g(z)g(v)^{h_3}\alpha^{h_2}\big)^{\lambda_4}\big(e^{2i\pi z/\omega}e^{2i\pi\tau h_2}e^{2i\pi v h_3/\omega}\big)^{\lambda_1} P_{h,\lambda,k}(z)$$

où $P_{h,\lambda,k}(z)$ est un polynôme de degré total $\ll K + LH_3^2 \ll K$ en $\wp(u)$, $\wp'(u)$, $\wp(v)$, $\wp'(v)$, $\wp(z)$, $\wp'(z)$, η/ω, $i\pi/\omega$, g_2, g_3, $\zeta(u) - (\eta/\omega)u$, $\zeta(z) - (\eta/\omega)z$, et dont les coefficients sont des entiers rationnels dont le logarithme du maximum des valeurs absolues est inférieur à une constante près à $K\log K + LH_3^2 \ll K\log K$.

Le même raisonnement que dans le lemme 10 donne le résultat grâce à l'inégalité (13).

On choisit alors une telle solution $p(\lambda)$ et on note

$$F(z) = \sum_{\lambda} p(\lambda) F_\lambda(z).$$

Comme dans le cas du théorème 1, la construction du lemme 12 et la périodicité de F montrent que si on note

$$z_h = \omega/2 + h_1\omega + h_2\omega' + h_3 v \quad \text{où} \quad h = (h_1, h_2, h_3)$$

alors

$$F^{(k)}(z_h) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant K \text{ et } 0 \leqslant h_i \leqslant H_i \ (i = 1, 2, 3). \tag{18}$$

On note S l'ensemble des points de C dont la distance à Λ est inférieure à $c_1 = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(v, \Lambda)$. Soit alors N' l'unique entier vérifiant les deux propriétés suivantes:

(i) Pour tout $h = (h_1, h_2, h_3)$ tel que $h_i < H_i(N')$ et $z_h \notin S$ et pour tout $k < K(N')$, on a $F^{(k)}(z_h) = 0$,

(ii) Il existe un $h' = (h'_1, h'_2, h'_3)$ tel que $h'_i \leqslant H_i(N')$ et $z_{h'} \notin S$ et il existe un $k' \leqslant K(N')$ tels que

$$\gamma = F^{(k')}(z_{h'}) \neq 0$$

et

$$F^{(k)}(z_{h'}) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant k < k'.$$

Cet entier N' existe puisque la fonction F n'est pas identiquement nulle (lemme 5) et est supérieur à N_0 d'après (18). On note $K' = K(N')$, et $H'_i = H_i(N')$. De même que dans la démonstration du théorème 1, la condition $z_h \notin S$ est uniquement technique et ne change le nombre de points considérés dans la condition (i) ci-dessus que par un facteur $\frac{1}{2}$ au plus; ainsi la fonction F admet au moins $\frac{1}{2}K'H'_1H'_2H'_3$ zéros dans un disque de centre 0 et de rayon $c_2H'_1$, ce qui va nous permettre de majorer $|\gamma|$ grâce au lemme de Schwarz. On se ramène à étudier une fonction entière en considérant la fonction

$$G(z) = \sigma(z)^{4L}F(z)$$

qui a au moins autant de zéros que F.

Puisque les fonctions σ, $\sigma^2\wp$, $\sigma\zeta$, σg sont d'ordre deux et que la fonction exponentielle est d'ordre un, il résulte donc du lemme de Schwarz et de la majoration (17) que pour $R = c_3H'_1$, on a

$$\begin{aligned}\log|G^{(k')}(z_{h'})| &\leqslant 2K'\log K' + \log|G|_R - 3K'H'_1H'_2H'_3\\ &\leqslant c_4(K'\log K' + LH_1'^2) - 3K'H'_1H'_2H'_3 \leqslant -2K'H'_1H'_2H'_3.\end{aligned}$$

Par ailleurs, la condition $z_{h'} \notin S$ et les formules de pseudo-périodicité de σ montrent que

$$|\sigma(z_{h'})| \geqslant c_5^{-H_1'^2}.$$

Puisque

$$|\gamma| = |\sigma(z_{h'})^{-4L}G^{(k')}(z_{h'})|$$

par minimalité de k', on obtient finalement

$$\log|\gamma| \leqslant -K'H'_1H'_2H'_3 = -N'^{35}(\log N')^4. \tag{19}$$

Par ailleurs, en notant que

$$\gamma = 2^{-k'}\big(\wp(\omega/2) - \wp(u)\big)^{-k'}Q_{h'}(\omega/2)^{-1}\sum_{\lambda} p(\lambda)\psi_{h',\lambda,k'}^{(k')}(\omega/2)$$

grâce à la minimalité de k', et en utilisant des estimations analogues à celles de la démonstration du lemme 12 ainsi que la majoration (17), on voit que γ est un élément de $\mathscr{K}$ de taille

$$t(\gamma) \leqslant c_6\big(K'\log K' + L(H'_2 + H_3'^2)\big)$$

soit

$$t(\gamma) < N'^{11}(\log N')^4. \tag{20}$$

Les inégalités (19) et (20) sont incompatibles puisque le corps a un type de transcendance $\leqslant \tau < 35/11$ (lemme 8). La contradicti obtenue prouve donc le théorème 3.

Bibliographie

[1] A. Baker, *On the periods of the Weierstrass ℘-function*, Symp. Math. 4 (197 p. 155–174.

[2] D. Bertrand, *Fonctions modulaires, courbes de Tate et indépendance algébriq* Sém. Delange-Pisot-Poitou (1977–78), p. 36.1–36.11.

[3] D. Brownawell, *On the development of Gelfond's method*; in *Number The Carbondale 1979*, Lecture Notes 751, Springer Verlag, 1979, p. 18–44.

[4] G. V. Choodnovsky, *Transcendence and algebraic independence of consta connected with exponential and elliptic functions*, manuscript (1978), 54 p.

[5] — *Algebraic grounds for the proof of algebraic independence. How to obt measure of algebraic independence using elementary methods.* Part I: *Element algebra*; in *Problèmes Diophantiens*, Fasc. 1, Pub. Math. Univ. P. et M. Cu n° 25 (1979), p. 1.1–1.30. Part II: *Intersections of two curves*; preprint 19

[6] S. Lang, *Elliptic curves, diophantine analysis*; Grund. der Math. Wiss., 2 Springer Verlag, 1978.

[7] M. Laurent, *Transcendance de périodes d'intégrales elliptiques*, Crelle J. (1980), p. 122–139.

[8] K. Mahler, *Lectures on Transcendental Numbers*, Lecture Notes 546, Sprin Verlag, 1976.

[9] D. Masser, *Elliptic Functions and Transcendence*, Lecture Notes 437, Sprin Verlag, 1975.

[10] E. Reyssat, *Approximation algébrique de nombres liés aux fonctions elliptiq et exponentielle*, Bull. S. M. F. 108 (1980), p. 47–79.

[11] — *Approximation de nombres liés à la fonction sigma de Weierstrass*, A Fac. Sci. Toulouse 2 (1980), p. 79–91.

[12] M. Waldschmidt, *Nombres transcendants et fonctions sigma de Weierstr* C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 1 (1979), p. 111–114.

[13] — *Nombres transcendants et groupes algébriques*, Astérisque (Soc. Math. Fran 69–70 (1979).

[14] — *Nombres transcendants*, Lecture Notes 402, Springer Verlag, 1974.

[15] — *Suites colorées* (d'après G. V. Čudnovskij), Sém. Delange-Pisot-Poi (Groupe d'étude de théorie des nombres) (1975–76), p. G21.1–G21.11.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
MATHÉMATIQUES
Paris, France

Reçu le 19. 11. 1980 (1