ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

Minoration de la discrépance d'une suite quelconque sur T

par

ROBERT BÉJIAN (Marseille, France)

§ I. Introduction. Etant donné une suite $u = (u_n)_n$ sur le tore $\boldsymbol{T}$ identifié à $[0, 1[$, $k = [\alpha, \beta[$ un intervalle du tore et x un nombre positif, notons $A(k, x, u)$ le nombre des entiers n inférieurs à x pour lesquels u_n appartient à l'intervalle k. L'écart correspondant est la quantité définie par

$$E(k, x, u) = A(k, x, u) - xl(k)$$

où $l(k)$ désigne la longueur de l'intervalle k.

Les discrépances $D(x, u)$ et $D^*(x, u)$ à l'origine sont définies par

$$D(x, u) = \sup_{k \subset [0,1[} |E(k, x, u)|, \quad D^*(x, u) = \sup_{0<a<1} |E([0, a[, x, u)|.$$

Nous définissons de même la discrépance en x relativement à un intervalle I du tore en posant

$$D_I(x, u) = \sup_{k \subset I} |E(k, x, u)|.$$

Dans ces définitions k est toujours supposé de la forme $[\alpha, \beta[$, par contre nous pouvons choisir I indifféremment de cette forme ou fermé; nous le préciserons seulement si c'est nécessaire.

Pour $I = \boldsymbol{T}$, $D_I(x, u)$ est la discrépance habituelle $D(x, u)$. En particulier la suite u est équirépartie sur I si pour tout intervalle J contenu dans I, $A(J, N, u)/N$ tend vers $l(J)$ lorsque l'entier N augmente indéfiniment.

Pour une suite donné, s'il n'y a pas ambiguïté, les quantités $A(k, x, u)$, $E(k, x, u)$, $D^*(x, u)$, $D_I(x, u)$ seront notées respectivement $A(k, x)$, $E(k, x)$, $D(x)$, $D^*(x)$, $D_I(x)$.

Nous nous intéressons ici au comportement asymptotique de la discrépance.

En réponse à une question posée par van der Corput [9] sur l'existence de suites dont la discrépance à l'origine $D^*(N)$ soit bornée, Madame van Aardenne-Ehrenfest [8] a montré en 1949 qu'il existe une constante universelle C_1 et une infinité d'entiers N vérifiant

$$D^*(N) \geqslant \frac{C_1 \log\log N}{\log\log\log N}.$$

Une dizaine d'années plus tard K. F. Roth [5] a montré que pour tout entier $s \geqslant 1$ il existe une constante $C_2(s)$, ne dépendant que de s, telle que pour toute suite de $\boldsymbol{T}^s$ on ait

$$D^*(N) \geqslant C_2(s)(\log N)^{s/2}$$

pour une infinité d'entiers N, la discrépance $D^*(N)$ dans $\boldsymbol{T}^s$ étant définie de manière analogue, avec des pavés s'appuyant sur l'origine; pour $s = 1$ ce résultat fut amélioré par W. M. Schmidt [6] avec la minoration

$$D^*(N) \geqslant 10^{-2} \log N$$

satisfaite pour une infinité d'entiers N. En d'autres termes, pour toute suite du tore

$$\limsup_N \frac{D^*(N)}{\log N} \geqslant 10^{-2}.$$

Cette minoration est la meilleure en ce qui concerne le logarithme et il existe une constante universelle positive C^*, la plus grande possible telle que pour toute suite de $\boldsymbol{T}$ on ait

$$\limsup_N \frac{D^*(N)}{\log N} \geqslant C^*.$$

Dans [3] L. Kuipers et H. Niederreiter ont montré que

$$C^* \geqslant (66 \log 4)^{-1} = 0{,}010\ldots$$

En simplifiant le lemme principal de Schmidt, P. Liardet [4], R. Tijdeman et G. Wagner [7] ont récemment obtenu pour C^* un minorant voisin de 0,05. Dans [1] nous avons établi la minoration

$$C^* \geqslant (12 \log 4)^{-1} = 0{,}060\ldots$$

En ce qui concerne l'estimation supérieure de C^*, H. Faure [2] a démontré en construisant une suite explicite que

$$C^* \leqslant \frac{1919}{3454 \log 12} = 0{,}223\ldots$$

Notons que $D^*(N) \leqslant D(N) \leqslant 2D^*(N)$; en particulier il existe aussi une constante universelle positive C vérifiant pour toute suite u du tore

$$\limsup_N \frac{D(N, u)}{\log N} \geqslant C$$

et la plus grande avec cette propriété.

L'objet de cet article est d'obtenir une minoration de C égale au double de celle déjà obtenue pour C^*, ce qui compte tenu d'un résultat de H. Faure [2] donne l'encadrement $0{,}120\ldots \leqslant C \leqslant 0{,}380\ldots$

Plus précisément nous démontrons ici le résultat suivant:

THÉORÈME. *Pour tout intervalle I et toute suite u du tore, on a*

$$\limsup_N \frac{D_I(N, u)}{\log N} \geqslant \sup_{a>2} \frac{a-2}{4(a-1)\log a} = 0{,}1203\ldots$$

La démonstration du théorème repose sur deux grands lemmes. Le premier, analogue au lemme principal de Schmidt est établi dans le paragraphe II. Le second lemme comporte deux minorations; en admettant la première, nous établissons la seconde et le théorème dans le paragraphe III. Le dernier paragraphe est consacré à la démonstration de la première minoration du lemme 2.

§ II. Premier grand lemme. Soient $u = (u_n)_n$ une suite donnée, K un intervalle du tore et k un intervalle contenu dans K. Rappelons que pour tout nombre positif x,

$$D_K(x) = \sup_{k \subset K} |E(k, x)|.$$

Pour tout intervalle $[a, b[$ contenu dans K nous avons

$$E([a, b[, x) = E([0, b[, x) - E([0, a[, x).$$

Par suite

$$E([a, b[, x) \leqslant \sup_{a \in K} E([0, a[, x) - \inf_{a \in K} E([0, a[, x).$$

Nous en déduisons que

$$D_K(x) = \sup_{a \in K} E([0, a[, x) - \inf_{a \in K} E([0, a[, x).$$

Soient N un entier positif fixé et $\boldsymbol{T}_N$ le tore $\boldsymbol{R}/N\boldsymbol{Z}$.

Dans ce paragraphe nous appelons aussi D_K la fonction de période N qui coïncide sur $[0, N[$ avec celle déjà introduite; en d'autres termes nous la définissons sur $\boldsymbol{T}_N$. Si $I = [\alpha, \beta[$ et $J =]s, t]$ sont des intervalles respectifs de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}_N$, $A(I, J)$ désigne le nombre d'entiers n dans J pour lesquels u_n appartient à I. L'écart correspondant est $E(I, J) = A(I, J) - l(I)l(J)$. Soient L et L' deux intervalles contenus dans K, x et y deux points de $\boldsymbol{T}_N$. Considérons la quantité $h(L, L', x, y)$, analogue à celle déjà introduite par W. Schmidt, et égale au maximum des quatre quantités suivantes:

$$\inf_{a\in L} E([0,a[,\,]x,y]) - \sup_{a\in L'} E([0,a[,\,]x,y]),$$

$$\inf_{a\in L'} E([0,a[,\,]x,y]) - \sup_{a\in L} E([0,a[,\,]x,y]),$$

$$\inf_{a\in L} E([0,a[,\,]y,x]) - \sup_{a\in L'} E([0,a[,\,]y,x]),$$

$$\inf_{a\in L'} E([0,a[,\,]y,x]) - \sup_{a\in L} E([0,a[,\,]y,x]).$$

Si L et L' sont fixés, nous définissons ainsi sur $\boldsymbol{T}_N \times \boldsymbol{T}_N$ une fonction $(x, y) \to h(L, L', x, y)$ symétrique en x et y.

LEMME 1. *Pour tout x et y dans $\boldsymbol{T}_N$ nous avons*

$$D_K(x)+D_K(y) \geqslant \tfrac{1}{2}\{D_L(x)+D_L(y)+D_{L'}(x)+D_{L'}(y)\}+h(L, L', x, y).$$

Démonstration. Supposons par exemple que

$$h(L, L', x, y) = \inf_{a\in L} E([0,a[,\,]x,y]) - \sup_{a\in L'} E([0,a[,\,]x,y]);$$

Alors pour tout (l, l') dans $L\times L'$ nous avons

$$E([0,l[,\,]x,y]) - E([0,l'[,\,]x,y]) \geqslant h(L, L', x, y).$$

C'est-à-dire

$$(1)\qquad E([0,l[,y)-E([0,l[,x)-E([0,l'[,y)+E([0,l'[,x) \geqslant h(L, L', x, y).$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe des nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ dans l'intervalle $]0,\varepsilon[$, des nombres a, c, b, d dans L, des nombres a', c', b', d' dans L' tels que

$$D_L(x) = E([0,a[,x)-E([0,c[,x)+\varepsilon_1,$$

$$D_L(y) = E([0,b[,y)-E([0,d[,y)+\varepsilon_2,$$

$$D_{L'}(x) = E([0,a'[,x)-E([0,c'[,x)+\varepsilon_1',$$

$$D_{L'}(y) = E([0,b'[,y)-E([0,d'[,y)+\varepsilon_2'.$$

En sommant membre à membre ces égalités et les deux minorations données par (1) pour $(l, l') = (a, b')$ et $(l, l') = (d, c')$, on obtient

$$2D_K(x)+2D_K(y)+4\varepsilon \geqslant D_L(x)+D_L(y)+D_{L'}(x)+D_{L'}(y)+2h(L, L', x, y).$$

Notons par exemple que si

$$h(L, L', x, y) = \inf_{a\in L} E([0,a[,\,]y,x]) - \sup_{a\in L'} E([0,a[,\,]y,x]),$$

alors pour tout (l, l') dans $L\times L'$ nous avons

$$(2)\qquad E([0,l[,x)-E([0,l[,y)-E([0,l'[,x)+E([0,l'[,y) \geqslant h(L, L', x, y),$$

et il suffit de prendre dans (2), $(l, l') = (c, d')$ et $(l, l') = (b, a')$ pour obtenir la minoration

$$2D_K(x)+2D_K(y)+4\varepsilon \geqslant D_L(x)+D_L(y)+D_{L'}(x)+D_{L'}(y)+2h(L, L', x, y).$$

Si L est contenu dans K, alors $D_L(x) \leqslant D_K(x)$; par suite on a toujours

$$2D_K(x)+2D_K(y) \geqslant D_L(x)+D_L(y)+D_{L'}(x)+D_{L'}(y).$$

Posons $h^+(L, L', x, y) = \sup\{0, h(L, L', x, y)\}$.

Le lemme 1 reste vrai avec la fonction h^+, définie sur $\boldsymbol{T}_N\times\boldsymbol{T}_N$, positive, symétrique en x, y.

§ III. Second grand lemme. Posons $A = \sup_{a>2} \dfrac{a-2}{4(a-1)\log a}$. Etant donné un intervalle I du tore, nous voulons montrer que pour toute suite u nous avons

$$\limsup_N \frac{D_I(N, u)}{\log N} \geqslant A.$$

Le résultat est banal si la suite u n'est pas équirépartie sur I; en effet dans ce cas la suite $D_I(N)/N$ ne converge pas vers 0. Le résultat précédent est encore vrai si l'ensemble des entiers N vérifiant $D_I(N) > A\log N$ n'est pas fini. Nous supposons donc que pour la suite u il existe un entier M_0 tel que pour tout $N \geqslant M_0$ on ait

$$D_I(N) \leqslant A\log N.$$

Si K est un intervalle du tore et N un entier positif, nous posons

$$M(K, N) = \frac{1}{N}\int_0^N D_K(x)\,dx.$$

LEMME 2. *Soient $a \geqslant 2$, $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{a-2}{4(a-1)}\right[$, p/q un nombre rationnel de l'intervalle $]0,1[$ sous sa forme irréductible et t un entier positif.*

Posons $N_t = [a^{qt}]$ la partie entière de a^{qt} et soit $K = [\alpha, \beta[$ un intervalle contenu dans I, de longueur $l(I)/a^i$ avec $0 \leqslant i \leqslant pt-1$.

Posons $L = [\alpha, \alpha+l(K)/a[$ et $L' = [\beta-l(K)/a, \beta[$.

Alors il existe t_0 tel que pour tout $t \geqslant t_0$ on ait:

(i) $$M(K, N_t) \geqslant \frac{1}{2}\{M(L, N_t)+M(L', N_t)\}+\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon,$$

(ii) $$M(I, N_t) \geqslant \frac{p}{q}\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}\frac{\log N_t}{\log a}.$$

III. 1. Démonstration du lemme 2 (ii). Nous supposons la minoration (i) du lemme 2 satisfaite pour tout $t \geqslant t_0$. Par suite pour $i = 0$, c'est-à-dire en prenant $K = I$ nous avons

$$M(I, N_t) \geqslant \frac{1}{2}\{M(L, N_t)+M(L', N_t)\}+\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon.$$

Comme $l(L) = l(L') = l(I)/a$, nous pouvons à nouveau appliquer le lemme 2 (i) en prenant pour K respectivement L et L' et itérer ce processus de descente tant que la longueur de l'intervalle reste supérieure à $l(I)/a^{pt-1}$. Nous obtenons au total $(1+2+2^2+\ldots+2^{pt-1})$ minorations et par substitutions successives cela conduit à la minoration

$$M(I, N_t) \geqslant pt\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}.$$

Comme $t \geqslant \dfrac{\log N_t}{q\log a}$, nous en déduisons:

$$M(I, N_t) \geqslant \frac{p}{q}\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}\frac{\log N_t}{\log a}.$$

III. 2. Démonstration du théorème. D'après le lemme 2 (ii) pour tout nombre $\varepsilon \in \left]0, \dfrac{a-2}{4(a-1)}\right[$ il existe t_0 tel que pour tout $t \geqslant t_0$ on ait

$$\frac{1}{N_t}\int_0^{N_t} D_I(x)\,dx \geqslant \frac{p}{q}\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}\frac{\log N_t}{\log a}.$$

Il existe donc $x \in [0, N_t]$, pour lequel

$$D_I(x) \geqslant \frac{p}{q}\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}\frac{\log N_t}{\log a}.$$

Soit n l'entier immédiatement inférieur à x, alors:

$$D_I(n) \geqslant D_I(x)-1.$$

L'entier n appartient à l'intervalle $[0, N_t]$ et

$$D_I(n) \geqslant \frac{p}{q}\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}\frac{\log N_t}{\log a}-1 \geqslant \frac{p}{q}\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}\frac{\log n}{\log a}-1.$$

Ceci prouve que l'ensemble des entiers n vérifiant

$$D_I(n) \geqslant \frac{p}{q}\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}\frac{\log n}{\log a}-1$$

n'est pas fini, donc que

$$\limsup_n \frac{D_I(n)}{\log n} \geqslant \frac{p}{q}\left\{\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon\right\}\frac{1}{\log a}.$$

D'après les choix possibles de p/q et ε nous obtenons

$$\limsup_n \frac{D_I(n)}{\log n} \geqslant \frac{a-2}{4(a-1)\log a}.$$

Cette dernière minoration étant vraie pour $a > 2$, il en résulte que:

$$\limsup_n \frac{D_I(n)}{\log n} \geqslant \sup_{a>2}\frac{a-2}{4(a-1)\log a} = 0{,}1203\ldots$$

§ IV. Démonstration de la minoration (i) du lemme 2. C'est la partie la plus technique; nous procédons en plusieurs étapes.

IV. 1. Minorations d'intégrales. Soient K, L, L' trois intervalles du tore $\boldsymbol{T}$, L et L' étant contenus dans K. Soit N un entier positif; envisageons une partition de $\boldsymbol{T}_N$ par une famille finie $(I_\alpha)_\alpha$ d'intervalles et par une famille finie de couples d'intervalles $(J_\beta, K_\beta)_\beta$ telle que pour tout β, J_β et K_β soient de même longueur, tous ces intervalles pouvant avoir des extrémités communes; donc cette partition et celles envisagées ultérieurement sont à considérer aux extrémités près, qui forment un ensemble négligeable pour les calculs d'intégrales.

Proposition 1. *On a:*

$$M(K, N) \geqslant \frac{1}{2}\{M(L, N)+M(L', N)\}+ \\ +\frac{1}{2N}\sum_\alpha\int_{I_\alpha} h^+(L, L', x, 2m_\alpha-x)\,dx+ \\ +\frac{1}{2N}\sum_\beta\int_{J_\beta\cup K_\beta} h^+(L, L', x, 2n_\beta-x)\,dx.$$

où m_α est le milieu de I_α et n_β un point par rapport auquel les intervalles J_β et K_β sont symétriques sur $\boldsymbol{T}_N$.

Démonstration. En prenant $y = 2m_\alpha-x$ dans la minoration donnée par le lemme 1 avec la fonction h^+ et en intégrant chaque terme, nous obtenons

$$\int_{I_\alpha} D_K(x)\,dx \geqslant \frac{1}{2}\left\{\int_{I_\alpha} D_L(x)\,dx+\int_{I_\alpha} D_{L'}(x)\,dx\right\}+ \\ +\frac{1}{2}\int_{I_\alpha} h^+(L, L', x, 2m_\alpha-x)\,dx.$$

Avec un couple (J_β, K_β) nous avons une minoration analogue et une sommation sur les indices α et β donne le résultat. Dans les trois propositions qui suivent notons $[\alpha, \beta[$ l'intervalle K, soit $a > 2$ et posons

$$L = [\alpha, \alpha + l(K)/a[, \quad L' = [\beta - l(K)/a, \beta[,$$
$$T = [\alpha + l(K)/a, \beta - l(K)/a[.$$

Si c'est nécessaire nous identifions le tore $\boldsymbol{T}_N$ avec $[0, N[$.

Proposition 2. *Soient ν un entier dans $\boldsymbol{T}_N$ tel que $u_\nu \in T$, et $[b, c]$ un intervalle de $\boldsymbol{T}_N$, centré en ν.*

Si $c - b \leqslant 1/l(K)$, alors

$$\int_b^c h^+(L, L', x, 2\nu - x)\,dx \geqslant (c-b) - (c-b)^2 \frac{l(K)}{2}.$$

Proposition 3. *Soit $[b, c]$ un intervalle de $\boldsymbol{T}_N$ tel que pour tout entier ν de $[b, c]$ le point u_ν soit hors de K; soit m le milieu de $[b, c]$. On a:*

$$\int_b^c h^+(L, L', x, 2m - x)\,dx \geqslant \frac{a-2}{2a} l(K)(c-b)^2.$$

Proposition 4. *Soient $[b, c]$ et $[d, e]$ deux intervalles de $\boldsymbol{T}_N$, disjoints et de même longueur, m le milieu de $[c, d]$ et h le nombre de points u_ν dans T pour lesquels $\nu \in [c, d]$. On a:*

$$\frac{1}{2} \int_{[b,c]\cup[d,e]} h^+(L, L', x, 2m - x)\,dx \geqslant l(K)(c-b)^2 + (c-b)[h - (e-b)\,l(K)].$$

Démonstration de la proposition 2. Soient $x \in [b, \nu]$ et $y = 2\nu - x$. Nous avons:

$$h^+(L, L', x, y) \geqslant h(L, L', x, y)$$
$$\geqslant \inf_{a \in L'} E([0, a[,]x, y]) - \sup_{a \in L} E([0, a[,]x, y]).$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe a dans L et a' dans L' tels que

$$0 \leqslant \sup_{a \in L} E([0, a[,]x, y]) - E([0, a[,]x, y]) < \varepsilon,$$

$$0 \leqslant E([0, a'[,]x, y]) - \inf_{a \in L'} E([0, a[,]x, y]) < \varepsilon.$$

Par suite

$$h^+(L, L', x, y) \geqslant E([0, a'[,]x, y]) - E([0, a[,]x, y]) - 2\varepsilon.$$

C'est-à-dire

$$h^+(L, L', x, y) \geqslant E([a, a'[,]x, y]) - 2\varepsilon$$
$$\geqslant A([a, a'[,]x, y]) - (y-x)(a'-a) - 2\varepsilon,$$
$$h^+(L, L', x, y) \geqslant 1 - (y-x)\,l(K) - 2\varepsilon = 1 - 2|\nu - x|\,l(K) - 2\varepsilon.$$

Donc pour tout x dans $[b, \nu]$ nous avons

$$h^+(L, L', x, 2\nu - x) \geqslant 1 - 2|\nu - x|\,l(K).$$

Si x appartient à $[\nu, c]$ nous posons encore $y = 2\nu - x$ et en utilisant la symétrie de h^+, un calcul analogue donne la même minoration, si bien que pour tout x dans $[b, c]$ nous avons

$$h^+(L, L', x, 2\nu - x) \geqslant 1 - 2|\nu - x|\,l(K).$$

Par intégration nous obtenons la proposition 2.

Démonstration de la proposition 3. Soient $x \in [b, m]$ et $y = 2m - x$;

$$h^+(L, L', x, y) \geqslant h(L, L', x, y)$$
$$\geqslant \inf_{\gamma \in L} E([0, \gamma[,]x, y]) - \sup_{\gamma' \in L'} E([0, \gamma'[,]x, y]).$$

Soit $\varepsilon > 0$; il existe μ dans L et μ' dans L' tels que

$$0 \leqslant E([0, \mu[,]x, y]) - \inf_{\gamma \in L} E([0, \gamma[,]x, y]) < \varepsilon,$$

$$0 \leqslant \sup_{\gamma' \in L'} E([0, \gamma'[,]x, y]) - E([0, \mu'[,]x, y]) < \varepsilon.$$

Par suite

$$h^+(L, L', x, y) \geqslant -2\varepsilon - E([\mu, \mu'[,]x, y]).$$

D'après l'hypothèse de la proposition 3 nous avons

$$E([\mu, \mu'[,]x, y]) = -(y-x)(\mu' - \mu),$$

d'où:

$$h^+(L, L', x, y) \geqslant -2\varepsilon + (y-x)(\mu' - \mu) \geqslant -2\varepsilon + (y-x)\,l(T)$$
$$= -2\varepsilon + (y-x)\frac{(a-2)}{a} l(K),$$

c'est-à-dire

$$h^+(L, L', x, 2m - x) \geqslant \frac{2(a-2)}{a} |m - x|\,l(K).$$

Cette minoration reste encore vraie pour x dans $[m, c]$; nous en déduisons la proposition 3 par une intégration sur $[b, c]$.

La dernière proposition se démontre comme les deux précédentes; notons que les propositions 2 et 4 ne dépendent pas de a et que la dernière implique la seconde.

IV.2. Démonstration du lemme 2 (i) dans un cas particulier. Les hypothèses sont celles du lemme 2; rappelons qu'il existe un entier M_0 au-delà duquel on a

$$D_I(N) \leqslant A \log N.$$

Soit t un entier assez grand pour que N_t dépasse M_0. Nous cherchons une partition du tore $\boldsymbol{T}_{N_t}$, à laquelle il soit possible d'associer par la proposition 1 une minoration de la forme

$$M(K, N_t) \geqslant \tfrac{1}{2}\{M(L, N_t)+M(L', N_t)\}+\theta,$$

où θ est à choisir la plus grande possible. Le nombre de termes de la suite u_ν avant le rang N_t, qui appartiennent à l'intervalle T est $A(T, N_t)$. Soit λ un nombre positif; supposons que les $A(T, N_t)$ entiers qui indexent les $A(T, N_t)$ points précédents sont isolés par la longueur λ; cela signifie que si on centre en chacun de ces entiers ν un intervalle de longueur λ, les $A(T, N_t)$ intervalles ainsi obtenus sur $\boldsymbol{T}_{N_t}$ sont tous disjoints; c'est en particulier le cas si $\lambda < 1$.

Pour tout intervalle J contenu dans I posons

$$\varepsilon_J(N) = \frac{A(J, N)}{N} - l(J).$$

Par suite nous avons $|\varepsilon_J(N)| \leqslant A\dfrac{\log N}{N}$. Ceci prouve en particulier que la convergence vers 0 de $\varepsilon_J(N)$ est uniforme en J. Reprenons les notations $\boldsymbol{K}, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{L}'$ du lemme 2, et soit $]b, c[$ un intervalle de $\boldsymbol{T}_{N_t}$, de longueur λ, centré sur l'un des entiers ν précédents. La proposition 2 fournit la minoration

$$\int_b^c h^+(L, L', x, 2\nu - x)\,dx \geqslant \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\,l(K).$$

Notons θ_1 un minorant de la quantité

$$\frac{1}{2N_t}\sum_a \int_{I_a} h^+(L, L', x, 2m_a - x)\,dx$$

qui intervient dans la proposition 1 lorsqu'on prend pour $(I_a)_a$ la famille des $A(T, N_t)$ intervalles précédents de longueur λ. Nous avons:

$$\theta_1 = \frac{A(T, N_t)}{2N_t}\left[\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\,l(K)\right] = \frac{\lambda}{2}\left[1 - \frac{\lambda}{2}\,l(K)\right]\left[\left(\frac{a-2}{a}\right)l(K) + \varepsilon_T(N_t)\right].$$

La partie du tore $\boldsymbol{T}_{N_t}$ utilisée pour ces intégrations a pour mesure $\lambda \cdot A(T, N_t)$. La mesure de la partie restante est

$$N_t - \lambda A(T, N_t) = N_t - \lambda[\varepsilon_T(N_t) + l(T)]N_t$$
$$= N_t\left[1 - \frac{\lambda(a-2)}{a}\,l(K) - \lambda\varepsilon_T(N_t)\right].$$

Envisageons „la" partition de $\boldsymbol{T}_{N_t}$ formée par les $A(T, N_t)$ intervalles précédents et par des intervalles $[b_i, c_i]$ les plus grands possibles, tels que pour tous les entiers ν de $]b_i, c_i[$, les points u_ν soient hors de K. Par conséquent il n'intervient pas dans ce cas de couples d'intervalles dans la partition de $\boldsymbol{T}_{N_t}$. Soit ν_0 le nombre des intervalles $]b_i, c_i[$. Cherchons un minorant θ_2 correspondant à ces intervalles. Soient m_i le milieu de $]b_i, c_i[$ et λ_i sa longueur. La proposition 3 donne:

$$\int_{b_i}^{c_i} h^+(L, L', x, 2m_i - x)\,dx \geqslant \frac{a-2}{2a}\,\lambda_i^2 l(K),$$

$$\sum_{i=1}^{\nu_0}\int_{b_i}^{c_i} h^+(L, L', x, 2m_i - x)\,dx \geqslant \frac{a-2}{2a}\,l(K)\sum_{i=1}^{\nu_0}\lambda_i^2.$$

Par ailleurs

$$\sum_{i=1}^{\nu_0}\lambda_i = N_t\left[1 - \frac{\lambda(a-2)}{a}\,l(K) - \lambda\varepsilon_T(N_t)\right].$$

La somme des carrés est minimale quand tous les λ_i sont égaux, donc

$$\sum_{i=1}^{\nu_0}\lambda_i^2 \geqslant \frac{N_t^2}{\nu_0}\left[1 - \frac{\lambda(a-2)}{a}\,l(K) - \lambda\varepsilon_T(N_t)\right]^2$$

et par suite:

$$\frac{1}{2N_t}\sum_{i=1}^{\nu_0}\int_{b_i}^{c_i} h^+(L, L', x, 2m_i - x)\,dx$$
$$\geqslant \frac{a-2}{4a}\,l(K)\,\frac{N_t}{\nu_0}\left[1 - \frac{\lambda(a-2)}{a}\,l(K) - \lambda\varepsilon_T(N_t)\right]^2.$$

Il résulte de la définition même des intervalles $[b_i, c_i]$ que leur nombre

ν_0 n'excède pas $A(K, N_t)$; nous pouvons donc choisir

$$\theta_2 = \frac{a-2}{4a}\frac{N_t}{A(K, N_t)}\left\{1 - \frac{\lambda(a-2)}{a}l(K) - \lambda\varepsilon_T(N_t)\right\}^2.$$

Comme $\dfrac{A(K, N_t)}{N_t l(K)} = 1 + \dfrac{\varepsilon_K(N_t)}{l(K)}$ nous obtenons:

$$\theta_2 = \frac{a-2}{4a}\frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon_K(N_t)}{l(K)}}\left[1 - \frac{\lambda(a-2)}{a}l(K) - \lambda\varepsilon_T(N_t)\right]^2.$$

Posons $\theta(N_t) = \theta_1 + \theta_2$. L'intervalle K dépend de t dans la mesure où sa longueur est $l(I)/a^i$ avec l'exposant i compris entre 0 et $pt-1$. Etudions $\theta(N_t)$ asymptotiquement; nous avons:

$$l(K) \geqslant \frac{al(I)}{a^{pt}} \geqslant \frac{al(I)}{(N_t+1)^{p/q}},$$

$$\frac{\varepsilon_K(N_t)}{l(K)} \leqslant \frac{A}{al(I)}\left(\frac{N_t+1}{N_t}\right)^{p/q}\frac{\log N_t}{N_t^{1-p/q}}.$$

D'où $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\varepsilon_K(N_t)}{l(K)} = \lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\varepsilon_T(N_t)}{l(K)} = 0.$

Mais les quantités

$$\frac{\lambda}{2}\left[1 - \frac{\lambda}{2}l(K)\right]\varepsilon_T(N_t) \quad \text{et} \quad \lambda\varepsilon_T(N_t)$$

tendent aussi vers 0 avec $1/t$, ce qui nous conduit à introduire la quantité suivante:

$$\theta'(N_t) = \frac{\lambda}{2}l(K)\frac{(a-2)}{a}\left[1 - \frac{\lambda}{2}l(K)\right] + \frac{(a-2)}{4a}\left[1 - \frac{\lambda(a-2)}{a}l(K)\right]^2,$$

qui est un trinôme du second degré en $\lambda l(K) = v$.

Ce trinôme présente un maximum égal à $(a-2)/4(a-1)$ pour $v = a/2(a-1)$. Par suite l'intervalle K étant donné, choisissons $\lambda = a/2(a-1)l(K)$ et évaluons la différence $\theta(N_t) - \theta'(N_t)$ pour cette valeur de λ:

$$\theta(N_t) - \theta'(N_t) = \frac{a-2}{4(a-1)}\left[1 - \frac{a}{4(a-1)}\right]\varepsilon_T(N_t) +$$

$$+\frac{a-2}{4a}\left[1 - \frac{a-2}{2(a-1)}\right]^2\left\{\frac{1}{1+\varepsilon_K(N_t)/l(K)} - 1\right\} +$$

$$+\frac{a-2}{4a}\frac{1}{1+\varepsilon_K(N_t)/l(K)}\left\{\left[\frac{a}{2(a-1)}\right]^2\left[\frac{\varepsilon_T(N_t)}{l(K)}\right]^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{a}{a-1}\left[1 - \frac{a-2}{2(a-1)}\right]\frac{\varepsilon_T(N_t)}{l(K)}\right\}.$$

Ce calcul montre que $|\theta(N_t) - \theta'(N_t)|$ est majorée par une quantité $\varphi_a(N_t)$ qui ne dépend que de a et N_t et non de T et K.

De plus $\lim\limits_{N_t\to+\infty}\varphi_a(N_t) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$; il existe t_0 ne dépendant que de ε, tel que pour tout $t \geqslant t_0$ on ait

$$\theta(N_t) \geqslant \theta'(N_t) - \varepsilon = \frac{a-2}{4(a-1)} - \varepsilon.$$

Fixons à présent un entier t supérieur à t_0, puis choisissons un intervalle K contenu dans I, de longueur $l(I)/a^i$ avec $0 \leqslant i \leqslant pt-1$. Si les $A(T, N_t)$ entiers envisagés précédemment sont isolés par la distance critique $\lambda = a/2(a-1)l(K)$, nous avons la minoration

$$M(K, N_t) \geqslant \frac{1}{2}\{M(L, N_t) + M(L', N_t)\} + \frac{a-2}{4(a-1)} - \varepsilon.$$

Pour achever la démonstration du lemme 2 (i), il faut abandonner l'hypothèse d'isolement des $A(T, N_t)$ entiers par la distance critique $a/2(a-1)l(K)$, mais nous verrons que cette situation est minimale.

IV.3. Démonstration du lemme 2 (i) dans le cas général.

(a) Définition d'un intervalle J. A un nombre $\varepsilon > 0$ donné nous associons l'entier t_0 défini au paragraphe précédent et nous considérons un entier $t \geqslant t_0$. L'intervalle K étant choisi conformément aux hypothèses du lemme 2, les $A(T, N_t)$ entiers relatifs aux points de T se répartissent en groupes de points non isolés par $a/2(a-1)l(K)$. Pour les groupes se réduisant à un seul point isolé, nous centrons en celui-ci un intervalle de longueur $a/2(a-1)l(K)$ et la contribution correspondante pour la minoration de θ est $\dfrac{a}{4(a-1)l(K)}\left[1 - \dfrac{a}{4(a-1)l(K)}\right]$. Soit k un entier compris entre 1 et $A(T, N_t)$, et envisageons un ensemble d'entiers correspondant à des points de T, non isolés par $a/2(a-1)l(K)$ et formé exactement de k éléments. Soient $\nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_k$ ces entiers. Ceci implique que les distances $\nu_{i+1} - \nu_i$ sont toutes inférieures à $a/2(a-1)l(K)$ et de plus, quand on porte la distance $a/4(a-1)l(K)$ de part et d'autre des entiers extrêmes ν_1 et ν_k, on ne rencontre pas d'entiers relatifs aux points de T. Notons J l'intervalle

$$\left]\nu_1 - \frac{a}{4(a-1)l(K)}, \nu_k + \frac{a}{4(a-1)l(K)}\right[.$$

(b) Partition de J en intervalles $(I_a)_a$ et couples d'intervalles $(J_\beta, K_\beta)_\beta$. Soient $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_{k-1} \leqslant a/2(a-1)l(K)$ les distances ordonnées des intervalles (ν_i, ν_{i+1}). Par commodité posons $n_k = a/2(a-1)l(K)$, alors $l(J) = \sum_{i=1}^{k} n_i$; exhibons une partition de J formée de:

k intervalles de longueur n_1,
$(k-1)$ paires d'intervalles de longueur $(n_2 - n_1)/2$,
...
$(k-p+1)$ paires d'intervalles de longueur $(n_p - n_{p-1})/2$,
...
une paire d'intervalles de longueur $(n_k - n_{k-1})/2$.

Supposons $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1} < n_k$ et construisons la partition par étapes:

1ère étape. En chacun des ν_i on centre un intervalle de longueur n_1; cela détermine k intervalles tous disjoints sauf deux qui ont une extrémité commune et dont nous prenons la réunion ce qui donne $(k-1)$ intervalles fermés $I_j^{(1)}$ dont la somme des longueurs est kn_1.

2ème étape. Agrandissons chacun des $I_j^{(1)}$ en portant de part et d'autres la longueur $\frac{1}{2}(n_2 - n_1)$. Ce qui fait au total $(k-1)$ paires d'intervalles de longueur $\frac{1}{2}(n_2 - n_1)$. Les $(k-1)$ intervalles $I_j^{(1)}$ sont agrandis en $(k-1)$ intervalles $I_j'^{(1)}$ tous disjoints sauf deux qui ont une extrémité commune, ce qui détermine au total $(k-2)$ intervalles fermés $I_j^{(2)}$ disjoints dont la somme des longueurs est $kn_1 + (k-1)(n_2 - n_1)$.

p-ème étape. Si on a $(k-p+1)$ intervalles fermés disjoints $I_j^{(p-1)}$ dont la somme des longueurs est $kn_1 + (k-1)(n_2 - n_1) + \ldots + (k-p+2)(n_{p-1} - n_{p-2})$, comme on a supposé $n_1 < n_2 < \ldots < n_{p-1} < n_p < \ldots \ldots < n_{k-1} < n_k$, nous pouvons agrandir les $(k-p+1)$ intervalles $I_j^{(p-1)}$ en $(k-p+1)$ intervalles $I_j'^{(p-1)}$ en portant de chaque côté la longueur $\frac{1}{2}(n_p - n_{p-1})$. Les $I_j'^{(p-1)}$ sont encore tous disjoints, sauf deux qui ont une extrémité commune, ce qui fait $(k-p)$ intervalles fermés disjoints dont la somme des longueurs est

$$kn_1 + (k-1)(n_2 - n_1) + \ldots + (k-p+1)(n_p - n_{p-1}) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{p-1} + (k-p+1)n_p.$$

L'opération s'achève après k étapes. Les k intervalles de la première étape et les paires d'intervalles introduites dans les étapes suivantes réalisent une partition de J.

Si nous avons les inégalités larges $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_{k-1} \leqslant n_k$, l'opération précédente est encore possible et comporte éventuellement moins d'étapes; par exemple si $n_{p-1} = n_p$ on passe directement de la $(p-1)$ème étape à la $(p+1)$ème. Le cas le plus simple est celui où $n_1 = n_2 = \ldots \ldots = n_{k-1} < n_k$. La partition de J est alors formée de k intervalles de longueur n_1 centrés sur les entiers, et d'une paire d'intervalles de longueur $\frac{1}{2}(n_k - n_1)$.

(c) Minoration associée à cette partition de J. Notons $(I_a)_a$ les k intervalles de longueur n_1 et $(J_\beta, K_\beta)_\beta$ les paires d'intervalles qui interviennent dans la partition de J. Cherchons un minorant de la quantité

$$\frac{1}{2N_t}\sum_a \int_{I_a} h^+(L, L', x, 2m_a - x)\,dx + \frac{1}{2N_t}\sum_\beta \int_{J_\beta \cup K_\beta} h^+(L, L', x, 2n_\beta - x)\,dx.$$

Il résulte de la proposition 2 que

$$\frac{1}{2N_t}\sum_a \int_{I_a} h^+(L, L', x, 2m_a - x)\,dx \geqslant \frac{kn_1}{2N_t}\left[1 - \frac{n_1 l(K)}{2}\right].$$

Soit $[b_i, c_i]$, $[d_i, e_i]$ un couple d'intervalles de longueur $\frac{1}{2}(n_p - n_{p-1})$ intervenant dans la partition de J; soient m_i le milieu de $[c_i, d_i]$ et h_i le nombre de points u_ν de T pour lesquels ν appartient à $[c_i, d_i]$.

Il résulte de la proposition 4 que:

$$\frac{1}{2N_t}\int_{[b_i, c_i]\cup[d_i, e_i]} h^+(L, L', x, 2m_i - x)\,dx \geqslant \frac{l(K)}{4N_t}(n_p - n_{p-1})^2 + \frac{(n_p - n_{p-1})}{2N_t}[h_i - (e_i - b_i)l(K)].$$

Aux $(k-p+1)$ paires d'intervalles de longueur $\frac{1}{2}(n_p - n_{p-1})$ correspond le minorant

$$(k-p+1)\frac{l(K)}{4N_t}(n_p - n_{p-1})^2 + \frac{(n_p - n_{p-1})}{2N_t}\sum_{i=1}^{k-p+1}[h_i - (e_i - b_i)l(K)].$$

Nous avons par ailleurs $\sum_{i=1}^{k-p+1} h_i = k$ et

$$\sum_{i=1}^{k-p+1} (e_i - b_i) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{p-1} + (k-p+1)n_p.$$

Le minorant relatif à ces paires d'intervalles est donc

$$(k-p+1)\frac{l(K)}{4N_t}(n_p - n_{p-1})^2 + \frac{(n_p - n_{p-1})}{2N_t} \times$$
$$\times [k - l(K)\{n_1 + n_2 + \ldots + n_{p-1} + (k-p+1)n_p\}]$$

et le minorant associé à la partition de J est

$$\frac{kn_1}{2N_t}\left[1 - n_1\frac{l(K)}{2}\right] + \frac{l(K)}{4N_t}\sum_{p=2}^{k}(k-p+1)(n_p - n_{p-1})^2 +$$
$$+ \sum_{p=2}^{k}\frac{(n_p - n_{p-1})}{2N_t}[k - l(K)\{n_1 + n_2 + \ldots + n_{p-1} + (k-p+1)n_p\}].$$

Ce minorant dépend seulement des longueurs $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ et non de l'ordre des entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$. Nous pouvons donc le noter $\varphi_k(n_1, n_2, \ldots$ $\ldots, n_{k-1})$.

Remarquons que si $n_1 = n_2 = \ldots = n_{k-1} = n_k = a/2(a-1)l(K)$,

$$\varphi_k(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) = \frac{kn_1}{2N_t}\left[1 - \frac{n_1 l(K)}{2}\right],$$

résultat qu'on obtient aussi directement.

(d) Une propriété des fonctions φ_k. La distance critique $a/2(a-1)l(K)$ est notée λ dans ce qui suit.

Proposition 5. *Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Si $0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant \ldots \leqslant n_{k-1} \leqslant \lambda$, alors*

$$\varphi_k(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) \geqslant \varphi_k(\lambda, \lambda, \ldots, \lambda).$$

La démonstration se fait par récurrence sur k. Pour $k = 2$ cela résulte simplement de l'égalité

$$\varphi_2(n_1) - \varphi_2(\lambda) = \frac{l(K)}{4N_t}(\lambda - n_1)^2.$$

Soit k un entier strictement supérieur à 2; étant donné un ensemble de k entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ non isolés par la distance critique λ, la contribution de ces k entiers est $\varphi_k(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1})$. Il existe un indice j entre 1 et $k-1$ tel que la distance entre ν_1 et ν_2 soit exactement n_j. Si nous éloignons suffisamment l'entier ν_1 des $(k-1)$ autres entiers ν_i, jusqu'à ce qu'il soit isolé par la distance λ, la contribution du nouveau système de k entiers ainsi obtenu est

$$\frac{\lambda}{2N_t}\left[1 - \frac{\lambda l(K)}{2}\right] + \varphi_{k-1}(n_1, n_2, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_{k-1}).$$

Etablissons la minoration

$$\varphi_k(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1})$$
$$\geqslant \frac{\lambda}{2N_t}\left[1 - \frac{\lambda l(K)}{2}\right] + \varphi_{k-1}(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_{k-1}),$$

ce qui permet de démontrer la proposition 5 par une simple récurrence.

Envisageons la différence

$$\delta_j = \varphi_k(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) -$$
$$-\left\{\frac{\lambda}{2N_t}\left[1 - \frac{\lambda l(K)}{2}\right] + \varphi_{k-1}(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_{k-1})\right\}.$$

Un calcul élémentaire montre que pour tout $j = 1, 2, \ldots, k-1$, on a

$$\delta_j = \frac{l(K)}{4N_t}(\lambda - n_j)^2.$$

Il suffit pour cela d'expliciter les sommations qui interviennent dans les expressions de

$$\varphi_k(n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}) \quad \text{et} \quad \varphi_{k-1}(n_1, \ldots, n_{j-1}, n_{j+1}, \ldots, n_{k-1}).$$

Comme la contribution des k entiers ne dépend pas de leur ordre mais seulement des distances $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, il suffit pour établir la proposition 5 de montrer l'égalité $\delta_j = \frac{l(K)}{4N_t}(\lambda - n_j)^2$ pour une valeur particulière arbitraire de j entre 1 et $k-1$, par exemple pour les valeurs extrêmes $j = 1$ et $j = k-1$ qui facilitent quelque peu le calcul.

(e) Démonstration du lemme 2 (i). Si les $A(T, N_t)$ entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots$ $\ldots, \nu_{A(T,N_t)}$ relatifs aux points de T ne sont pas séparés par une distance $\lambda \geqslant a/2(a-1)l(K)$, envisageons un groupe de k entiers parmi les précédents, non isolés par $a/2(a-1)l(K)$. La contribution de ces k points pour la minoration de θ est au moins égale à ce qu'elle serait s'ils étaient isolés par $a/2(a-1)l(K)$ d'après (d) et la partie du tore $\boldsymbol{T}_{N_t}$ utilisée pour les intégrations a pour mesure $n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1} + \lambda \leqslant k\lambda$ et ceci est vrai pour tout entier k compris entre 1 et $A(T, N_t)$.

La contribution pour la minoration de θ ne provenant pas des $A(T, N_t)$ entiers est au moins égale à ce qu'elle serait si ces entiers étaient isolés, puisque $n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+\lambda \leqslant k\lambda$. Il en résulte que si t dépasse l'entier t_0 défini précédemment, alors:

$$M(K, N_t) \geqslant \frac{1}{2}\{M(L, N_t)+M(L', N_t)\}+\frac{a-2}{4(a-1)}-\varepsilon.$$

Bibliographie

[1] R. Béjian, *Minoration de la discrépance d'une suite quelconque sur T*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Mathématiques, Université Paul Sabatier, Série 5, tome 1, fascicule 3, 1979, 79-éme volume de la collection, p. 201–213.

[2] H. Faure, *Discrépance des suites associées à un système de minoration*, a paraître.

[3] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley and Sons, 1974, p. 107–109.

[4] P. Liardet, *Discrépance sur la cercle*, Primaths, n° 1; Université de Provence, 1979, p. 7–11.

[5] K. F. Roth, *On irregularities of distribution*, Mathematika 1 (1954), p. 73–79.

[6] W. M. Schmidt, *Irregularities of distribution VII*, Acta Arith. 21 (1972), p. 45–60.

[7] R. Tijdeman et G. Wagner, Résultat non publié.

[8] T. van Aardenne-Ehrenfest, *Proof of the impossibility of a just distribution*, Indag. Math. 11 (1949), p. 264–269.

[9] J. G. van der Corput, *Verteilungsfunktionnen*, Proc. Kon. Ned. V. Wetensch. 38 (1935), p. 813–821.

Reçu le 3.4.1980
et dans la forme modifiée le 2.6.1980 (1203)

ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

An application of Hilbert's irreducibility theorem to diophantine equations

by

A. Schinzel (Warszawa)

This paper is a sequel to [3]. That was a study of polynomials F with the property that for every integer t^* (or for some integer t^* from every arithmetic progression) the equation $F(x, y, t^*) = 0$ is solvable for integers x, y. It has been proved that under suitable conditions on F this property implies the solvability of $F(x, y, t) = 0$ for x, y in $Q[t]$. It has been shown also by an example that the result fails if t is replaced by a two-dimensional vector $\boldsymbol{t}$. In the present paper I show how to modify the assertion so that it remains true for vector $\boldsymbol{t}$ of any dimension. The principal tool is the classical Hilbert's irreducibility theorem in a slightly refined form given in [2].

I shall prove the following theorems.

THEOREM 1. *Let $F \in Q[u, \boldsymbol{\tau}, t]$, $M \in Q[\boldsymbol{\tau}, t]$, $\boldsymbol{\tau} = \langle\tau_1, \ldots, \tau_r\rangle$. Suppose that for every r arithmetic progressions $P_1, \ldots, P_r$ there exist integers $\tau_1^*, \ldots, \tau_r^*$ and polynomials $x, y \in Q[t]$ such that $\tau_s^* \in P_s$ $(1 \leqslant s \leqslant r)$ and*

$$F(x(t), \boldsymbol{\tau}^*, t) = M(\boldsymbol{\tau}^*, t)y(t).$$

Then there exist polynomials $X \in Q(\boldsymbol{\tau})[t]$, $Y \in Q(\boldsymbol{\tau})[t]$ satisfying

$$F(X(t), \boldsymbol{\tau}, t) = M(\boldsymbol{\tau}, t)Y(t).$$

THEOREM 2. *Let $F \in Q[u, \boldsymbol{\tau}, t]$ be of degree at most four in u, $M \in Q[\boldsymbol{\tau}, t]$. Suppose that for every $r+1$ arithmetic progressions $P_1, \ldots, P_{r+1}$ there exist integers $\tau_1^*, \ldots, \tau_r^*, t^*, x, y$ such that $\tau_i^* \in P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$, $t^* \in P_{r+1}$ and*

$$F(x, \boldsymbol{\tau}^*, t^*) = M(\boldsymbol{\tau}^*, t^*)y.$$

Then there exist polynomials $X, Y \in Q(\boldsymbol{\tau})[t]$ satisfying

$$F(X(t), \boldsymbol{\tau}, t) = M(\boldsymbol{\tau}, t)Y(t).$$

The proof of Theorem 1 is based on the two following lemmata.

LEMMA 1. *Let $M \in Q[\boldsymbol{\tau}, t]$ be squarefree with respect to t, $F \in Q[x, \boldsymbol{\tau}, t]$ have the leading coefficient with respect to x prime to M. There exist a non-zero*