ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

# Eine Anwendung der Selbergschen Siebmethode in algebraischen Zahlkörpern

von

Jürgen G. Hinz (Marburg)

**1.** Es sei $f(x)$ ein irreduzibles Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten. Die 1969 von H.-E. Richert in [17] verallgemeinerte Selbergsche Siebmethode liefert neben zahlreichen anderen Anwendungen auch ein Resultat über die Verteilung von Fastprimzahlen unter den Funktionswerten $f(p)$ für Primzahlen $p$ ([17], Theorem 7). Ein wesentliches Hilfsmittel bei den Abschätzungen ist der Primzahlsatz von Bombieri ([6], Theorem 4).

Entsprechende Problemstellungen ergeben sich für Polynome in mehreren Unbestimmten. In einer Arbeit von G. Greaves ([8]) wird für ein irreduzibles Polynom $f(x, y) \in \mathbf{Z}[x, y]$ vom Grade $g$ unter den bei diesen Fragestellungen üblichen Voraussetzungen die untere Abschätzung

$$\sum_{\substack{p_1 \leqslant z \\ \Omega(f(p_1, p_2)) \leqslant g+1}} \sum_{p_2 \leqslant z} 1 \geqslant C \frac{z^2}{\log^3 z} \quad \text{für} \quad z \geqslant z_0(f) \tag{1.1}$$

mit einer Konstanten $C = C(f) > 0$ bewiesen. Dabei bezeichnet $\Omega(m)$ die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Primteiler von $m$.

Die Herleitung eines Spezialfalles von (1.1) mit $f(x, y) = 2m - xy$ hat schon M. B. Barban in [3], S. 78, skizziert.

Zum Beweis von (1.1) werden wie bei Polynomen in einer Unbestimmten die Ergebnisse von H.-E. Richert in [17] herangezogen. An die Stelle des Primzahlsatzes von Bombieri tritt hier der Satz von Barban ([2]) und Davenport–Halberstam ([7]).

Es ist ein Ziel dieser Arbeit, das Resultat von G. Greaves auf algebraische Zahlkörper zu verallgemeinern. Dabei wird im wesentlichen der Beweismethode aus [8] gefolgt. Die Überlegungen im dortigen Abschnitt 3 lassen sich vereinfachen. Ferner muß die Beziehung (8) modifiziert werden (vergl. Lemma 2.1 unten), weil die $\ll$-Konstanten von $l$ abhängen. Die Ausführungen in der vorliegenden Arbeit zum erweiterten Selbergschen Sieb in algebraischen Zahlkörpern beruhen auf Untersuchungen von W. Schaal in [20]. Der dortige Hauptsatz ist im Falle $\mathfrak{k} = (1)$ für größere Anwendungsbereiche herzuleiten. Eine geeignete Verallgemeinerung des Satzes von Barban und Davenport-Halberstam wurde in [12] bewiesen.

Im folgenden sei $K$ ein algebraischer Zahlkörper vom Grade $n = r_1 + 2r_2$ (in der üblichen Bezeichnung) und der Diskriminante $d$ über dem Körper der rationalen Zahlen. Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ in $K$ bedeute $N\mathfrak{a}$ seine Norm. Die $n$ Konjugierten einer Zahl $\xi \in K$ werden mit $\xi^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, bezeichnet; $N\xi := \xi^{(1)} \cdots \xi^{(n)}$ sei die Norm von $\xi$. Eine Zahl $\omega \in K$ heißt *total-positiv*, falls $\omega^{(k)} > 0$ für $k = 1, \ldots, r_1$ gilt; sie heißt *Primzahl* (oder *prim*), wenn das von ihr erzeugte Hauptideal $(\omega)$ ein Primideal in $K$ ist.

Für die reellen Zahlen $P_1 \geqslant 1, \ldots, P_n \geqslant 1$ mit dem Produkt $P := P_1 \cdots P_n$ gelte

$$P_k = P_{k+r_2} \quad \text{für} \quad k = r_1+1, \ldots, r_1+r_2.$$

Ferner sei

$$\mathfrak{R} := \{\omega \in K;\ \omega \text{ total-positive Primzahl},\ |\omega^{(k)}| \leqslant P_k,\ k = 1, \ldots, n\}. \tag{1.2}$$

Das Hauptresultat der in der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen ist

SATZ 1.1. *Es sei $F(x, y) \in K[x, y]$ ein von $x$ und $y$ abhängiges irreduzibles Polynom vom Grade $g \geqslant 1$ mit ganzen algebraischen Koeffizienten und ohne festen Primidealteiler. Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $K$ bezeichne $L(\mathfrak{p})$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen* mod $\mathfrak{p}$ *von* $F(a, \beta) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ *mit* $(a, \mathfrak{p}) = (\beta, \mathfrak{p}) = 1$. *Es gelte:*

$$L(\mathfrak{p}) < (N\mathfrak{p} - 1)^2 \tag{1.3}$$

*für alle Primideale $\mathfrak{p}$ in $K$ mit $N\mathfrak{p} \leqslant g+1$.*

(a) *Für $P \geqslant 3$ ergibt sich die obere Abschätzung:*

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') \text{ prim}}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \leqslant 2 \cdot c_0(F, K) \frac{P^2}{\log^3 P} \left\{1 + O\left(\frac{\log\log P}{\log P}\right)\right\}. \tag{1.4}$$

(b) *Für $P \geqslant P_0(F, K)$ gilt:*

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ \Omega(F(\omega, \omega')) \leqslant g+1}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \geqslant \frac{2}{3}\, c_0(F, K) \frac{P^2}{\log^3 P}. \tag{1.5}$$

*Dabei ist*

$$c_0(F, K) := \frac{\sqrt{|d|}}{(2\pi)^{r_2}} \left(\frac{w}{2^{r_1} hR}\right)^3 \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1 - L(\mathfrak{p})/(N\mathfrak{p} - 1)^2}{1 - 1/N\mathfrak{p}}, \tag{1.6}$$



*wobei $w$ die Anzahl der Einheitswurzeln, $h$ die Klassenzahl und $R$ den Regulator von $K$ bezeichnen. Das unendliche Produkt über alle Primideale $\mathfrak{p}$ in $K$ ist konvergent und positiv. $\Omega(a)$ bedeutet die Anzahl der mit ihrer Vielfachheit gezählten Primidealteiler des Hauptideals $(a)$. Die auftretende $O$-Konstante in (1.4) hängt vom Körper $K$ und vom Polynom $F(x, y)$ ab.*

Einige Spezialfälle von Satz 1.1 werden im Verlauf der Arbeit diskutiert.

Der durch die Bedingung (1.3) ausgeschlossene Extremfall tritt ein, wenn ein Primideal $\mathfrak{p}_0$ in $K$ existiert mit $N\mathfrak{p}_0 \leqslant g+1$ und $L(\mathfrak{p}_0) = (N\mathfrak{p}_0 - 1)^2$. Dann sind alle ganzen Zahlen $a, \beta \in K$ mit $(a, \mathfrak{p}_0) = (\beta, \mathfrak{p}_0) = 1$ Lösungen der Kongruenz $F(a, \beta) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}_0$.

Die untere Abschätzung (1.5) stellt die Verallgemeinerung von (1.1) auf algebraische Zahlkörper dar. Man vergleiche hierzu auch die Arbeit von H. Sarges ([19]), die Resultate von H.-E. Richert aus [17] auf Zahlkörper überträgt. Für ein Polynom $F(x)$ in einer Unbestimmten wird dort ein ähnliches Problem gelöst, wobei allerdings in (1.5) nicht nur Primzahlen $\omega \in \mathfrak{R}$, sondern beliebige ganzzahlige total-positive Argumente $\xi$ mit $|\xi^{(k)}| \leqslant P_k$, $k = 1, \ldots, n$, zugelassen sind.

Alle in dieser Arbeit auftretenden Konstanten sind positiv und nur vom Körper $K$ und vom Polynom $F(x, y)$ abhängig, sofern nichts anderes vermerkt ist. Kleine deutsche Buchstaben werden für ganze Ideale in $K$ verwendet. Insbesondere bedeuten $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \ldots$ stets Primideale in $K$. Ferner sollen leere Summen den Wert 0 und leere Produkte den Wert 1 haben.

**2.** Es bezeichne $Z_K$ den Ring der ganzen Zahlen aus $K$. Im folgenden sei

$$F(x, y) = \sum_{\substack{i \geqslant 0 \\ i+j \leqslant g}} \sum_{j \geqslant 0} \gamma_{ij} x^i y^j \in Z_K[x, y] \tag{2.1}$$

ein irreduzibles Polynom vom Grade $g \geqslant 1$ ohne festen Primidealteiler. $F(x, y)$ sei weder von $x$ noch von $y$ unabhängig.

Als Grundlage für die Untersuchungen zur Selbergschen Siebmethode benötigt man eine Approximation für den Ausdruck

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1, \qquad \mathfrak{q} \text{ quadratfrei}.$$

Eine geeignete asymptotische Abschätzung soll in diesem Paragraphen hergeleitet werden.

LEMMA 2.1. *Es seien $a_0, \beta_0 \in Z_K$ und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $K$. Dann existiert eine von $a_0$, $\beta_0$ und $\mathfrak{p}$ unabhängige natürliche Zahl $m_0 = m_0(F, K)$,* *so daß gilt:*

$$\sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{p} \\ F(\alpha_0, \beta) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}}} 1 \leqslant m_0; \qquad \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{p} \\ F(\alpha, \beta_0) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}}} 1 \leqslant m_0.$$

Beweis. Man ordne $F(x, y)$ in (2.1) nach Potenzen von $y$. Wegen der Irreduzibilität hat $F(x, y)$ dann als Polynom in $y$ teilerfremde Koeffizienten $f_j(x)$ in $K[x]$. Durch Multiplikation mit einer geeigneten ganzen rationalen Zahl $m > 0$ ergibt sich:

$$m = s_0(x) f_0(x) + \ldots + s_g(x) f_g(x), \quad s_i(x) \in Z_K[x], \quad i = 0, \ldots, g.$$

Aus $m \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ folgt $N\mathfrak{p} \leqslant m^n$. Es sei also $m \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$; dann sind für kein $\alpha \in Z_K$ alle Koeffizienten von $F(\alpha, y)$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar. Die Kongruenz $F(\alpha_0, y) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ besitzt in diesem Falle höchstens $g$ inkongruente Lösungen $\beta \in Z_K$.

Analog erhält man die Behauptung für den zweiten Ausdruck.

Nach einer Bemerkung von C. L. Siegel ([22], Hilfssatz 6) existiert eine total-positive Einheit $\eta \in K$, so daß gilt:

$$c_1 P^{1/n} \leqslant \hat{P}_k := |\eta^{(k)}| P_k \leqslant c_2 P^{1/n}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Dabei sind $c_1$ und $c_2$ nur vom Körper $K$ abhängige Konstanten. Man setze:

$$I := \frac{w}{2^{r_1} hR} \int_2^{\hat{P}_k^{e_k}} \cdots \int \frac{dx_1 \cdots dx_{r+1}}{\log(x_1 \cdots x_{r+1})}, \tag{2.3}$$

wobei $w$ die Anzahl der Einheitswurzeln, $h$ die Klassenzahl und $R$ den Regulator von $K$ bedeuten. Die Integration erfolgt über $2 \leqslant x_k \leqslant \hat{P}_k^{e_k}$, $k = 1, \ldots, r+1 := r_1 + r_2$, mit $e_1 = \ldots = e_{r_1} = 1$, $e_{r_1+1} = \ldots = e_{r+1} = 2$. Nach [12], Lemma 6, gilt:

$$I = \frac{w}{2^{r_1} hR} \cdot \frac{P}{\log P} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log P}\right)\right\}, \quad P \geqslant 2. \tag{2.4}$$

Ferner sei

$$\Pi(P; \xi, \mathfrak{q}) := \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ \omega \equiv \xi \bmod \mathfrak{q}}} 1, \quad \xi \in Z_K. \tag{2.5}$$

Es bezeichnen $\mu(\mathfrak{q})$ die Möbiussche, $\varphi(\mathfrak{q})$ die Eulersche Funktion für Ideale und $v(\mathfrak{q})$ die Anzahl der verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{q}$. $L(\mathfrak{q})$ sei die Anzahl der Lösungen mod $\mathfrak{q}$ von $F(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}$ mit $(\alpha, \mathfrak{q}) = (\beta, \mathfrak{q}) = 1$.



Lemma 2.2. *Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{q}$ in $K$ mit $\mu(\mathfrak{q}) \neq 0$ und $N\mathfrak{q} \leqslant P$, $P \geqslant 2$, gilt:*

$$S := \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 = I^2 \frac{L(\mathfrak{q})}{\varphi^2(\mathfrak{q})} + R(P; \mathfrak{q}),$$

*wobei*

$$R(P; \mathfrak{q}) \ll (m_0)^{v(\mathfrak{q})} \sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{q} \\ (\xi, \mathfrak{q}) = 1}} \left\{\Pi(P; \xi, \mathfrak{q}) - \frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\}^2 + P(\log P)^r \frac{v(\mathfrak{q})(m_0)^{v(\mathfrak{q})}}{N\mathfrak{q}} + \frac{P}{N\mathfrak{q}} (m_0)^{v(\mathfrak{q})} \sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{q} \\ (\xi, \mathfrak{q}) = 1}} \left|\Pi(P; \xi, \mathfrak{q}) - \frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right|.$$

*Die auftretende $\ll$-Konstante hängt nur vom Körper $K$ ab.*

Beweis. Zunächst erhält man:

$$S = \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}}^{*} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}}^{*} 1 + \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ \omega | \mathfrak{q} \\ F(\omega, \omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}}^{*} 1 + \sum_{\substack{\omega' \in \mathfrak{R} \\ \omega' | \mathfrak{q} \\ F(\omega, \omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}} \sum_{\omega \in \mathfrak{R}} 1. \tag{2.6}$$

Dabei bedeutet im folgenden der Stern am Summenzeichen, daß nur über zu $\mathfrak{q}$ teilerfremde Zahlen bzw. Restklassen summiert wird. Mit Lemma 2.1 und Hilfssatz 9 aus [18] — die dortige Bedingung (85) ist aufgrund der Bemerkung (2.2) erfüllt — ergibt sich für $\mu(\mathfrak{q}) \neq 0$ und $N\mathfrak{q} \leqslant P$:

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ \omega | \mathfrak{q} \\ F(\omega, \omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 = \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ \omega | \mathfrak{q}}} \sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{q} \\ F(\omega, \beta) \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}} \sum_{\substack{\omega' \in \mathfrak{R} \\ \omega' \equiv \beta \bmod \mathfrak{q}}} 1 \ll \frac{P}{N\mathfrak{q}} (m_0)^{v(\mathfrak{q})} \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ \omega | \mathfrak{q}}} 1 \ll P(\log P)^r \frac{v(\mathfrak{q})(m_0)^{v(\mathfrak{q})}}{N\mathfrak{q}}. \tag{2.7}$$

Die letzte Abschätzung gilt wegen der Beziehung (9) aus [12]. Analog kann man den dritten Term in (2.6) behandeln. Ferner ergibt sich mit (2.5):

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}}^{*} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}}^{*} 1 = I^2 \frac{L(\mathfrak{q})}{\varphi^2(\mathfrak{q})} + \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{q} \\ F(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}}^{*} \sum_{\beta \bmod \mathfrak{q}}^{*} \left\{\Pi(P; \alpha, \mathfrak{q}) - \frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\} \left\{\Pi(P; \beta, \mathfrak{q}) - \frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\} +$$

$$+\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\sideset{}{^*}\sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{q}\\ F(\alpha,\beta)\equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}}\sideset{}{^*}\sum_{\beta \bmod \mathfrak{q}}\left\{\Pi(P;\alpha,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}+\Pi(P;\beta,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\}$$

$$=I^2\frac{L(\mathfrak{q})}{\varphi^2(\mathfrak{q})}+S_1+S_2.$$

Die Ausdrücke $S_1$ und $S_2$ lassen sich mit Lemma 2.1 wie folgt abschätzen:

$$|S_1|\leqslant (m_0)^{\nu(\mathfrak{q})}\sideset{}{^*}\sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}\left\{\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\}^2,$$

$$|S_2|\leqslant 2\,\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}(m_0)^{\nu(\mathfrak{q})}\sideset{}{^*}\sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}\left|\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right|.$$

Zusammen mit (2.6), (2.7) und (2.4) folgt die Behauptung wegen $N\mathfrak{q}\varphi^{-1}(\mathfrak{q})\ll \log\log 3N\mathfrak{q}$.

Für das Restglied $R(P;\mathfrak{q})$ in Lemma 2.2 benötigt man im folgenden nur eine Abschätzung im Mittel. Dem Beweis dieses Resultates werden drei Hilfssätze vorangestellt.

LEMMA 2.3. *Es seien $Q\geqslant 2$ und $l\in \boldsymbol{N}$; dann gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q}\frac{\mu^2(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}}\,l^{\nu(\mathfrak{q})}\ll_{l,K}(\log Q)^l.$$

Beweis. Der Beweis verläuft ebenso wie im rationalen Fall ([17], Lemma 3) durch vollständige Induktion nach $l$.

LEMMA 2.4. *Es sei $A$ eine beliebige positive reelle Zahl und $P\cdot(\log P)^{-A}\leqslant Q\leqslant P$; dann gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q}\sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{q}\\ (\xi,\mathfrak{q})=1}}\left\{\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\}^2\ll_{A,K}PQ(\log P)^{-1}.$$

Beweis. [12], Theorem 1.

LEMMA 2.5. *Es seien $l\in \boldsymbol{N}$ und $P\geqslant 2$. Für eine beliebige reelle Zahl $A>0$ gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P(\log P)^{-A}}\mu^2(\mathfrak{q})l^{\nu(\mathfrak{q})}\sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{q}\\ (\xi,\mathfrak{q})=1}}\left\{\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\}^2\ll P^2(\log P)^{-\frac{A}{2}+\frac{1}{2}(l^2-1)}.$$



*Die $\ll$-Konstante hängt von $l$, $A$ und $K$ ab.*

Beweis. Wegen (2.4) und

$$\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})\ll \frac{P}{N\mathfrak{q}}+1\quad([18],\ \text{Hilfssatz } 9)\tag{2.8}$$

erhält man als triviale Abschätzung für $N\mathfrak{q}\leqslant P$:

$$\sideset{}{^*}\sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}\left\{\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\}^2\ll\frac{P^2}{N\mathfrak{q}}.$$

Hiermit ergibt sich unter Verwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung und Lemma 2.3:

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P(\log P)^{-A}}\mu^2(\mathfrak{q})l^{\nu(\mathfrak{q})}\sideset{}{^*}\sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}\left\{\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\}^2$$
$$\ll P\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P(\log P)^{-A}}\frac{\mu^2(\mathfrak{q})l^{\nu(\mathfrak{q})}}{(N\mathfrak{q})^{1/2}}\left\{\sideset{}{^*}\sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}\left(\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right)^2\right\}^{1/2}$$
$$\ll P(\log P)^{l^2/2}\left\{\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P(\log P)^{-A}}\sideset{}{^*}\sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}\left(\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right)^2\right\}^{1/2}$$
$$\ll P^2(\log P)^{-\frac{A}{2}+\frac{1}{2}(l^2-1)}.$$

Die letzte Abschätzung folgt nach dem Satz von Barban und Davenport–Halberstam in algebraischen Zahlkörpern (Lemma 2.4).

Das Hauptresultat dieses Paragraphen wird im folgenden Satz zusammengefaßt.

SATZ 2.1. *Es sei*

$$\sum_{\substack{\omega\in\Re\\ F(\omega,\omega')\equiv 0 \bmod \mathfrak{q}}}\sum_{\omega'\in\Re}1=\frac{I^2}{N\mathfrak{q}}\cdot\frac{N\mathfrak{q}\cdot L(\mathfrak{q})}{\varphi^2(\mathfrak{q})}+R(P;\mathfrak{q}).\tag{2.9}$$

*Dann gibt es eine Zahl $A_0=A_0(m_0)>0$, so daß für $P\geqslant 2$ gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P(\log P)^{-A_0}}\mu^2(\mathfrak{q})3^{\nu(\mathfrak{q})}R(P;\mathfrak{q})\ll P^2(\log P)^{-4}.$$

*Die auftretende $\ll$-Konstante hängt nur von $m_0$ und vom Körper $K$ ab.*

Beweis. Man wähle $A_0:=(3m_0)^2+7$; dann folgt nach Lemma 2.5:

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P(\log P)^{-A_0}}\mu^2(\mathfrak{q})(3m_0)^{\nu(\mathfrak{q})}\sideset{}{^*}\sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}\left\{\Pi(P;\xi,\mathfrak{q})-\frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})}\right\}^2\ll P^2(\log P)^{-4}.$$

Ferner ergibt sich mit Lemma 2.3 und Lemma 2.4 nach zweimaliger Anwendung der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung:

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P(\log P)^{-\Delta_0}} \frac{\mu^2(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} (3m_0)^{\nu(\mathfrak{q})} \sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}^{*} \left| \Pi(P;\xi,\mathfrak{q}| - \frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})} \right|$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P} \frac{\mu^2(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} (3m_0)^{2\nu(\mathfrak{q})} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P(\log P)^{-\Delta_0}} \sum_{\xi \bmod \mathfrak{q}}^{*} \left( \Pi(P;\xi,\mathfrak{q}) - \frac{I}{\varphi(\mathfrak{q})} \right)^2 \right\}^{1/2}$$

$$\ll P(\log P)^{-4}.$$

Schließlich gilt wegen Lemma 2.3:

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant P} \frac{\mu^2(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} (3m_0)^{\nu(\mathfrak{q})} \nu(\mathfrak{q}) \ll P^{1/2}.$$

Somit folgt die Behauptung von Satz 2.1 aus Lemma 2.2.

**3.** Man setze für ein ganzes Ideal $\mathfrak{q}$ in $K$:

$$G(\mathfrak{q}) := \frac{N\mathfrak{q}\cdot L(\mathfrak{q})}{\varphi^2(\mathfrak{q})}. \tag{3.1}$$

Bekanntlich ist $G(\mathfrak{q})$ eine multiplikative Funktion. Sie spielt bei den Untersuchungen zur Selbergschen Siebmethode eine wichtige Rolle. Im folgenden sollen die benötigten Eigenschaften von $G(\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $K$ hergeleitet werden.

Lemma 3.1. *Für ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $K$ gilt:*

$$L(\mathfrak{p}) \leqslant g\cdot(N\mathfrak{p}-1).$$

Beweis. Man betrachte $F(x,y)$ als Polynom in $y$ mit Koeffizienten, die Polynome in $x$ sind. Da $F(x,y)$ keinen festen Primidealteiler besitzt, gilt:

$$F(x,y) \equiv \sum_{j=1}^{l} f_{s_j}(x) y^{s_j} \bmod \mathfrak{p},$$

wobei die Koeffizienten von $f_{s_j}(x)$ für $j=1,\ldots,l$ nicht durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind. Jede Kongruenz mod $\mathfrak{p}$ kann als Gleichheit im Körper $Z_K/\mathfrak{p}$ betrachtet werden. Für ein Polynom $q$ mit Koeffizienten aus $Z_K$ sei $\bar{q}$ das Polynom, welches durch Ersetzen aller Koeffizienten von $q$ durch die zugehörigen Restklassen mod $\mathfrak{p}$ entsteht. Es bezeichne $\bar{t}(x)$ den größten gemeinsamen Teiler von $\bar{f}_{s_1}(x),\ldots,\bar{f}_{s_l}(x)$. Dann gilt:

$$\bar{F}(x,y) = \bar{t}(x)\bar{F}_1(x,y), \qquad \bar{F}_1(x,y) \in Z_K/\mathfrak{p}[x,y].$$



Somit erhält man:

$$L(\mathfrak{p}) \leqslant \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{p}\\ \bar{t}(\bar{\alpha})=\bar{0}}} \sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{p}\\ (\beta,\mathfrak{p})=1}} 1 + \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{p}\\ (\alpha,\mathfrak{p})=1}} \sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{p}\\ \bar{F}_1(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\bar{0}}} 1 \leqslant g\cdot(N\mathfrak{p}-1),$$

weil nach Konstruktion von $\bar{F}_1$ für kein $\alpha\in Z_K$ alle Koeffizienten von $F_1(\alpha,y)$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind, und weil $\operatorname{Grad}\bar{t}+\operatorname{Grad}\bar{F}_1 = \operatorname{Grad}\bar{F} \leqslant g$ gilt.

Bemerkung. Aus Lemma 3.1 ergibt sich unmittelbar, daß die Bedingung (1.3) für alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit $N\mathfrak{p} > g+1$ erfüllt ist.

Lemma 3.2. *Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in $K$; dann gilt:*

$$0 \leqslant G(\mathfrak{p}) \leqslant \left(1-\frac{1}{g^2+1}\right) N\mathfrak{p}.$$

Beweis. Für $N\mathfrak{p}\leqslant g+1$ folgt wegen (1.3): $0\leqslant G(\mathfrak{p}) \leqslant \left(1-\frac{1}{g^2}\right)N\mathfrak{p}$. Für $N\mathfrak{p}\geqslant g+2$ ergibt sich mit Lemma 3.1:

$$0 \leqslant G(\mathfrak{p}) \leqslant \frac{g}{N\mathfrak{p}-1} N\mathfrak{p} \leqslant \left(1-\frac{1}{g+1}\right) N\mathfrak{p}.$$

Die weiteren Untersuchungen setzen ein genaues Studium der Funktion $L(\mathfrak{p})$ voraus. Es ist das Ziel der folgenden Überlegungen, für $b\geqslant a\geqslant 2$ die Abschätzung

$$\sum_{a\leqslant N\mathfrak{p}<b} \frac{G(\mathfrak{p})-1}{N\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} \ll 1 \tag{3.2}$$

zu beweisen. Bei einer binären Form $F(x,y)$ läßt sich $L(\mathfrak{p})$ durch die Substitution $\alpha\equiv\beta\gamma \bmod \mathfrak{p}$ auf die Anzahl der Lösungen $\gamma \bmod \mathfrak{p}$ von $F(\gamma,1)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$ zurückführen. Unter Verwendung der Beziehung (3.6) aus [19] ergibt sich dann (3.2). Für ein absolut-irreduzibles Polynom $F(x,y)$ erhält man eine passende Abschätzung für $L(\mathfrak{p})$ aus einer Arbeit von A. Weil (vergl. [21], S. 92). In dem vorliegenden allgemeinen Fall muß man die Untersuchungen von G. Greaves in [8] geeignet modifizieren, um (3.2) zu beweisen.

Es bezeichne $L_0(\mathfrak{p})$ die Anzahl der Lösungen mod $\mathfrak{p}$ von $F(x,y)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$. Dann gilt:

$$L(\mathfrak{p}) = L_0(\mathfrak{p}) + O(1). \tag{3.3}$$

Nach [10], S. 352–355, gibt es in einem geeigneten Erweiterungskörper $K_0$ von $K$ eine Zerlegung in absolut-irreduzible Faktoren der Form

$$(3.4)\qquad \gamma F(x,y) = F_1(x,y)\cdots F_m(x,y) \quad \text{mit} \quad \gamma \in Z_K,\ \gamma \neq 0,$$

$$F_k(x,y) := \sum_{i,j} \varrho_{ij}^{(k)} x^i y^j \in Z_{K_0}[x,y], \qquad k = 1,\ldots,m,$$

wobei die Polynome $F_k(x,y)$ bezüglich $K$ konjugiert sind, und die höchsten Koeffizienten in $y$ von $F_1(x,y),\ldots,F_m(x,y)$ Polynome in $x$ mit denselben höchsten Koeffizienten aus $\boldsymbol{Z}$ sind. Ferner gilt:

$$m = [K_0:K] \quad (= \text{Grad von } K_0 \text{ über } K).$$

Die Koeffizienten $\varrho_{ij}^{(k)}$ von $F_k(x,y)$ erzeugen durch Adjunktion zu $K$ den vollen Körper $K_0$ ([10], S. 354):

$$(3.5)\qquad K_0 = K(\ldots\varrho_{ij}^{(k)}\ldots) = K(\theta_k), \quad \theta_k \in Z_{K_0}, \quad k = 1,\ldots,m.$$

Lemma 3.3. *Es bezeichne $E(\mathfrak{p})$ für ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $K$ die Anzahl der verschiedenen Primidealfaktoren ersten Grades bzgl. $K$ von $\mathfrak{p}$ in $K_0$. Dann gilt:*

$$L_0(\mathfrak{p}) = N\mathfrak{p}\cdot E(\mathfrak{p}) + O\{(N\mathfrak{p})^{1/2}\}.$$

Beweis. Für $N\mathfrak{p} \ll 1$ ergibt sich die Behauptung wegen $E(\mathfrak{p}) \ll 1$. Es sei also $N\mathfrak{p} \geqslant c_3(F,K)$, wobei sich die genügend große Konstante $c_3$ aus dem Beweisgang ergeben wird.

Im weiteren Verlauf des Beweises werden Primideale in $Z_{K_0}$ mit $\mathscr{P}$ bezeichnet. Das Polynom $\bar{q}$ bzw. $\bar{\bar{q}}$ entsteht aus dem Polynom $q$, indem man alle Koeffizienten von $q$ durch die zugehörigen Restklassen $\bmod\ \mathfrak{p}$ bzw. $\bmod\ \mathscr{P}$ ersetzt. Die Polynome $\bar{\bar{F}}_k(x,y)$ bleiben für $N\mathfrak{p} \geqslant c_3$ absolut-irreduzibel ([21], S. 193).

Es sei $p(x) \in Z_K[x]$ das Minimalpolynom von $\theta_1$ über $K$. Für $N\mathfrak{p} \geqslant c_3$ ($\mathfrak{p} \nmid$ Diskriminante von $p(x)$, $\mathfrak{p} \nmid$ Relativdiskriminante von $K_0$ nach $K$) sind die Primidealteiler $\mathscr{P}_1,\ldots,\mathscr{P}_s$ von $\mathfrak{p}$ in $Z_{K_0}$ eineindeutig den Faktoren der Zerlegung

$$(3.6)\qquad \bar{p}(x) = \bar{p}_1(x)\cdots\bar{p}_s(x)$$

in verschiedene irreduzible Polynome aus $Z_K/\mathfrak{p}$ zugeordnet. Ferner ist der Grad von $\mathscr{P}_i$ über $K$ gleich dem Grad des entsprechenden Polynoms $\bar{p}_i(x)$ ([1], Chapter 11). Somit folgt:

(3.7) $E(\mathfrak{p})$ ist die Anzahl der Polynome $\bar{p}_i(x)$ vom Grade 1.

Es sei $\mathscr{P}$ ein Primidealteiler von $\mathfrak{p}$ in $Z_K$. Da für Elemente $\alpha,\beta \in Z_K$ die Kongruenzen $\alpha \equiv \beta \bmod \mathfrak{p}$ und $\alpha \equiv \beta \bmod \mathscr{P}$ gleichbedeutend sind, ist jede Restklasse $\bmod\ \mathfrak{p}$ ganz in einer Restklasse $\bmod\ \mathscr{P}$ enthalten. Hiermit ist eine Einbettung des Restklassenkörpers $Z_K/\mathfrak{p}$ in den Restklassenkörper $Z_{K_0}/\mathscr{P}$ gegeben.



Man überlegt sich nun leicht, daß für $N\mathfrak{p} \geqslant c_3$ wegen (3.5) gilt:

$$(3.8)\qquad Z_K/\mathfrak{p}(\ldots\bar{\bar{\varrho}}_{ij}^{(k)}\ldots) = Z_K/\mathfrak{p}(\bar{\bar{\theta}}_k), \quad k = 1,\ldots,m.$$

Es sei in (3.6)

$$\bar{p}(x) = (x-\bar{\mu}_1)\cdots(x-\bar{\mu}_E)\bar{p}_{E+1}(x)\cdots\bar{p}_s(x),$$

wobei $\mu_1,\ldots,\mu_E$ paarweise verschiedene Zahlen aus $Z_K$ sind. Dann folgt bei geeigneter Numerierung:

$$\bar{\bar{\theta}}_1 = \bar{\mu}_1, \quad \ldots, \quad \bar{\bar{\theta}}_E = \bar{\mu}_E,$$

$$(3.9)\qquad \prod_{k=l_i}^{k_i}(x-\bar{\bar{\theta}}_k) = \bar{p}_{E+i}(x) \in Z_K/\mathfrak{p}[x],$$

wobei

$$E = k_0 < k_1 < \ldots < k_{s-E} = m, \quad l_i = k_{i-1}+1, \quad i = 1,\ldots,s-E.$$

Mit (3.8) ergibt sich:

$$\bar{\bar{F}}_k(x,y) \in Z_K/\mathfrak{p}[x,y], \quad k = 1,\ldots,E.$$

Die Koeffizienten des zu $\bar{p}_{E+i}(x)$ gehörigen Polynoms

$$\bar{\bar{G}}_i(x,y) := \bar{\bar{F}}_{l_i}(x,y)\cdots\bar{\bar{F}}_{k_i}(x,y)$$

sind als symmetrische Ausdrücke in den $\bar{\bar{\theta}}_{l_i},\ldots,\bar{\bar{\theta}}_{k_i}$ wegen (3.8) und (3.9) aus $Z_K/\mathfrak{p}$. Es sei

$$(3.10)\qquad \bar{\gamma}\bar{F}(x,y) = \bar{H}_1(x,y)\cdots\bar{H}_t(x,y), \quad \bar{\gamma} \neq \bar{0},$$

eine Zerlegung in Primpolynome aus $Z_K/\mathfrak{p}[x,y]$. Dann folgt bei passender Numerierung:

$$(3.11)\qquad \bar{H}_i(x,y) = \bar{\eta}_i\bar{\bar{F}}_i(x,y), \quad \eta_i \in Z_K, \quad i = 1,\ldots,E.$$

Ein weiteres Polynom $\bar{H}_l(x,y)$ mit $E+1 \leqslant l \leqslant t$ kann nicht absolut-irreduzibel sein, denn sonst erhält man mit (3.4):

$$\bar{\bar{F}}_j(x,y) = \bar{\varrho}_l\bar{H}_l(x,y), \quad \varrho_l \in Z_K, \quad j = j(l) \geqslant E+1.$$

Das ist aber wegen (3.8) ein Widerspruch zu (3.9) und (3.6). Somit ergibt sich:

(3.12) $E = E(\mathfrak{p})$ ist die Anzahl der absolut-irreduziblen Faktoren $\bar{H}_i(x,y)$ in (3.10).

Nun gilt nach [21], S. 92, wegen (3.12):

$$(3.13)\qquad \sum_{\alpha \bmod \mathfrak{p}} \sum_{\substack{\beta \bmod \mathfrak{p} \\ H_i(\alpha,\beta)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}}} 1 = N\mathfrak{p} + O(\sqrt{N\mathfrak{p}}), \quad i = 1,\ldots,E.$$

Ferner folgt nach [5], S. 13, und [21], S. 155:

$$\sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{p} \\ H_i(\alpha,\beta)\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}}} \sum_{\beta \bmod \mathfrak{p}} 1 \ll 1, \quad i = E+1, \ldots, t. \tag{3.14}$$

Um Lemma 3.3 vollständig zu beweisen, braucht jetzt nur noch die Lösungsanzahl von

$$H_i(\alpha, \beta) \equiv H_j(\alpha, \beta) \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$$

für $i \neq j$ abgeschätzt zu werden. Dabei kann man wegen (3.14) annehmen, daß die Polynome $\bar{H}_i$ und $\bar{H}_j$ absolut-irreduzibel sind. Wegen (3.11), (3.4) und (3.5) gilt für $N\mathfrak{p} \geqslant c_3$:

$$\big(\bar{H}_i(x, y), \bar{H}_j(x, y)\big) = \bar{1}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant E.$$

Somit folgt nach [16], Satz 101:

$$\sum_{\substack{\bar{\alpha} \bmod \mathfrak{p} \\ \bar{H}_i(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\bar{H}_j(\bar{\alpha},\bar{\beta})=\bar{0}}} \sum_{\bar{\beta} \bmod \mathfrak{p}} 1 \ll 1, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant E. \tag{3.15}$$

Insgesamt ergibt sich mit (3.10), (3.13), (3.14) und (3.15) die Behauptung von Lemma 3.3.

Lemma 3.4. *Für $z \geqslant 2$ gilt*:

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant z} \frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} = \log z + O(1).$$

Beweis. Nach (3.1), (3.3) und Lemma 3.3 folgt:

$$G(\mathfrak{p}) = E(\mathfrak{p}) + O\big((N\mathfrak{p})^{-1/2}\big). \tag{3.16}$$

Nun gilt wegen Lemma 3.3 aus [19]:

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant z} \frac{E(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} = \log z + O(1).$$

Bemerkung. Unter Verwendung der wohlbekannten Beziehung ([13], S. 117)

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant z} (\log N\mathfrak{p})/N\mathfrak{p} = \log z + O(1)$$

folgt aus Lemma 3.4 die Abschätzung (3.2). Durch partielle Summation erhält man hieraus:

$$\sum_{a \leqslant N\mathfrak{p} < b} \frac{G(\mathfrak{p}) - 1}{N\mathfrak{p}} \ll \frac{1}{\log a}, \quad 2 \leqslant a \leqslant b. \tag{3.17}$$



Mit diesem Resultat, Lemma 3.1 und Lemma 3.2 lassen sich ebenso wie in [17], S. 6, die Konvergenz und die Positivität des unendlichen Produkts in (1.6) beweisen. Es ergibt sich:

$$\prod_{a \leqslant N\mathfrak{p} < b} \frac{1 - G(\mathfrak{p})/(N\mathfrak{p})^s}{1 - 1/(N\mathfrak{p})^s} = 1 + O\left(\frac{1}{\log a}\right), \quad 2 \leqslant a \leqslant b, \ s \geqslant 1. \tag{3.18}$$

Zum Abschluß dieses Paragraphen sollen drei asymptotische Beziehungen bewiesen werden, die man bei den Untersuchungen zur Selbergschen Siebmethode benötigt.

Lemma 3.5. *Es seien $z \geqslant 2$ eine reelle Zahl und*

$$W(z) := \prod_{N\mathfrak{p} < z} \big(1 - G(\mathfrak{p})/N\mathfrak{p}\big); \quad C_0 := \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1 - G(\mathfrak{p})/N\mathfrak{p}}{1 - 1/N\mathfrak{p}}; \tag{3.19}$$

*dann gilt*:

$$W(z) = C_0 \frac{e^{-\gamma_0}}{a_K} \frac{1}{\log z} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log z}\right)\right\}.$$

*Dabei bezeichnen $\gamma_0$ die Eulersche Konstante und $a_K$ das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion in $K$.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich aus (3.18) mit $s = 1$ und der folgenden Beziehung (2.3) aus [20]:

$$\prod_{N\mathfrak{p} < z} \left(1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}}\right) = \frac{e^{-\gamma_0}}{a_K} \frac{1}{\log z} + O\left(\frac{1}{\log^2 z}\right).$$

Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{q}$ in $K$ mit $\mu(\mathfrak{q}) \neq 0$ setze man:

$$T(\mathfrak{q}) := \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} \prod_{\mathfrak{p} | \mathfrak{q}} \frac{N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p} - G(\mathfrak{p})}. \tag{3.20}$$

Wegen $G(\mathfrak{p}) < N\mathfrak{p}$ (Lemma 3.2) ist $T(\mathfrak{q})$ wohldefiniert.

Lemma 3.6. *Für $2 \leqslant a \leqslant b$ gilt*:

$$\sum_{a \leqslant N\mathfrak{p} < b} T(\mathfrak{p}) = \log \frac{\log b}{\log a} + O\left(\frac{1}{\log a}\right).$$

Beweis. Unter Verwendung der Beziehung ([13], S. 152)

$$\sum_{a \leqslant N\mathfrak{p} < b} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \log \frac{\log b}{\log a} + O\left(\frac{1}{\log a}\right)$$

folgt aus (3.17):

$$\sum_{a\leqslant N\mathfrak{p}<b}\frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}=\log\frac{\log b}{\log a}+O\left(\frac{1}{\log a}\right). \tag{3.21}$$

Nun gilt:

$$\sum_{a\leqslant N\mathfrak{p}<b}T(\mathfrak{p})=\sum_{a\leqslant N\mathfrak{p}<b}\frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}+O\left\{\sum_{N\mathfrak{p}\geqslant a}\frac{G^2(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}(N\mathfrak{p}-G(\mathfrak{p}))}\right\}.$$

Wegen Lemma 3.1 und Lemma 3.2 ergibt sich die Behauptung.

LEMMA 3.7. *Für $z\geqslant 2$ gilt:*

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant z}\mu^2(\mathfrak{q})T(\mathfrak{q})=a_K\frac{1}{C_0}\log z+O(1).$$

*Dabei sind $a_K$ und $C_0$ wie in Lemma 3.5 definiert.*

Beweis. Die Beweismethode benutzt Überlegungen aus [4], S. 147, wo ein ähnliches Problem im Körper der rationalen Zahlen behandelt wird.

Für $s>1$ ergibt sich:

$$\sum_{\mathfrak{q}}\mu^2(\mathfrak{q})T(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{-s+1}=\prod_{\mathfrak{p}}\left\{1+\frac{G(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}\left(1-\frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}\right\}. \tag{3.22}$$

Nun gilt wegen (3.16):

$$1+\frac{G(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}\left(1-\frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}=1+\frac{E(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}+O\left((N\mathfrak{p})^{-s-1/2}\right),$$

$$\left(1-\frac{1}{(N\mathfrak{p})^s}\right)^{E(\mathfrak{p})}=1-\frac{E(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}+O\left((N\mathfrak{p})^{-2s}\right).$$

Somit ist das unendliche Produkt

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left\{\left(1+\frac{G(\mathfrak{p})}{(N\mathfrak{p})^s}\left(1-\frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{(N\mathfrak{p})^s}\right)^{E(\mathfrak{p})}\right\}$$

für $s>1/2$ absolut konvergent. Ferner gilt nach Definition von $E(\mathfrak{p})$ für $s>1$:

$$\prod_{\mathfrak{p}}\left(1-\frac{1}{(N\mathfrak{p})^s}\right)^{-E(\mathfrak{p})}=\zeta_{K_0}(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k^s},$$



wobei $\zeta_{K_0}(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion in $K_0$ bezeichnet, und $\sum_{k=1}^{\infty}b_kk^{-s}$ für $s>1/2$ absolut konvergiert. Es folgt:

$$\sum_{\mathfrak{q}}\mu^2(\mathfrak{q})T(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{-s+1}=\zeta_{K_0}(s)\sum_{k=1}^{\infty}d_kk^{-s},\qquad s>1,$$

mit einer für $s>1/2$ absolut konvergenten Reihe.

Wegen $\sum_{\substack{\mathfrak{a}\subseteq Z_{K_0}\\ N\mathfrak{a}\leqslant z}}1=a_{K_0}z+O\left(z^{1-\frac{2}{nm+1}}\right)$ ([14], Satz 210), erhält man:

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant z}\mu^2(\mathfrak{q})T(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}=a_{K_0}z\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k}+O\left(z^{1-\frac{1}{2(nm+1)}}\right). \tag{3.23}$$

Schließlich ist

$$\begin{aligned}a_{K_0}\sum_{k=1}^{\infty}d_kk^{-1}&=\lim_{z\to\infty}(1/z)\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant z}\mu^2(\mathfrak{q})T(\mathfrak{q})N\mathfrak{q}\\&=\lim_{s\to 1+}(s-1)\sum_{\mathfrak{q}}\mu^2(\mathfrak{q})T(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{-s+1}\\&=a_K\lim_{s\to 1+}\zeta_K^{-1}(s)\sum_{\mathfrak{q}}\mu^2(\mathfrak{q})T(\mathfrak{q})(N\mathfrak{q})^{-s+1}=a_K/C_0.\end{aligned}$$

Dabei gilt die letzte Beziehung wegen (3.22), (3.18) und Lemma 3.2. Die Behauptung von Lemma 3.7 ergibt sich aus (3.23) durch partielle Summation.

**4.** In diesem Abschnitt wird eine Erweiterung der Selbergschen Siebmethode in algebraischen Zahlkörpern angegeben. Die Ausführungen beruhen auf Untersuchungen von W. Schaal in [20] über das lineare Selbergsche Sieb. Um den dortigen Hauptsatz auf die in dieser Arbeit betrachteten Probleme anwenden zu können, muß man ihn für $\mathfrak{k}=(1)$ geeignet verallgemeinern. Diese Verallgemeinerung findet man für den Körper der rationalen Zahlen in [9], Kapitel 6–8. Hier soll der etwas abweichenden Beweismethode aus [20] gefolgt werden.

Zunächst ordne man wie in [20], S. 272, die Primideale $\mathfrak{p}$ in $Z_K$ nach der Größe ihrer Norm an, d.h. $\mathfrak{p}_i$ komme vor $\mathfrak{p}_j$, falls $N\mathfrak{p}_i<N\mathfrak{p}_j$ gilt. Primideale gleicher Norm werden beliebig, aber fest angeordnet. Ferner sei $\mathfrak{p}_0:=(1)$.

Für eine ganze rationale Zahl $l\geqslant 0$ sei

$$V(l):=\prod_{i=1}^{l}\mathfrak{p}_i,\quad l\geqslant 1;\quad V(0):=1. \tag{4.1}$$

Man betrachte für ein ganzes Ideal $\mathfrak{q}$ in $K$ die Folgen:

$$\mathfrak{A} := \{F(\omega, \omega');\ \omega, \omega' \in \mathfrak{R}\}, \quad \mathfrak{A}_\mathfrak{q} := \{\xi \in \mathfrak{A};\ \xi \equiv 0 \bmod \mathfrak{q}\}.$$

Es sei

$$A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, l) := \left|\{\xi \in \mathfrak{A}_\mathfrak{q};\ (\xi, V(l)) = 1\}\right|, \quad (\mathfrak{q}, V(l)) = 1. \tag{4.2}$$

Diese Anzahlfunktion soll im folgenden nach oben und unten abgeschätzt werden.

Durch vollständige Induktion nach $l \geqslant 0$ erhält man für $(\mathfrak{q}, V(l)) = 1$ die Identität:

$$A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, l) = |\mathfrak{A}_\mathfrak{q}| - \sum_{i=1}^{l} A(\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i}, i-1). \tag{4.3}$$

Schließlich bedeuten für ganze Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ aus $K$:

$$S_\mathfrak{a}(x, l) := \sum_{\substack{N\mathfrak{q} \leqslant x \\ \mathfrak{q} | V(l) \\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{a}) = 1}} T(\mathfrak{q}), \quad l \geqslant 0,\ x \geqslant 1; \tag{4.4}$$

$$\lambda_\mathfrak{d} := \mu(\mathfrak{d}) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}} \left(1 - \frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1} \frac{S_\mathfrak{d}(t/N\mathfrak{d}, l)}{S_1(t, l)}, \quad l \geqslant 0,\ t > 1. \tag{4.5}$$

Es ergibt sich unmittelbar:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_\mathfrak{d} = 0 \quad \text{für} \quad N\mathfrak{d} > t. \tag{4.6}$$

Lemma 4.1. *Für $l \geqslant 0$ gilt:*
(a) $|\lambda_\mathfrak{d}| \leqslant 1$, *falls* $\mathfrak{d} | V(l)$;
(b) $\displaystyle\sum_{\substack{\mathfrak{d}|V(l) \\ \mathfrak{a}|\mathfrak{d}}} \lambda_\mathfrak{d} \frac{G(\mathfrak{d})}{N\mathfrak{d}} = \frac{\mu(\mathfrak{a})\, T(\mathfrak{a})}{S_1(t, l)}$, *falls* $1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant t$.

Beweis. Zu (a): Zunächst erhält man mit (4.4):

$$S_1(t, l) = \sum_{\mathfrak{a}|\mathfrak{d}} \sum_{\substack{N\mathfrak{q} \leqslant t \\ \mathfrak{q}|V(l) \\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}}} T(\mathfrak{q}) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}|\mathfrak{d} \\ \mathfrak{a}|V(l)}} T(\mathfrak{a}) S_\mathfrak{d}(t/N\mathfrak{a}, l).$$

Für $\mathfrak{d} | V(l)$ folgt mit (3.20) wegen $\mu(\mathfrak{d}) \neq 0$:

$$S_1(t, l) \geqslant S_\mathfrak{d}\left(\frac{t}{N\mathfrak{d}}, l\right) \sum_{\mathfrak{a}|\mathfrak{d}} T(\mathfrak{a}) = S_\mathfrak{d}\left(\frac{t}{N\mathfrak{d}}, l\right) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{d}} \left(1 - \frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}\right)^{-1}.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung (a) nach (4.5).



Zu (b): Es sei $1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant t$; dann folgt mit (4.5), (3.20) und (4.4):

$$\sum_{\substack{\mathfrak{d}|V(l) \\ \mathfrak{a}|\mathfrak{d}}} \lambda_\mathfrak{d} \frac{G(\mathfrak{d})}{N\mathfrak{d}} = \frac{\mu(\mathfrak{a}) T(\mathfrak{a})}{S_1(t, l)} \sum_{\substack{\mathfrak{b}|V(l) \\ (\mathfrak{b}, \mathfrak{a}) = 1}} \mu(\mathfrak{b}) T(\mathfrak{b}) \sum_{\substack{N\mathfrak{q} \leqslant t/N(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \\ \mathfrak{q}|V(l) \\ (\mathfrak{q}, \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = 1}} T(\mathfrak{q})$$

$$= \frac{\mu(\mathfrak{a}) T(\mathfrak{a})}{S_1(t, l)} \sum_{\substack{N\mathfrak{c} \leqslant t/N\mathfrak{a} \\ \mathfrak{c}|V(l) \\ (\mathfrak{c}, \mathfrak{a}) = 1}} T(\mathfrak{c}) \sum_{\mathfrak{b}|\mathfrak{c}} \mu(\mathfrak{b}) = \frac{\mu(\mathfrak{a}) T(\mathfrak{a})}{S_1(t, l)}.$$

Satz 4.1. *Es sei $\mu(\mathfrak{q}) \neq 0$ und $(\mathfrak{q}, V(l)) = 1$, $l \geqslant 0$. Dann gilt für $t > 1$ mit den Bezeichnungen aus Satz 2.1:*

$$A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, l) \leqslant \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} \frac{I^2}{S_1(t, l)} + \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqslant t^2 \\ \mathfrak{a}|V(l)}} 3^{\nu(\mathfrak{a})} |R(P; \mathfrak{a}\mathfrak{q})|.$$

Beweis. Zunächst ist wegen (4.6):

$$A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, l) \leqslant \sum_{\xi \in \mathfrak{A}_\mathfrak{q}} \Big\{\sum_{\substack{\mathfrak{d}|\xi \\ \mathfrak{d}|V(l)}} \lambda_\mathfrak{d}\Big\}^2 = \sum_{\substack{\mathfrak{d}_i|V(l) \\ i=1,2}} \lambda_{\mathfrak{d}_1} \lambda_{\mathfrak{d}_2} |\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]}|.$$

Daraus folgt mit (2.9) und (3.1) wegen $(\mathfrak{q}, V(l)) = 1$:

$$A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, l) \leqslant \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 \sum_{\substack{\mathfrak{d}_i|V(l) \\ i=1,2}} \lambda_{\mathfrak{d}_1} \lambda_{\mathfrak{d}_2} \frac{G([\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2])}{N[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]} + \sum_{\substack{\mathfrak{d}_i|V(l) \\ i=1,2}} |\lambda_{\mathfrak{d}_1} \lambda_{\mathfrak{d}_2}| |R(P; \mathfrak{q}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2])| = \Sigma_1 + \Sigma_2. \tag{4.7}$$

In der Summe $\Sigma_1$ kann man alle Glieder mit $G([\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]) = 0$ weglassen. Wegen der Multiplikativität von $G(\mathfrak{q})$ ist dann $G(\mathfrak{p}) \neq 0$ für alle Primidealteiler von $\mathfrak{d}_1$ oder $\mathfrak{d}_2$. Somit erhält man in $\Sigma_1$:

$$\frac{G([\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2])}{N[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]} = \frac{G(\mathfrak{d}_1) G(\mathfrak{d}_2)}{N\mathfrak{d}_1 \cdot N\mathfrak{d}_2} \frac{N(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)}{G((\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2))}.$$

Weiter gilt wegen (3.20) in $\Sigma_1$:

$$\frac{N(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)}{G((\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2))} = \prod_{\mathfrak{p}|(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)} \left(1 + \frac{1}{T(\mathfrak{p})}\right) = \sum_{\mathfrak{q}|(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)} \frac{1}{T(\mathfrak{q})}.$$

Insgesamt ergibt sich mit (4.6) für das Hauptglied in (4.7):

$$\Sigma_1 = \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 \sum_{\substack{N\mathfrak{q} \leqslant t \\ \mathfrak{q}|V(l)}}' \frac{1}{T(\mathfrak{q})} \Big\{\sum_{\substack{\mathfrak{d}|V(l) \\ \mathfrak{q}|\mathfrak{d}}} \lambda_\mathfrak{d} \frac{G(\mathfrak{d})}{N\mathfrak{d}}\Big\}^2.$$

Der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß nur über Ideale $\mathfrak{q}$ mit $G(\mathfrak{q}) \neq 0$ summiert wird. Nach Lemma 4.1 und (4.4) gilt weiter:

$$\Sigma_1 = \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} \frac{I^2}{S_1(t, l)}.$$

Für das Restglied $\Sigma_2$ in (4.7) erhält man mit (4.6) und Lemma 4.1:

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{\substack{\mathfrak{d}_i \mid F(l) \\ N\mathfrak{d}_i \leqslant t \\ i=1,2}} |R(P; \mathfrak{q}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2])|.$$

Wegen $\sum\limits_{\substack{\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2 \\ [\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] = \mathfrak{a}}} 1 \leqslant 3^{\nu(\mathfrak{a})}$, $\mu(\mathfrak{a}) \neq 0$, folgt weiter:

$$\Sigma_2 \leqslant \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqslant t^2 \\ \mathfrak{a} \mid F(l)}} 3^{\nu(\mathfrak{a})} |R(P; \mathfrak{a}\mathfrak{q})|.$$

Damit ist Satz 4.1 vollständig bewiesen.

Als Anwendung von Satz 4.1 ergibt sich der erste Teil des in der Einleitung formulierten Satzes. Für ein ganzes rationales Polynom in einer Unbestimmten findet man ein entsprechendes Resultat im Körper der rationalen Zahlen in [9], Theorem 5.9.

Satz 4.2. *Es sei $F(x, y) \in Z_K[x, y]$ ein von $x$ und $y$ abhängiges irreduzibles Polynom ohne festen Primidealteiler. Ferner sei die Bedingung* (1.3) *erfüllt. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz* 1.1:

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega')\,\mathrm{prim}}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \leqslant 2c_0(F, K) \frac{P^2}{\log^3 P} \left\{1 + O\left(\frac{\log\log P}{\log P}\right)\right\}, \qquad P \geqslant 3.$$

Beweis. Man kann $P \geqslant P_0 = P_0(F, K)$ wählen, wobei sich $P_0$ aus dem Beweisgang ergeben wird. Es sei $l_0 = l_0(t)$ für $t \geqslant 2$ diejenige ganze rationale Zahl $\geqslant 0$, für welche gilt:

$$N\mathfrak{p}_{l_0} \leqslant t < N\mathfrak{p}_{l_0+1}. \tag{4.8}$$

Dann folgt mit Satz 4.1:

$$A(\mathfrak{A}, l_0) \leqslant \frac{I^2}{S_1(t, l_0)} + \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant t^2} \mu^2(\mathfrak{a}) 3^{\nu(\mathfrak{a})} |R(P; \mathfrak{a})|. \tag{4.9}$$

Nun ist wegen (4.8) und Lemma 3.7:

$$S_1(t, l_0) = \sum_{N\mathfrak{q} \leqslant t} \mu^2(\mathfrak{q}) T(\mathfrak{q}) = a_K C_0^{-1} \log t + O(1),$$



wobei

$$a_K = (2\pi)^{r_2} \frac{2^{r_1} R h}{w\sqrt{|d|}} \qquad ([11], \text{ S. } 156).$$

Man setze $t^2 := P(\log P)^{-A_0}$; dann ergibt sich:

$$\frac{1}{\log t} = \frac{2}{\log P} \left\{1 + O\left(\frac{\log\log P}{\log P}\right)\right\}.$$

Somit erhält man nach (4.9) mit (2.4), (3.1), (1.6) und Satz 2.1:

$$A(\mathfrak{A}, l_0) \leqslant 2c_0(F, K) \frac{P^2}{\log^3 P} \left\{1 + O\left(\frac{\log\log P}{\log P}\right)\right\}. \tag{4.10}$$

Nun gilt wegen (4.8):

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega')\,\mathrm{prim}}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \leqslant A(\mathfrak{A}, l_0) + \sum_{\substack{|N\omega_1| \leqslant t \\ (\omega_1) = \mathfrak{p}}} \sum_{\omega \in \mathfrak{R}} \sum_{\substack{\omega' \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') = \omega_1}} 1.$$

Aus $\omega_1 = \sum\limits_{i+j \leqslant g} \gamma_{ij} \omega^i \omega'^j$ $(\omega, \omega' \in \mathfrak{R})$ folgt wegen (1.2):

$$|\omega_1^{(k)}| \leqslant (g+1)^2 \max_{i,j,k} |\gamma_{ij}^{(k)}| P_k^g \leqslant c_4(F, K) P_k^g, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{4.11}$$

Weiter gilt:

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') = \omega_1}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \leqslant g \sum_{\omega \in \mathfrak{R}} 1 + \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, y) - \omega_1 = 0}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1.$$

Es sei $F(x, y) = \sum\limits_{j=0}^{g} f_j(x) y^j$. Aus $F(\omega, y) - \omega_1 = 0$ folgt dann $f_0(\omega) = \omega_1$ und $f_1(\omega) = \ldots = f_g(\omega) = 0$. Da $F(x, y)$ nach Voraussetzung von $y$ abhängig ist, können nicht alle Polynome $f_i(x)$, $1 \leqslant i \leqslant g$, verschwinden. Somit ergibt sich:

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') = \omega_1}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \leqslant 2g \sum_{\omega \in \mathfrak{R}} 1 \ll P.$$

Insgesamt erhält man mit (8) aus [12] wegen $t \leqslant P^{1/2}$:

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega')\,\mathrm{prim}}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \leqslant A(\mathfrak{A}, l_0) + O\{P^{3/2} (\log P)^r\}.$$

Nun folgt die Behauptung von Satz 4.2 aus (4.10).

Korollar 4.1. *Es sei $\gamma_0 \in Z_K$ mit $(\gamma_0, \prod\limits_{N\mathfrak{p}=2} \mathfrak{p}) = 1$ und $|\gamma_0^{(k)}| \ll P_k$,*

$P_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. *Dann gilt für* $P = P_1 \cdots P_n \geqslant 3$:

$$\sum_{\substack{\omega_1 \in \mathfrak{R} \\ \gamma_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3}} \sum_{\omega_2 \in \mathfrak{R}} 1 \leqslant 2 \frac{\sqrt{|d|}}{(2\pi)^{r_2}} \left(\frac{w}{2^{r_1} hR}\right)^3 \prod_{\mathfrak{p} | \gamma_0} \left(1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^2}\right) \times$$

$$\times \prod_{\mathfrak{p} \nmid \gamma_0} \left(1 + \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^3}\right) \frac{P^2}{\log^3 P} \left\{1 + O\left(\frac{\log\log P}{\log P}\right)\right\}.$$

*Die auftretende O-Konstante hängt nur vom Körper K ab.*

Beweis. Man betrachte $F(x, y) = \gamma_0 - x - y$. Dann ist $m_0 = 1$ in Lemma 2.1. Ferner gilt:

$$L(\mathfrak{p}) = \begin{cases} N\mathfrak{p} - 1, & \text{falls} \quad \gamma_0 \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}, \\ N\mathfrak{p} - 2, & \text{falls} \quad \gamma_0 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}. \end{cases}$$

Somit folgt:

$$G(\mathfrak{p}) = 1 + O\big((N\mathfrak{p})^{-1}\big).$$

Weiter ergibt sich:

$$1 \ll_K C_0 = \prod_{\mathfrak{p}|\gamma_0} \left(1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^2}\right) \prod_{\mathfrak{p} \nmid \gamma_0} \left(1 + \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^3}\right) \ll_K 1.$$

Schließlich gilt in (4.11):

$$|\omega_3^{(k)}| \leqslant |\gamma_0^{(k)}| + 2P_k \ll P_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Somit ist die in Satz 4.2 auftretende $O$-Konstante in dem vorliegenden Spezialfall nur vom Körper $K$ abhängig.

Bemerkung. Die Abschätzung in Korollar 4.1 läßt sich für $P_k = |\gamma_0^{(k)}|$, $k = 1, \ldots, n$, in etwa mit Satz 10.1 aus [15] vergleichen. Dort wird für eine total-positive Zahl $\gamma_0 \in Z_K$ mit $(\gamma_0, \prod_{N\mathfrak{p}=2} \mathfrak{p}) = 1$ die folgende Beziehung bewiesen:

$$\sum_{\substack{\omega_1 \in \mathfrak{R} \\ \gamma_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3}} \sum_{\omega_2 \in \mathfrak{R}} \sum_{\omega_3 \in \mathfrak{R}} 1 = 2^{-r_1} c_5^{r_2} \sqrt{|d|} \left(\frac{w}{2^{r_1} hR}\right)^3 \prod_{\mathfrak{p}|\gamma_0} \left(1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^2}\right) \times$$

$$\times \prod_{\mathfrak{p} \nmid \gamma_0} \left(1 + \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^3}\right) \frac{|N\gamma_0|^2}{\log^3 |N\gamma_0|} + O\left(\frac{|N\gamma_0|^2 \log\log |N\gamma_0|}{\log^4 |N\gamma_0|}\right),$$

wobei $0 < c_5 \leqslant 1/2\pi$ eine absolute Konstante ist.

Korollar 4.2. *Es sei* $\gamma_0 \in Z_K$ *mit* $\gamma_0 \neq 0$ *und* $\prod_{N\mathfrak{p}=2} \mathfrak{p} \,|\, \gamma_0$. *Dann gilt für* $P \geqslant 3$:

$$\sum_{\substack{\omega_1 \in \mathfrak{R} \\ \gamma_0 = \omega_1 \omega_2 + \omega_3}} \sum_{\omega_2 \in \mathfrak{R}} 1 \leqslant 2 \frac{\sqrt{|d|}}{(2\pi)^{r_2}} \left(\frac{w}{2^{r_1} hR}\right)^3 \prod_{\mathfrak{p}|\gamma_0} \left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}-1}\right) \prod_{\mathfrak{p} \nmid \gamma_0} \left(1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^2}\right) \times$$

$$\times \frac{P^2}{\log^3 P} \left\{1 + O\left(\frac{\log\log P}{\log P}\right)\right\}.$$



Die folgenden Überlegungen werden analog den in [20] angegebenen durchgeführt. Dabei sind die dortigen Untersuchungen so zu modifizieren, daß sie zur Lösung der in der vorliegenden Arbeit auftretenden Probleme verwendet werden können. Man betrachte $\mathfrak{k} = (1)$ in [20] und ersetze dort die Ausdrücke

$$\frac{1}{\varphi(\mathfrak{a})} \text{ bzw. } \frac{1}{N\mathfrak{a}} \quad \text{durch} \quad T(\mathfrak{q}) \text{ bzw. } \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}},$$

$$R_1(\varrho) \quad \text{durch} \quad W_1(l) := \prod_{i=1}^{l} \left(1 - \frac{G(\mathfrak{p}_i)}{N\mathfrak{p}_i}\right),$$

$$M_{\mathfrak{a}} \quad \text{durch} \quad \mathfrak{A}_{\mathfrak{q}}.$$

Nach Lemma 3.5 gilt:

$$W_1(l) = C_0 \frac{e^{-\gamma_0}}{a_K} \frac{1}{\log N\mathfrak{p}_l} \left\{1 + O\left(\frac{1}{\log N\mathfrak{p}_l}\right)\right\}, \quad l \geqslant 1, \tag{4.12}$$

weil es höchstens $n$ verschiedene Primideale mit gleicher Norm gibt.

Die analytischen Hilfsfunktionen $f_j(u)$, $F_j(u)$, $\lambda(u)$, $\Lambda(u)$ aus [20], S. 269–272, können unverändert übernommen werden. Insbesondere ist $\Lambda(u)$ für $u > 0$ eine gegen 1 monoton fallende und $\lambda(u)$, $\lambda(u) = 0$ für $0 < u \leqslant 2$, eine gegen 1 monoton wachsende Funktion.

Die Beweise der Resultate (2.21), Lemma 2.5, (2.29), (2.31), (2.44), (2.45), (4.1) und (4.4) aus [20] übertragen sich auf die entsprechenden Beziehungen in der vorliegenden Arbeit, denn die benötigten Hilfsmittel sind im Paragraphen 3 bereitgestellt worden.

Lemma 4.2. *Es seien* $l \in N$ *und* $\mathfrak{q}$ *ein ganzes Ideal in* $K$ *mit* $\mu(\mathfrak{q}) \neq 0$ *und* $(\mathfrak{q}, V(l)) = 1$. *Man setze* $P^* := P/N\mathfrak{q}$,

$$R_1 := \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqslant M_1 \\ \mathfrak{a} | V(l)}} 3^{v(\mathfrak{a})} |R(P; \mathfrak{a}\mathfrak{q})|, \qquad M_1 := \max\big(1, P^*(\log P^*)^{-3A_0}\big).$$

*Dann gilt für* $Np_l \leqslant P^*$:

(4.13)
$$A(\mathfrak{A}_q, l) \leqslant \frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l)\left\{1+F_0\left(\frac{\log P^*}{\log Np_l}\right)+O\left(\frac{(\log\log 3P^*)^2}{\log P^*}\right)\right\}+R_1;$$

$$(4.14)\qquad A(\mathfrak{A}_q, l) \leqslant \frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l)\left\{1+O\left(\frac{(\log\log 3P^*)^2}{\log P^*}\right)\right\}+R_1$$

$$\text{für } Np_l \leqslant \exp\left\{\frac{\log P^*}{\log\log 3P^*}\right\};$$

$$(4.15)\qquad A(\mathfrak{A}_q, l) \leqslant \frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l)\left\{1+O\left(\frac{1}{\log^2 P^*}\right)\right\}+R_1$$

$$\text{für } Np_l \leqslant \exp\left\{\frac{\sqrt{C_0}}{3\sqrt{a_K}}\left(\frac{\log P^*}{\log\log 3P^*}\right)^{1/2}\right\}.$$

Bemerkung. Alle drei Abschätzungen in Lemma 4.2 sind auch für $P^* > 1$, $l = 0$ erfüllt, denn nach (4.2) und (2.9) gilt:

$$A(\mathfrak{A}_q, 0) = |\mathfrak{A}_q| = \frac{G(q)}{Nq} I^2 + R(P; q).$$

Beweis zu Lemma 4.2. Es sei $2 \leqslant P^* \leqslant P_0$, wobei sich $P_0 = P_0(F, K)$ aus dem Beweisgang ergeben wird. Dann folgt für $Np_l \leqslant P^*$ nach (2.9) und (4.12):

$$A(\mathfrak{A}_q, l) \leqslant |\mathfrak{A}_q| = \frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l) W_1^{-1}(l) + R(P; q)$$
$$= R(P; q) + O\left\{\frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l)\right\}.$$

Daher ergeben sich alle drei Behauptungen für $P^* \leqslant P_0$. Im folgenden kann also $P^* \geqslant P_0$ angenommen werden. Nach Satz 4.1 gilt für $t > 1$:

$$A(\mathfrak{A}_q, l) \leqslant \frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l) \frac{1}{W_1(l) S_1(t, l)} + \sum_{\substack{Na \leqslant t^2 \\ a | V(l)}} 3^{v(a)} |R(P; aq)|.$$

Man setze:
$$t^2 = P^*(\log P^*)^{-3A_0}.$$

Um Lemma 4.2 vollständig zu beweisen, muß man nur den Ausdruck $(W_1(l) S_1(t, l))^{-1}$ in den angegebenen Bereichen geeignet abschätzen. Diese



Rechnungen verlaufen jedoch analog wie in [20], S. 295–297, so daß hier auf die Ausführung verzichtet werden kann.

SATZ 4.3. *Es seien* $l \in N$ *und* $q$ *ein ganzes Ideal in* $K$ *mit* $\mu(q) \neq 0$ *und* $(q, V(l)) = 1$. *Ferner seien*

$$P^* := \frac{P}{Nq} > 1, \quad Np_l \leqslant P^*,$$

$$R_2 := \sum_{\substack{Na \leqslant M \\ a | V(l)}} 3^{v(a)} |R(P; aq)|, \quad M := \max(1, P^*(\log P^*)^{-2A_0}).$$

*Dann gilt für* $j = 0, 1, \ldots$ *mit von* $j$ *unabhängiger Konstante* $c_6 = c_6(F, K)$:

(4.16) $A(\mathfrak{A}_q, l)$
$$\leqslant \frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l)\left\{1+F_j\left(\frac{\log P^*}{\log Np_l}\right)+\frac{(c_6 \log\log 3P^*)^{1/2+2j}}{(\log P^*)^{1/2}}\right\}+R_2;$$

(4.17) $A(\mathfrak{A}_q, l)$
$$\geqslant \frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l)\left\{1-f_j\left(\frac{\log P^*}{\log Np_l}\right)-\frac{(c_6 \log\log 3P^*)^{3/2+2j}}{(\log P^*)^{1/2}}\right\}-R_2.$$

Bemerkung. Satz 4.3 gilt wegen (2.9) und der Bemerkung in [20], S. 302, auch für $l = 0$.

Beweis zu Satz 4.3. Man setze $u := \log P^*/\log Np_l \geqslant 1$, wobei im folgenden $P^* \geqslant P_0$ angenommen werden kann.

Es sei zunächst $1 \leqslant u < 2$; dann folgt (4.17) wegen $f_j(u) = 1$ für $1 \leqslant u < 2$. Ferner erhält man nach Satz 4.1 mit $t^2 = P^*(\log P^*)^{-2A_0}$:

$$A(\mathfrak{A}_q, l) \leqslant \frac{G(q)}{Nq} I^2 W_1(l) \frac{1}{W_1(l) S_1(t, l)} + R_2.$$

Nun gilt wegen $u < 2$ nach (4.4) und Lemma 3.7:

$$S_1(t, l) = \sum_{\substack{Na \leqslant t \\ a | V(l)}} T(a) = \sum_{Na \leqslant t} \mu^2(a) T(a) = a_K C_0^{-1} \log t + O(1).$$

Folglich ergibt sich mit (4.12) wegen $F_j(u) = 2e^{\gamma_0}/u - 1$ für $1 \leqslant u < 2$ und $j \geqslant 1$:

$$(4.18)\qquad W_1^{-1}(l) S_1^{-1}(t, l) = 2e^{\gamma_0} \frac{\log Np_l}{\log P^*}\left\{1+O\left(\frac{\log\log 3P^*}{\log P^*}\right)\right\}$$
$$= 1 + F_j(u) + O\left(\frac{\log\log 3P^*}{\log P^*}\right), \quad j \geqslant 1.$$

Somit gilt (4.16) für $j \geq 1$ und $1 \leq u < 2$. Für $j = 0$ und $u \geq 1$ folgt (4.16) nach (4.13).

Im weiteren Verlauf des Beweises sei $u \geq 2$; dann gilt:

$$(4.19) \qquad N\mathfrak{p}_{i-1} \leq P^*/N\mathfrak{p}_i \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq l.$$

Mit (4.3), (2.9) und (2.24) aus [20] folgt wegen $(\mathfrak{q}, V(l)) = 1$:

$$(4.20) \quad A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, l) = |\mathfrak{A}_\mathfrak{q}| - \sum_{i=1}^{l} A(\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i}, i-1) = \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W_1(l) - $$
$$- \sum_{i=1}^{l} \left\{ A(\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i}, i-1) - \frac{G(\mathfrak{q})G(\mathfrak{p}_i)}{N\mathfrak{q}\cdot N\mathfrak{p}_i} I^2 W_1(i-1)\right\} + R(P;\mathfrak{q}).$$

1. Fall: Es sei $N\mathfrak{p}_l \leq x_2 := \exp\left\{\frac{\sqrt{C_0}}{5\sqrt{a_K}}\left(\frac{\log P^*}{\log\log 3P^*}\right)^{1/2}\right\}$.

Man bestimme $l_2$ mit $N\mathfrak{p}_{l_2} \leq x_2 < N\mathfrak{p}_{l_2+1}$; dann ergibt sich für $k \leq l_2$ mit den Überlegungen aus [20], S. 303 wegen (4.15) und (4.19):

$$(4.21) \quad \sum_{i=1}^{k} \left\{ A(\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i}, i-1) - \frac{G(\mathfrak{q})G(\mathfrak{p}_i)}{N\mathfrak{q}\cdot N\mathfrak{p}_i} I^2 W_1(i-1)\right\}$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k} \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq \frac{P^*}{N\mathfrak{p}_i}(\log P^*)^{-2A_0} \\ \mathfrak{a} | V(i-1)}} 3^{v(\mathfrak{a})} |R(P;\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i)| + O\left\{\frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W_1(l)(\log P^*)^{-1}\right\}$$
$$\leq \sum_{\substack{1 < N\mathfrak{a} \leq P^*(\log P^*)^{-2A_0} \\ \mathfrak{a} | V(k)}} 3^{v(\mathfrak{a})} |R(P;\mathfrak{a}\mathfrak{q})| + O\left\{\frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W_1(l)(\log P^*)^{-1}\right\}.$$

Somit folgt (4.17) für alle $j = 0, 1, \ldots$ aus (4.20) und (4.21), falls $N\mathfrak{p}_l \leq x_2$ ist.

2. Fall: Es sei $x_2 < N\mathfrak{p}_l \leq x_1 := \exp\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log P^*}{\log\log 3P^*}\right)$.

Man wähle $l_1$ mit $N\mathfrak{p}_{l_1} \leq x_1 < N\mathfrak{p}_{l_1+1}$; dann gilt:

$$\log N\mathfrak{p}_{i-1} \leq \frac{\log(P^*/N\mathfrak{p}_i)}{\log\log(3P^*/N\mathfrak{p}_i)} \quad \text{für} \quad i \leq l_1.$$

Man erhält für $l' \leq l_1$ mit den Überlegungen aus [20], S. 304, wegen (4.14):



$$(4.22) \quad \sum_{l_2 < i \leq l'} \left\{ A(\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i}, i-1) - \frac{G(\mathfrak{q})G(\mathfrak{p}_i)}{N\mathfrak{q}\cdot N\mathfrak{p}_i} I^2 W_1(i-1)\right\}$$
$$= \sum_{l_2 < i \leq l'} \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq \frac{P^*}{N\mathfrak{p}_i}(\log P^*)^{-2A_0} \\ \mathfrak{a} | V(i-1)}} 3^{v(\mathfrak{a})} |R(P;\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i)| +$$
$$+ O\left\{\frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W_1(l) \frac{(\log\log 3P^*)^2}{\log P^*} \frac{\log N\mathfrak{p}_l}{\log x_2}\right\}.$$

Falls $x_2 < N\mathfrak{p}_l \leq x_1$ ist, folgt also (4.17) für alle $j = 0, 1, \ldots$ aus (4.20), (4.21) und (4.22).

3. Fall: Es sei $x_1 < N\mathfrak{p}_l$ und $j = 0$; dann gilt (4.16) wegen (4.13). Zu (4.21) und (4.22) kommt jetzt nach (4.20) noch der folgende Term hinzu, dessen Abschätzung sich wie in [20], S. 305, ergibt:

$$\sum_{l_1 < i < l} \left\{ A(\mathfrak{A}_{\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i}, i-1) - \frac{G(\mathfrak{q})G(\mathfrak{p}_i)}{N\mathfrak{q}\cdot N\mathfrak{p}_i} I^2 W_1(i-1)\right\}$$
$$\leq \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W_1(l) \left\{ f_j(u) + \frac{(c_6 \log\log 3P^*)^{3/2+2j}}{(\log P^*)^{1/2}}\right\} +$$
$$+ \sum_{l_1 < i \leq l} \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq \frac{P^*}{N\mathfrak{p}_i}(\log P^*)^{-2A_0} \\ \mathfrak{a} | V(i-1)}} 3^{v(\mathfrak{a})} |R(P;\mathfrak{a}\mathfrak{q}\mathfrak{p}_i)|.$$

Damit ist Satz 4.3 für den Spezialfall $j = 0$ bewiesen. Der allgemeine Fall $j \geq 0$ ergibt sich durch vollständige Induktion nach $j$. Die Überlegungen verlaufen wie in [20], S. 305–306, so daß hier auf die Rechnungen verzichtet werden kann.

Korollar 4.3. *Es seien $\mathfrak{q}$ ein ganzes Ideal in $K$ und $z \geq 2$ eine reelle Zahl mit $z \leq P^* := P/N\mathfrak{q}$. Man setze:*

$$A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, z) := \left|\{\alpha \in \mathfrak{A}_\mathfrak{q};\ (\alpha, V(z)) = 1\}\right|, \qquad V(z) := \prod_{N\mathfrak{p} < z} \mathfrak{p},$$
$$R_0 := \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leq M \\ \mathfrak{a} | V(z)}} 3^{v(\mathfrak{a})} |R(P;\mathfrak{a}\mathfrak{q})|, \qquad M = \max\left(1, P^*(\log P^*)^{-2A_0}\right).$$

*Dann gilt für $(\mathfrak{q}, V(z)) = 1$, $\mu(\mathfrak{q}) \neq 0$:*

$$A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, z) \leq \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W(z) \left\{ \Lambda\left(\frac{\log P^*}{\log z}\right) + O\left((\log\log 3P^*)^{-7}\right)\right\} + R_0,$$
$$A(\mathfrak{A}_\mathfrak{q}, z) \geq \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W(z) \left\{ \lambda\left(\frac{\log P^*}{\log z}\right) - O\left((\log\log 3P^*)^{-7}\right)\right\} - R_0.$$

Beweis. (Wie in [20], S. 306–307).

Bemerkung. Die in Korollar 4.3 angegebenen Resultate gelten auch für den Fall $1 < P^* < z$ mit $z \ll (P^*)^{c_7}$, $c_7 > 0$, wobei die $O$-Konstante in der oberen Abschätzung für $A(\mathfrak{A}_q, z)$ zusätzlich von $c_7$ abhängt. Die untere Abschätzung folgt für $1 < P^* < z$ wegen $\lambda(u) = 0$, falls $0 < u < 1$. Andererseits ergibt sich für $1 < P^* < z$ und $\log z \ll_{c_7} \log P^*$ mit Satz 4.1 und (4.18) wegen $\Lambda(u) = 2e^{\gamma_0}u^{-1}$, $0 < u \leqslant 1$:

$$A(\mathfrak{A}_q, z) \leqslant \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W(z)\left\{2e^{\gamma_0}\frac{\log z}{\log P^*}\left(1+O\left(\frac{\log\log 3P^*}{\log P^*}\right)\right)\right\} + R_0$$
$$= \frac{G(\mathfrak{q})}{N\mathfrak{q}} I^2 W(z)\left\{\Lambda\left(\frac{\log P^*}{\log z}\right) + O_{c_7}\left(\frac{\log\log 3P^*}{\log P^*}\right)\right\} + R_0.$$

**5.** Im folgenden soll nach der Methode von H.-E. Richert ([17]) mit Hilfe von Korollar 4.3 die untere Abschätzung (1.5) in Satz 1.1 bewiesen werden. Zunächst sind für die Anwendung des Kuhnschen Schrittes einige Vorüberlegungen notwendig.

Lemma 5.1. *Für $2 \leqslant a < b \leqslant P$ gilt:*

$$\sum_{a \leqslant N\mathfrak{p} < b} \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega,\omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \ll P^2/a + Pb.$$

Beweis. Nach einem Lemma von Rademacher ([23], S. 74) existiert eine Basis $\pi_1, \ldots, \pi_n$ des Ideals $\mathfrak{p}$ mit der Eigenschaft:

(5.1) $$|N\pi_l| \ll N\mathfrak{p}, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Es sei o.B.d.A. $\pi_1 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2$.

Nach [22], Hilfssatz 6, kann man ferner annehmen:

(5.2) $$|N\pi_1|^{1/n} \ll |\pi_1^{(k)}| \ll |N\pi_1|^{1/n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Wegen (2.2) folgt nun:

(5.3) $$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega,\omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 = \sum_{\alpha \bmod (\pi_1)} \sum_{\alpha' \bmod (\pi_1)} \sum_{\substack{\omega \in \hat{\mathfrak{R}} \\ \omega \equiv \alpha (\pi_1) \\ F(\eta^{-1}\omega, \eta^{-1}\omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2}} \sum_{\substack{\omega' \in \hat{\mathfrak{R}} \\ \omega' \equiv \alpha' (\pi_1)}} 1.$$

Hierbei entstehe $\hat{\mathfrak{R}}$ aus $\mathfrak{R}$, falls in (1.2) $P_k$ durch $\hat{P}_k$ ersetzt wird. Es seien in (5.3)

$$\omega = \alpha + \pi_1\beta, \quad \omega' = \alpha' + \pi_1\beta'.$$

Man kann nach [23], S. 74, die Zahlen $\alpha, \alpha'$ so wählen, daß gilt:

(5.4) $$|\alpha^{(k)}| \ll |N\pi_1|^{1/n}, \quad |\alpha'^{(k)}| \ll |N\pi_1|^{1/n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Nun folgt:

(5.5) $$F(\eta^{-1}\omega, \eta^{-1}\omega') \equiv F(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') + \eta^{-1}\pi_1\beta\frac{\partial F}{\partial x}(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') +$$
$$+\eta^{-1}\pi_1\beta'\frac{\partial F}{\partial y}(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') \bmod \mathfrak{p}^2.$$



Mit (2.2), (5.2) und (5.4) ergibt sich für $N\mathfrak{p} \leqslant P$ und $k = 1, \ldots, n$:

(5.6) $$|\beta^{(k)}| \leqslant \frac{|\omega^{(k)}|}{|\pi_1^{(k)}|} + \frac{|\alpha^{(k)}|}{|\pi_1^{(k)}|} \ll \left(\frac{P}{|N\pi_1|}\right)^{1/n} + 1 \ll \left(\frac{P}{N\mathfrak{p}}\right)^{1/n}.$$

Ebenso:

$$|\beta'^{(k)}| \ll \left(\frac{P}{N\mathfrak{p}}\right)^{1/n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

1. Fall: $\frac{\partial F}{\partial x}(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$.

Zu vorgegebenen $\alpha, \alpha', \beta'$ gibt es dann wegen $\eta^{-1}\pi_1 \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2$ genau ein $\beta \bmod \mathfrak{p}$ mit:

$$F(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') + \eta^{-1}\pi_1\beta\frac{\partial F}{\partial x}(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') + \eta^{-1}\pi_1\beta'\frac{\partial F}{\partial y}(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha')$$
$$\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2.$$

Es sei $(\pi_1) = \mathfrak{p}\mathfrak{a}$. Im vorliegenden Fall liefern $\alpha$ und $\alpha'$ in (5.3) wegen (5.5), (5.6), (2.8) und (5.1) einen Beitrag der Ordnung

$$\ll \frac{P}{N\mathfrak{p}}\left(\frac{P}{N\mathfrak{p}^2}+1\right) \sum_{\substack{\alpha \bmod (\pi_1) \\ F(\alpha,\alpha') \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}}} \sum_{\alpha' \bmod (\pi_1)} 1 = \frac{P}{N\mathfrak{p}}\left(\frac{P}{N\mathfrak{p}^2}+1\right)(N\mathfrak{a})^2 \sum_{\substack{\xi \bmod \mathfrak{p} \\ F(\xi,\xi') \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}}} \sum_{\xi' \bmod \mathfrak{p}} 1$$
$$\ll \frac{P}{N\mathfrak{p}}\left(\frac{P}{N\mathfrak{p}^2}+1\right) L_0(\mathfrak{p}).$$

2. Fall: $\frac{\partial F}{\partial y}(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$; analog.

3. Fall: $\frac{\partial F}{\partial x}(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') \equiv \frac{\partial F}{\partial y}(\eta^{-1}\alpha, \eta^{-1}\alpha') \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$.

Da $F(x, y)$ ein irreduzibles Polynom ist, existieren nach [16], Satz 101, Polynome $G, G_1, H, H_1$ aus $Z_K[x, y]$, so daß gilt:

$$G(x, y)F(x, y) + G_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x}F(x, y) = f(x),$$

$$H(x, y)F(x, y) + H_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}F(x, y) = g(y),$$

wobei die Polynome $f(x) \in Z_K[x]$ und $g(y) \in Z_K[y]$ nicht identisch verschwinden. Somit erhält man für den zugehörigen Ausdruck in (5.3) wegen (5.6) und (2.8) die Abschätzung

$$\ll \frac{P^2}{N\mathfrak{p}^2} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{p} \\ f(\alpha) \equiv 0 (\mathfrak{p})}} \sum_{\substack{\alpha' \bmod \mathfrak{p} \\ g(\alpha') \equiv 0 (\mathfrak{p})}} 1 \ll \frac{P^2}{N\mathfrak{p}^2}.$$

Insgesamt ergibt sich wegen $L_0(\mathfrak{p}) \ll N\mathfrak{p}$:

$$\sum_{a \leqslant N\mathfrak{p} < b} \sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ F(\omega, \omega') \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \ll P^2 \sum_{a \leqslant N\mathfrak{p} < b} (N\mathfrak{p})^{-2} + P \sum_{a \leqslant N\mathfrak{p} < b} 1 \ll P^2/a + Pb.$$

Satz 5.1. *Es seien*

(5.7) $$2 < u < v; \quad a_0 := P^{2/v}, \quad b_0 := P^{2/u},$$

(5.8) $$0 \leqslant s \ll 1,$$

$$Q(\mathfrak{A}, u, v, s) := \sum_{\substack{\alpha \in \mathfrak{A} \\ (\alpha, V(a_0)) = 1}} \left\{1 - s \sum_{\substack{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0 \\ \mathfrak{p} | \alpha}} \left(1 - \frac{u}{2} \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log P}\right)\right\}.$$

*Dann gilt:*

$$Q(\mathfrak{A}, u, v, s) \geqslant I^2 W(a_0) \left\{\lambda\left(\frac{v}{2}\right) - s \int_u^v \Lambda\left(v\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right)\right)\left(1 - \frac{u}{t}\right) \frac{dt}{t} - \frac{c_8(F, K, u, v)}{(\log\log 3P)^7}\right\}.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar für $P \leqslant P_0 = P_0(F, K, u, v)$. Es sei also im folgenden $P \geqslant P_0$. Zunächst erhält man:

(5.9) $$Q(\mathfrak{A}, u, v, s) = A(\mathfrak{A}, a_0) - s \sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0} \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log b_0}\right) A(\mathfrak{A}_\mathfrak{p}, a_0).$$

Nun gilt nach Korollar 4.3, Satz 2.1, (2.4) und Lemma 3.5:

(5.10) $$A(\mathfrak{A}, a_0) \geqslant I^2 W(a_0)\{\lambda(v/2) - O((\log\log 3P)^{-7})\} - \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqslant M \\ \mathfrak{a} | V(a_0)}} 3^{v(\mathfrak{a})} |R(P; \mathfrak{a})|$$
$$\geqslant I^2 W(a_0)\{\lambda(v/2) - O((\log\log 3P)^{-7})\}.$$

Ferner folgt wegen

$$\frac{\log a_0}{\log(P/N\mathfrak{p})} \leqslant \frac{2u}{v(u-2)} \quad (= c_7), \quad a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0,$$

nach Korollar 4.3, (3.21) und Satz 2.1:

$$\sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0} \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log b_0}\right) A(\mathfrak{A}_\mathfrak{p}, a_0) \leqslant I^2 W(a_0) \left\{ \sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0} \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log b_0}\right) \frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \times \right.$$
$$\left. \times \Lambda\left(\frac{\log(P/N\mathfrak{p})}{\log a_0}\right) + O((\log\log 3P)^{-7}) \right\} + \sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0} \sum_{\substack{N\mathfrak{a} \leqslant \frac{P}{N\mathfrak{p}} (\log P)^{-A_0} \\ \mathfrak{a} | V(a_0)}} 3^{v(\mathfrak{a})} |R(P; \mathfrak{a}\mathfrak{p})|$$
$$\leqslant I^2 W(a_0) \left\{ \sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0} \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log b_0}\right) \frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \Lambda\left(\frac{\log(P/N\mathfrak{p})}{\log a_0}\right) + O((\log\log 3P)^{-7}) \right\}.$$



Hiermit erhält man nach (5.9) und (5.10):

(5.11) $$Q(\mathfrak{A}, u, v, s) \geqslant I^2 W(a_0) \times$$
$$\times \left\{\lambda\left(\frac{v}{2}\right) - s \sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0} \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log b_0}\right) \frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \Lambda\left(\frac{\log(P/N\mathfrak{p})}{\log a_0}\right) - O((\log\log 3P)^{-7})\right\}.$$

Man setze für $a_0 \leqslant a \leqslant b_0$:

$$D(a) := \sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < a} \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log b_0}\right) \frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}}.$$

Dann folgt mit (3.21), Lemma 3.4 und (5.7):

$$D(a) = \log\frac{\log a}{\log a_0} - \frac{\log a}{\log b_0} + \frac{u}{v} + O((\log P)^{-1}).$$

Durch partielle Summation ergibt sich mit den Überlegungen aus [17], S. 11:

$$\sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0} \left(1 - \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log b_0}\right) \frac{G(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}} \Lambda\left(\frac{\log(P/N\mathfrak{p})}{\log a_0}\right)$$
$$= \int_u^v \Lambda\left(v\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right)\right)\left(1 - \frac{u}{t}\right) \frac{dt}{t} + O((\log P)^{-1}).$$

Somit folgt die Behauptung nach (5.11).

Satz 5.2. *Es sei $F(x, y) \in Z_K[x, y]$ ein von $x$ und $y$ abhängiges irreduzibles Polynom vom Grade $g \geqslant 1$ ohne festen Primidealteiler. Ferner sei die Bedingung (1.3) erfüllt. Dann gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 1.1 für $P \geqslant P_0(F, K)$:*

$$\sum_{\substack{\omega \in \mathfrak{R} \\ \Omega(F(\omega, \omega')) \leqslant g+1 \\ (F(\omega, \omega'), V(P^{1/4})) = 1}} \sum_{\omega' \in \mathfrak{R}} 1 \geqslant \frac{2}{3} c_0(F, K) \frac{P^2}{\log^3 P}.$$

Beweis. Man wähle in Satz 5.1 für $u$, $v$ und $s$ die in [17], S. 12, bzw. [9], S. 254, angegebenen Werte:

$$u = 2(1 + 3^{-g-1}), \quad v = 8, \quad \frac{1}{s} = g + 2 - \frac{u}{2}\left(g + \frac{4}{3} - \frac{\log(v/u)}{\log 3}\right) \geqslant \frac{7}{9}.$$

Dann folgt nach [9], S. 255:

$$\lambda\left(\frac{v}{2}\right) - s \int_u^v \Lambda\left(v\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t}\right)\right)\left(1 - \frac{u}{t}\right) \frac{dt}{t} \geqslant \frac{e^{\gamma_0}}{6} \frac{\log 9}{\log 8}.$$

Somit ergibt sich aus Satz 5.1 wegen (2.4) und Lemma 3.5:

(5.12) $$Q(\mathfrak{A}, u, v, s) \geqslant \frac{2}{3} c_0(F, K) \frac{P^2}{\log^3 P} \left\{\frac{\log 9}{\log 8} - O((\log\log 3P)^{-7})\right\}.$$

Diese Ungleichung läßt sich analog den in [9], S. 255–256, durchgeführten Überlegungen wie folgt auswerten:

Die in $Q(\mathfrak{A}, u, v, s)$ gezählten $\alpha \in \mathfrak{A}$ besitzen wegen $(\alpha, V(a_0)) = 1$ keine Primidealteiler $\mathfrak{p}$ mit $N\mathfrak{p} < a_0$. Für alle Primidealteiler $\mathfrak{p} \mid \alpha$ mit $N\mathfrak{p} \geqslant b_0 = P^{2/u}$ folgt:

$$1 - \frac{u}{2} \frac{\log N\mathfrak{p}}{\log P} \leqslant 0.$$

Somit erhält man ($\Sigma'$ bedeutet: $(\alpha, V(P^{1/4})) = 1$):

$$Q(\mathfrak{A}, u, v, s) \leqslant \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A} \\ \Omega(\alpha)\leqslant g+1}}{}' 1 + \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A} \\ \Omega(\alpha)\geqslant g+2}}{}' \left\{1 - s \sum_{\substack{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0 \\ \mathfrak{p}\mid\alpha}} \left(1 - \frac{u}{2}\frac{\log N\mathfrak{p}}{\log P}\right)\right\}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A} \\ \Omega(\alpha)\leqslant g+1}}{}' 1 + \sum_{a_0 \leqslant N\mathfrak{p} < b_0} \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A} \\ \alpha\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2}} 1 +$$

$$+ \tilde{\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A} \\ \Omega(\alpha)\geqslant g+2}}} \left\{1 - s\left(\Omega(\alpha) - \frac{u}{2}\frac{\log|N\alpha|}{\log P}\right)\right\}.$$

Nun gilt wegen (4.11) und $\log(v/u) \leqslant \log 4$:

$$\log|N\alpha| \leqslant \log(c_4^n P^g) \leqslant \left(g + \frac{4}{3} - \frac{\log(v/u)}{\log 3}\right)\log P.$$

Es folgt nach Lemma 5.1, (5.7) und der Wahl von $s$:

$$Q(\mathfrak{A}, u, v, s) \leqslant \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A} \\ \Omega(\alpha)\leqslant g+1}}{}' 1 + \tilde{\sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A} \\ \Omega(\alpha)\geqslant g+2}}} s\{g+2-\Omega(\alpha)\} + O\{P^2(\log P)^{-4}\}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\alpha\in\mathfrak{A} \\ \Omega(\alpha)\leqslant g+1}}{}' 1 + O\{P^2(\log P)^{-4}\}.$$

Zusammen mit (5.12) ergibt sich hieraus die Behauptung von Satz 5.2.

Korollar 5.1. *Es sei* $\gamma_0 \in Z_K$ *mit* $\big(\gamma_0, \prod_{N\mathfrak{p}=2} \mathfrak{p}\big) = 1$ *und* $|\gamma_0^{(k)}| \leqslant P_k$, $P_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. *Dann gilt für* $P \geqslant P_0(K)$:

$$\sum_{\substack{\omega\in\mathfrak{R} \\ \Omega(\gamma_0-\omega-\omega')\leqslant 2}} \sum_{\omega'\in\mathfrak{R}} 1$$

$$\geqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{|d|}}{(2\pi)^{r_2}}\left(\frac{w}{2^{r_1}hR}\right)^3 \prod_{\mathfrak{p}\mid\gamma_0}\left(1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^2}\right)\prod_{\mathfrak{p}\nmid\gamma_0}\left(1 + \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^3}\right)\frac{P^2}{\log^3 P}.$$

Beweis. Man betrachte $F(x, y) = \gamma_0 - x - y$. In Lemma 5.1 ist die auftretende $\ll$-Konstante nur vom Körper $K$ abhängig, denn es gilt wegen (2.8):



$$\sum_{a\leqslant N\mathfrak{p}<b} \sum_{\omega\in\mathfrak{R}} \sum_{\substack{\omega'\in\mathfrak{R} \\ \gamma_0-\omega-\omega'\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2}} 1 \ll_K P \sum_{a\leqslant N\mathfrak{p}<b}\left(\frac{P}{N\mathfrak{p}^2} + 1\right) \ll_K \frac{P^2}{a} + Pb.$$

Wie im Beweis zu Korollar 4.1 überlegt man sich leicht, daß $P_0$ von $\gamma_0$ unabhängig gewählt werden kann.

Korollar 5.2. *Es sei* $\gamma_0 \in Z_K$ *mit* $\big(\gamma_0, \prod_{N\mathfrak{p}=2}\mathfrak{p}\big) = 1$ *und* $|N\gamma_0| \geqslant N_0(K)$. *Dann gibt es total-positive Primzahlen* $\omega, \omega' \in K$, *so daß gilt*:

$$\gamma_0 = \omega + \omega' + \xi \qquad mit \qquad \Omega(\xi) \leqslant 2.$$

($\xi$ *ist total-positiv, falls* $\gamma_0$ *total-positiv ist*).

Beweis. Man wähle in Korollar 5.1:

$$P_k := \frac{1}{3}|\gamma_0^{(k)}|, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Korollar 5.3. *Es sei* $\gamma_0 \in Z_K$ *mit* $\gamma_0 \neq 0$ *und* $\prod_{N\mathfrak{p}=2}\mathfrak{p} \mid \gamma_0$. *Dann gilt für* $P \geqslant P_0(\gamma_0, K)$:

$$\sum_{\substack{\omega\in\mathfrak{R} \\ \Omega(\omega\omega'+\gamma_0)\leqslant 3}} \sum_{\omega'\in\mathfrak{R}} 1$$

$$\geqslant \frac{2}{3}\frac{\sqrt{|d|}}{(2\pi)^{r_2}}\left(\frac{w}{2^{r_1}hR}\right)^3 \prod_{\mathfrak{p}\mid\gamma_0}\left(1 + \frac{1}{N\mathfrak{p}-1}\right)\prod_{\mathfrak{p}\nmid\gamma_0}\left(1 - \frac{1}{(N\mathfrak{p}-1)^2}\right)\frac{P^2}{\log^3 P}.$$

Korollar 5.4. *Es sei* $g \in \boldsymbol{N}$; *dann gilt für* $P \geqslant P_0(g, K)$:

$$\sum_{\substack{\omega_1\in\mathfrak{R} \\ \Omega(\omega_1^g+\omega_2^g-1)\leqslant g+1}} \sum_{\omega_2\in\mathfrak{R}} 1 \geqslant \frac{2}{3} c_0(F, K)\frac{P^2}{\log^3 P}.$$

Beweis. Nach [21], S. 11, stellt $F(x, y) = x^g + y^g - 1$ ein absolut-irreduzibles Polynom dar. Ferner ist die Bedingung (1.3) erfüllt.

## Literaturverzeichnis


[1] E. Artin, *Theory of algebraic numbers*, Göttingen 1959.

[2] M. B. Barban, *Analogues of the divisor problem of Titchmarsh* (Russian), Vestnik Leningrad. Univ. Ser. Mat. Meh. Astronom. 18 (1963), S. 5–13.

[3] — *The 'large sieve' method and its applications in the theory of numbers*, Russian Math. Surveys 21 (1966), S. 49–103.

[4] P. T. Bateman and R. M. Stemmler, *Waring's problem for algebraic number fields and primes of the form* $(p^r-1)/(p^a-1)$, Illinois J. Math. 6 (1962), S. 142–156.

[5] B. J. Birch and D. J. Lewis, *p-adic forms*, J. Indian Math. Soc. 23 (1959), S. 11–32.
[6] E. Bombieri, *On the large sieve*, Mathematika 12 (1965), S. 201–225.
[7] H. Davenport and H. Halberstam, *Primes in arithmetic progressions*, Michigan Math. J. 13 (1966), S. 485–489.
[8] G. Greaves, *An application of the theorem of Barban, Davenport and Halberstam*, Bull. London Math. Soc. 6 (1974), S. 1–9.
[9] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve methods*, Academic Press, London – New York – San Francisco 1974.
[10] H. Hasse, *Zahlentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin 1963.
[11] E. Hecke, *Algebraische Zahlen*, Chelsea Publishing Company, New York 1970.
[12] J. G. Hinz, *On the theorem of Barban and Davenport-Halberstam in algebraic number fields*, Journal of Number Theory 13(1981).
[13] E. Landau, *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale*, J. Reine Angew. Math. 125 (1903), S. 64–188.
[14] — *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, B. G. Teubner Verlag, 1918.
[15] T. Mitsui, *On the Goldbach problem in an algebraic number field I, II*, J. Math. Soc. Japan 12 (1960), S. 290–372.
[16] O. Perron, *Algebra I*, de Gruyter, Berlin 1951.
[17] H.-E. Richert, *Selberg's sieve with weights*, Mathematika 16 (1969), S. 1–22.
[18] G. J. Rieger, *Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper III*, J. Reine Angew. Math. 208 (1961), S. 79–90.
[19] H. Sarges, *Eine Anwendung des Selbergschen Siebes auf algebraische Zahlkörper*, Acta Arith. 28 (1976), S. 433–455.
[20] W. Schaal, *Obere und untere Abschätzungen in algebraischen Zahlkörpern mit Hilfe des linearen Selbergschen Siebes*, ibid. 13 (1968), S. 267–313.
[21] W. M. Schmidt, *Equations over finite fields*, Lecture Notes in Mathematics 536, Springer Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1976.
[22] C. L. Siegel, *Additive Theorie der Zahlkörper II*, Math. Ann. 88 (1923), S. 184–210.
[23] T. Tatuzawa, *On the number of integral ideals in algebraic number fields, whose norms not exceeding x*, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo, 23 (1973), S. 73–86.

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT MARBURG
Marburg/Lahn

*Eingegangen am 9. 1. 1980* (1195)

---

ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

# The equation $ax^m+by^m=cx^n+dy^n$

by

T. N. Shorey (Bombay, India)

**1.** For non-zero integers $a, b, k$ and non-negative integers $m, x, y$ with $\max(x, y) > 1$, Tijdeman [12] proved that the equation

$$ax^m+by^m=k \tag{1}$$

implies that $m$ is bounded by an effectively computable number depending only on $a, b$ and $k$. In § 3, we shall generalize this as follows:

THEOREM 1. *Let $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c$ and $d$ be integers. Suppose that $x, y$ are distinct positive integers and $m, n$ with $n<m$ are non-negative integers. Then there exists an effectively computable number $N>0$ depending only on $a, b, c$ and $d$ such that the equation*

$$ax^m+by^m=cx^n+dy^n \tag{2}$$

*with*

$$ax^m\neq cx^n \tag{3}$$

*implies that $m\leqslant N$.*

If (1) holds for $m=m_1$ and for $m=m_2$, then (2) is valid with $c=a$, $d=b$, $m=m_1$, $n=m_2$. Theorem 1, therefore, implies the following result.

COROLLARY. *Let $a\neq 0$, $b\neq 0$ and $k$ be integers. Suppose that $x$ and $y$ are distinct positive integers. Then there exists an effectively computable number $N_1>0$ depending only on $a$ and $b$ such that the equation* (1) *has at most one solution in non-negative integers $m$ with $m\geqslant N_1$.*

The interest of the corollary lies in the fact that $N_1$ is independent not only of $x$ and $y$ but also of $k$. Compare this with the theorem of Tijdeman [12] mentioned above. Compare also with Kubota [3]. See also Parnami and Shorey [5].

Combining Theorem 1 and Theorem B (see § 2) of Schinzel [9], we have: