Remark 4. Ramanujan's formula (2) follows from (14) with $a = 1$.

The proof of Theorem 2 shall be done in the same way as that of Theorem 1, using the functional equation

$$\Psi_{a,\nu}\left(1-2\nu+\frac{1}{a}-s\right) = (-1)^{a(\nu-1)}\Psi_{a,\nu}(s),$$

with

$$\Psi_{a,\nu}(s) = a(2\pi a)^{-as}\Gamma(as)\prod_{k=0}^{a-1}\zeta\left(s+\frac{k}{a}\right)\zeta\left(s+\frac{a-1-k}{a}-1+2\nu\right).$$

References

[1] B. C. Berndt, *Modular transformations and generalizations of several formulae of Ramanujan*, Rocky Mountain J. Math. 7 (1977), pp. 147–189.

[2] E. Grosswald, *Comments on some formulae of Ramanujan*, Acta Arith. 21 (1972), pp. 25–43.

[3] G. H. Hardy, *A formula of Ramanujan*, J. London Math. Soc. 3 (1928), pp. 238–240.

[4] Y. Matsuoka, *On the values of the Riemann zeta function at half integers*, Tokyo J. Math. 2 (1979), pp. 371–377.

[5] J. P. Serre, *A course in Arithmetic*, Springer G. T. M. 7 (1973), p. 92.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF EDUCATION
SHINSHU UNIVERSITY
Nishinagano, Nagano 380, Japan

Received on 16. 10. 1979
and in revised form on 25. 3. 1980 (1177)

ACTA ARITHMETICA
XLI (1982)

Об одной теореме А. Шаркози

А. В. Соколовский (Ташкент)

В статье [3] А. Шаркози (A. Sárközy) с помощью разработанного им „аналога по модулю p" одного неравенства К. Рота (см. [2]) получил результат, интересным следствием которого является

Теорема 1. *Пусть p — произвольное нечётное простое число, χ_p — любой характер по модулю p. Тогда существует целое x, такое что*

$$(1)\qquad \left|\sum_{n=x}^{x+(p-3)/2}\chi_p(n)\right| \geqslant c(\sqrt{p}-1/\sqrt{p})$$

и $c \geqslant 1/\pi$.

Эту теорему можно усилить лишь за счёт увеличения значения c. Поэтому в работе [3] ставился вопрос о наилучшей постоянной c в неравенстве (1).

В статье [4] мы доказали равенство, из которого следует, что в (1) можно взять $c = 1/2$, и это значение, вообще говоря, наилучшее. А именно, в [4] доказана

Теорема 2. *Пусть p — любое нечётное простое число, t_m ($m = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$) — периодическая последовательность комплексных чисел с периодом p. Тогда для любого $0 \leqslant z \leqslant p-1$ имеем*

$$(2)\qquad \sum_{r=1}^{p-1}\sum_{n=1}^{p}\left|\sum_{j=0}^{z}t_{n+jr}\right|^2 = (z+1)(p-z-1)\sum_{m=1}^{p}|t_m|^2+z(z+1)\left|\sum_{m=1}^{p}t_m\right|^2.$$

Заметим, что в случае $t_m = \chi_p(m)$ равенство (2) превращается в равенство

$$\sum_{k=1}^{p}\left|\sum_{j=0}^{z}\chi_p(k+j)\right|^2 = (p-z-1)(z+1),$$

которое имеется в книге И. М. Виноградова *Основы теории чисел* (вопрос 10 „β" к главе 6).

При $z = (p-3)/2$ и $t_m = \chi_p(m)$ отсюда следует (1) с $c = 1/2$.

Доказательство основано на использовании конечных сумм Фурье взамен интегралов в рассуждениях, аналогичных проводимым в [2] и [3].

Здесь мы с помощью того же приёма докажем неравенство (1) для примитивных характеров $\chi_q^*(m)$ произвольного модуля q. Это неравенство является следствием следующих двух простых лемм.

Лемма 1. *Пусть* $q>2$ — *любое натуральное число, а* $F_z\left(\frac{r}{q}\right)=\sum\limits_{j=0}^{z} e^{2\pi i \frac{r}{q} j}$. *Тогда*

$$\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}\left|F_{[q/2]}\left(\frac{r}{q}\right)\right|^2 \geqslant cq^2 - q\ln q \tag{3}$$

где $c > \frac{1}{4} - \sum\limits_{\substack{k=1\\(2k+1)|q}}^{(q-1)/2} \frac{1}{(2k+1)^2} > \frac{1}{8}$ ($[u]$ — целая часть числа u).

Доказательство.

$$\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}\left|F_{[q/2]}\left(\frac{r}{q}\right)\right|^2 = \sum_{r=1}^{q}\left|\sum_{j=0}^{[q/2]} e^{2\pi i \frac{r}{q} j}\right|^2 - \sum_{\substack{d|q\\d>1}}\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=d}}^{q}\left|\sum_{j=0}^{[q/2]} e^{2\pi i \frac{r}{q} j}\right|^2 =$$

$$= q\left(\left[\frac{q}{2}\right]+1\right) - \left(\left[\frac{q}{2}\right]+1\right)^2 - \sum_{\substack{d|q\\1<d<q}}\sum_{\substack{m=1\\(m,q/d)=1}}^{q/d}\left|\sum_{j=0}^{[q/2]} e^{2\pi i \frac{m}{q/d} j}\right|^2 >$$

$$> \left[\frac{q}{2}\right]^2 - 1 - \sum_{\substack{1<d<q\\d|q\\d=2k+1}}\sum_{m=1}^{q/d}\left|\sum_{j=0}^{[q/2(2k+1)]} e^{2\pi i \frac{m}{q/d} j}\right|^2 >$$

$$> \frac{q^2}{4} - \frac{q}{2} - 1 - \frac{q^2}{2}\sum_{\substack{k=1\\(2k+1)|q}}^{(q-1)/2}\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{1}{2}q\ln q >$$

(так как $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} - 1 < \frac{1}{4}$)

$$> \frac{q^2}{8} - q\ln q.$$

Лемма 2. *Если* $\chi_q^*(r)$ — *любой примитивный характер по модулю* q, *то*

$$\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}\left|F_z\left(\frac{r}{q}\right)\right|^2 = \sum_{n=1}^{q}\left|\sum_{j=0}^{z}\chi_q^*(n+j)\right|^2. \tag{4}$$

Доказательство.

$$\sum_{\substack{r=1\\(r,q)=1}}^{q}\left|F_z\left(\frac{r}{q}\right)\right|^2 = \sum_{r=1}^{q}|\bar{\chi}_q^*(r)|^2\cdot\left|F_z\left(\frac{r}{q}\right)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q}\left|\sum_{m=1}^{q}\chi_q^*(m)e^{2\pi i\frac{m}{q}r}\right|^2\left|\sum_{j=0}^{z}e^{-2\pi i\frac{r}{q}j}\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q}\left|\sum_{j=0}^{z}\sum_{m=1}^{q}\chi_q^*(m)e^{2\pi i\frac{r}{q}(m-j)}\right|^2.$$

Положим

$$\tilde{\chi}_q(n) = \begin{cases}\chi_q^*(n), & \text{если } 1 \leqslant n \leqslant q,\\ 0, & \text{если } n<1 \text{ или } n>q\end{cases}$$

тогда равенство можно продолжить

$$= \frac{1}{q}\sum_{r=1}^{q}\left|\sum_{n=1-z}^{q}\left(\sum_{j=0}^{z}\tilde{\chi}_q(n+j)\right)e^{2\pi i\frac{n}{q}r}\right|^2 =$$

$$= \sum_{h=1}^{q}\left|\sum_{\substack{n=1-z\\n\equiv h\,(\mathrm{mod}\,q)}}^{q}\left(\sum_{j=0}^{z}\tilde{\chi}_q(n+j)\right)\right|^2 = \sum_{n=1}^{q}\left|\sum_{j=0}^{z}\chi_q(n+j)\right|^2.$$

При $z=[q/2]$ из лемм 1 и 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Для любого примитивного характера* $\chi_q^*(m)$ *по модулю натурального* q *справедливо неравенство*

$$\sum_{n=1}^{q}\left|\sum_{0\leqslant j\leqslant[q/2]}\chi_q^*(n+j)\right|^2 > cq^2 - q\ln q \tag{5}$$

(*c из леммы* 1).

В частности, для любого $\chi_q^*(n)$ *существует такое целое* x, *что*

$$\left|\sum_{n=x}^{x+[q/2]}\chi_q^*(n)\right| > \frac{\sqrt{q}}{2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{8\ln q}{q}}. \tag{6}$$

Для периодической по модулю q последовательности t_m точно так же получаем:

Теорема 4. *Пусть* q — *любое натуральное,* c_j $(0\leqslant j\leqslant q-1)$ — *произвольные комплексные числа,* t_m $(m=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \ldots)$ — *периодическая последовательность комплексных чисел с периодом* q, *то есть* $t_{m_1}=t_{m_2}$, *если* $m_1\equiv m_2 \pmod{q}$.

Тогда, если

$$\sum_{n=0}^{q-1} t_n e^{2\pi i \frac{a}{q} n} = 0 \quad \text{для всех } (a, q) > 1 \tag{7}$$

то

$$\sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} \sum_{m=1}^{q} \Big| \sum_{j=0}^{q-1} c_j t_{m+rj} \Big|^2 = \sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} \Big| \sum_{j=0}^{q-1} c_j e^{2\pi i \frac{r}{q} j} \Big|^2 \cdot \sum_{n=0}^{q-1} |t_n|^2. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим через

$$F\left(\frac{r}{q}\right) = \sum_{j=0}^{q-1} c_j e^{2\pi i \frac{r}{q} j} \quad \text{и} \quad S\left(\frac{a}{q}\right) = \sum_{n=0}^{q-1} t_n e^{2\pi i \frac{a}{q} n}.$$

В силу условия (7) мы имеем

$$\sum_{a=0}^{q-1} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \left| F\left(\frac{ar}{q}\right) \right|^2 = q \sum_{\substack{r=1 \\ (r,q)=1}}^{q} \left| F\left(\frac{r}{q}\right) \right|^2 \cdot \sum_{m=0}^{q-1} |t_m|^2. \tag{9}$$

С другой стороны

$$\sum_{a=0}^{q-1} \left| S\left(\frac{a}{q}\right) \right|^2 \cdot \sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \left| F\left(\frac{ar}{q}\right) \right|^2 = \sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \sum_{a=0}^{q-1} \Big| \sum_{n=0}^{q-1} t_n \sum_{j=0}^{q-1} c_j e^{2\pi i \frac{a}{q}(n+rj)} \Big|^2.$$

Введём числа t'_m такие, что $t'_m = t_m$, если $0 \leqslant m \leqslant q-1$ и $t'_m = 0$, если $m < 0$ или $m \geqslant q$. Тогда равенство можно продолжить

$$= \sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \sum_{a=0}^{q-1} \Big| \sum_{m=0}^{(r+1)(q-1)} \Big(\sum_{j=0}^{q-1} c_j t'_{m-rj} \Big) e^{2\pi i \frac{a}{q} m} \Big|^2 =$$

$$= q \sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1} \Big| \sum_{\substack{m=0 \\ m \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)}}^{(r+1)(q-1)} \Big(\sum_{j=0}^{q-1} c_j t'_{m-rj} \Big) \Big|^2 =$$

$$= q \sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \sum_{l=0}^{q-1} \Big| \sum_{j=0}^{q-1} c_j \sum_{\substack{n=-rj \\ n \equiv l-rj \,(\mathrm{mod}\, q)}}^{q-1+(q-1-j)r} t'_n \Big|^2 =$$

$$= q \sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \sum_{n=1}^{q} \Big| \sum_{j=0}^{q-1} c_j t_{n-rj} \Big|^2. \tag{10}$$

Сравнивая (9) и (10), получаем утверждение.

Конечно, используя равенство Г. Монтгомери (см. [1]) можно справа в (8) заменить множитель

$$\sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \left| F\left(\frac{r}{q}\right) \right|^2 \quad \text{на} \quad \sum_{h=0}^{q-1} \Big| \sum_{d|q} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{j=0 \\ j \equiv h \left(\mathrm{mod}\, \frac{q}{d}\right)}}^{q-1} c_j \Big|^2.$$

Используя же естественное обобщение леммы 2, получаем:

Теорема 5. *В условиях и обозначениях теоремы 4 справедливо равенство*

$$\sum_{\substack{r=0 \\ (r,q)=1}}^{q-1} \sum_{m=1}^{q} \Big| \sum_{j=0}^{q-1} c_j t_{m+rj} \Big|^2 = \sum_{l=0}^{q-1} \Big| \sum_{j=0}^{q-1} c_j \chi_q^*(l+j) \Big|^2 \cdot \sum_{n=1}^{q} |t_n|^2, \tag{11}$$

где $\chi_q^*(h)$ — любой из примитивных характеров модуля q.

Литература

[1] H. L. Montgomery, *A note on the large sieve*, J. London Math. Soc. 43 (1968), стр. 93–98.

[2] K. F. Roth, *Irregularities of sequences relative to arithmetic progressions, I*, Math. Ann. 169 (1967), стр. 1–25.

[3] A. Sárközy, *Some remarks concerning irregularities of distribution of sequences of integers in arithmetic progressions, IV*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae 30(1–2) (1977), стр. 155–162.

[4] А. В. Соколовский, *Оценки снизу в большом решете*, Записки научных семинаров ЛОМИ 91 (1979), стр. 125–133.

ТАШКЕНТСКИЙ ИНСТИТУТ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА

Поступило 24. 10. 1979 (1178)