[13] A. R. Rajwade, *Certain classical congruences via elliptic curves*, J. London Math. Soc. 8 (1974), pp. 60–62.
[14] — *Some formulae for elliptic curves with complex multiplication*, Indian J. of Pure and Applied Maths. 8 (1977), pp. 379–387.
[15] — *The Diophantine equation $y^2 = x(x^2+21Dx+112D^2)$ and the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer*, J. Australian Math. Soc. 24 (1977), pp. 286–295.
[16] Surjit Singh and A. R. Rajwade, *The number of solutions of the congruence $y^2 \equiv x^4 - a \pmod p$*, L'Enseignement Math. 20 (1974), pp. 265–273.
[17] A. L. Whiteman, *A theorem of Brewer on character sums*, Duke Math. J. 30 (1963), pp. 545–552.
[18] K. S. Williams, *Note on a cubic character sum*, Aequationes Mathematicae 12 (1975), pp. 229–231.
[19] — *Evaluation of character sums connected with elliptic curves*, Proc. Amer. Math. Soc. 73 (1979), pp. 291–299.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
PANJAB UNIVERSITY
Chandigarh, India

Received on 27. 7. 1979
and in revised form on 29. 11. 1979 (1171)

ACTA ARITHMETICA
XL (1982)

Новые оценки коротких тригонометрических сумм

Ян Мозер (Братислава)

Профессор А. А. Карацуба поместил в книге [1], стр. 89, в качестве примера, следующую теорему: *для справедливости гипотезы Линделёфа необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x} n^{it} = O(\sqrt{x}|t|^{\varepsilon}), \quad 0<x<|t|,\ \varepsilon>0. \tag{1}$$

Первая (нетривиальная) часть этой теоремы является новым результатом в теории дзета-функции Римана.

Предлагаемая работа посвящена анализу дальнейших возможностей кроющихся в этом направлении.

1. Пусть ([5], стр. 383)

$$\vartheta(t) = -\frac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}it\right) = \frac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}\pi + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{2}$$

Исходя из приближенного функционального уравнения ([5], стр. 82, 85)

$$\zeta(s) = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n^s} + \chi(s)\sum_{n\leqslant y}\frac{1}{n^{1-s}} + O(x^{-\sigma}) + O(t^{1/2-\sigma}y^{\sigma-1}), \tag{3}$$

где ([5], стр. 81)

$$\chi(s) = \frac{2^{s-1}\pi^s}{\Gamma(s)\cos(\pi s/2)} = \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma+it-1/2} e^{i(t+\pi/4)}\left\{1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right\}, \tag{4}$$

и

$$s=\sigma+it, \quad 0\leqslant\sigma\leqslant 1, \quad 2\pi xy = t, \quad x>h>0, \quad y>h>0, \tag{5}$$

покажем, что имеет место

Теорема 1. *По гипотезе Линделёфа,*

(6) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\sin(\vartheta-t\ln n)=O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K}T^{\varepsilon}\right),$$

(7) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant P_0}\cos(\vartheta-t\ln n)-\sum_{P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\cos(\vartheta-t\ln n)=O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K}T^{\varepsilon}\right),$$

где

(8) $$t\in\langle T,T+H\rangle,\quad H\in(0,\sqrt[4]{T}\rangle,\quad P_0=\sqrt{T/2\pi},\quad 1<K\leqslant\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}$$

и $0<\varepsilon$ *— сколь угодно малое число.*

Примечание 1. Некоторое удивление вызывает *асимметрия* конфигурации сумм синусов и косинусов (относительно промежутков $(e^{-1/K}P_0,P_0\rangle,(P_0,e^{1/K}P_0\rangle)$ в соотношениях (6), (7), т.е. изменение *фазы*: $-\cos\varphi=\cos(\varphi+\pi)$, во второй сумме косинусов.

Пусть $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность определенную соотношением $\vartheta(t_\nu)=\pi\nu$, $\nu=1,2,\ldots$ ([5], стр. 261).

Следствие 1. *По гипотезе Линделёфа,*

(9) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\sin(t_\nu\ln n)=O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K}T^{\varepsilon}\right),$$

(10) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant P_0}\cos(t_\nu\ln n)-\sum_{P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\cos(t_\nu\ln n)=O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K}T^{\varepsilon}\right),$$

для $t_\nu\in\langle T,T+H\rangle$.

Так как из (1) следует, что (по гипотезе Линделёфа)

(11) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\sin(t_\nu\ln n)=O(\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}),$$

то делаем

Примечание 2. *Оценка* (9) *дает улучшение оценки* (11) [*например, при* $K=\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}$, (9) *дает* $O(1)$ *и* (11) $-O(T^{1/4+\varepsilon})$].

В случае последовательности $\{\bar{t}_\nu\}$ ([3], (12)) определенной соотношением $\vartheta(\bar{t}_\nu)=\pi\nu+\pi/2$, получаем

Следствие 2. *По гипотезе Линделёфа,*

(12) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\cos(\bar{t}_\nu\ln n)=O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K}T^{\varepsilon}\right),$$

(13) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant P_0}\sin(\bar{t}_\nu\ln n)-\sum_{P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\sin(\bar{t}_\nu\ln n)=O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K}T^{\varepsilon}\right),$$

для $\bar{t}_\nu\in\langle T,T+H\rangle$.

Здесь также оценка (12) дает улучшение соответствующей оценки, следующей из (1).

2. Пусть, далее,

(14) $$S(a,b)=\sum_{a<n\leqslant b<2a}n^{it},\quad b\leqslant\sqrt{t/2\pi},$$

(ср. [2], стр. 34). Из формулы Римана–Зигеля ([5], стр. 94, ср. [2], (57), (58))

(15) $$Z(t)=2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(T^{-1/4}),$$

$t\in\langle T,T+H\rangle$, в случае последовательности $\{t_\nu\}$, получаем (ср. [5], стр. 261)

(16) $$Z(t_\nu)=2(-1)^{\nu}\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(t_\nu\ln n)+O(T^{-1/4}),$$

для $t_\nu\in\langle T,T+H\rangle$. Мы покажем, исходя из (16), что имеет место

Теорема 2. *Если*

(17) $$|S(a,b)|<A(\Delta)\sqrt{a}t^{\Delta},\quad \Delta\in(0,1/6\rangle,$$

то,

(18) $$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}Z(t_\nu)=O(T^{\Delta}\ln^2T)+O(L^2T^{\Delta}\ln T)+R,$$

где $L\geqslant 2$ *и*

(19) $$R=\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^{\nu}\sum_{e^{-1/L}P_0<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(t_\nu\ln n),$$

(*относительно* H *см.* (8)).

Следствие 3. *По гипотезе Линделёфа* ($\Delta\to\varepsilon$, *см.* (1))

(20) $$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}Z(t_\nu)=O(L^2T^{2\varepsilon})+R,$$

где ε *— сколь угодно мало.*

Примечание 3. Двойная сумма R отличается тем свойством, что n во внутренней сумме пробегает количество значений порядка $\sim P_0/L$, т.е. количество значений меньшего порядка чем P_0.

3. Заметим, что в силу (1), по гипотезе Линделёфа имеем

(21) $$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\cos(t_\nu\ln n)=O(\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}),$$

для $t_\nu\in\langle T,T+H\rangle$.

Теперь мы подразделим значения $t_\nu \in \langle T, T+H\rangle$ на два класса. Значение t'_ν назовем *правильным*, если

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \cos(t'_\nu \ln n) = O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K^\omega} T^\varepsilon\right), \tag{22}$$

для $K = T^\delta$ и любых $\delta \in (0, \delta_0)$, $\omega \in (0, \omega_0)$ где δ_0, ω_0 — сколь угодно малые числа. Остальные значения $-t''_\nu$ назовем *неправильными*.

Пусть $Q(T, H)$ обозначает количество неправильных значений $\in \langle T, T+H\rangle$.

Теорема 3. *Если имеет место гипотеза Линделёфа и*

$$Q(T, T^\eta) = O(T^{\eta-\tau}), \quad \eta \geqslant \tau > 0, \tag{23}$$

(η, τ — *сколь угодно малые числа*) *то*

$$\sum_{T\leqslant t_\nu \leqslant T+T^\eta} Z(t_\nu) = o(T^\eta). \tag{24}$$

Так как (см. [4], (5), $H = T^\eta$, $\Delta \to \varepsilon$, $\varepsilon < \tau$)

$$\sum_{T\leqslant t_\nu \leqslant T+T^\eta} (-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi} T^\eta \ln\frac{T}{2\pi} + O(T^\varepsilon \ln T) = \frac{1}{\pi} T^\eta \ln\frac{T}{2\pi} + o(T^\eta), \tag{25}$$

то получаем

Следствие 4. *В предположениях теоремы 3, отрезок*

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^\eta)$$

содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$.

Заметим, что

(A) по усиленной гипотезе Линделёфа ([4], (13)) имеем

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0} \cos(t_\nu \ln n) = O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K^{1/2}} T^\varepsilon\right),$$

т.е. (ср. (22), $\omega = 1/2$) по этой гипотезе все значения $t_\nu \in \langle T, T+H\rangle$ являются правильными,

(B) условие (23) касается лишь определенного дискретного множества значений.

Значит, предположения теоремы 3 являются более слабыми чем усиленная гипотеза Линделёфа.

Доказательства теорем 1–3 помещены в частях 4, 5; 6, 7; 8 соответственно.

4. Из соотношения (4) получаем

$$\chi(1+it) = \frac{1}{\sqrt{xy}} e^{-i2\vartheta_1}\left\{1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{xy}} e^{-i2\vartheta_1} + O(t^{-3/2}), \tag{26}$$

где

$$\vartheta_1 = \vartheta_1(t) = \frac{1}{2} t \ln\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2} t - \frac{1}{8}\pi. \tag{27}$$

Далее, полагая

$$G(x) = \zeta(1+it) - \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{n^{1+it}}, \tag{28}$$

в силу (3), (26) имеем

$$G(x) = \frac{e^{-i2\vartheta_1}}{\sqrt{xy}} \sum_{n\leqslant y} n^{it} + O(yt^{-3/2}) + O(x^{-1}) + O(t^{-1/2}), \tag{29}$$

т.е.

$$\sqrt{xy}\, G(x) = e^{-i2\vartheta_1} \sum_{n\leqslant y} n^{it} + O(1) + O(\sqrt{y/x}). \tag{30}$$

Отсюда, полагая

$$x_1 = \frac{t}{2\pi P_0},\ y_1 = P_0; \quad x_2 = \frac{t}{2\pi P_0} e^{1/K},\ y_2 = P_0 e^{-1/K}, \tag{31}$$

получаем

$$\sqrt{x_1 y_1}\, G(x_1) = e^{-i2\vartheta_1} \sum_{n\leqslant y_1} n^{it} + O(1), \tag{32}$$

$$\sqrt{x_2 y_2}\, G(x_2) = e^{-i2\vartheta_1} \sum_{n\leqslant y_2} n^{it} + O(1). \tag{33}$$

Однако,

$$\sqrt{x_1 y_1} = \sqrt{x_2 y_2} = \sqrt{t/2\pi} = P_0 + O(H/P_0), \quad t \in \langle T, T+H\rangle, \tag{34}$$

и, по гипотезе Линделёфа [см. [5], стр. 326, второе соотношение сверху, в случае $k = 1$ (в котором, впрочем, должно быть $\delta \to \sigma$) полагая $\sigma = 1$; x_1, x_2, y_1, y_2 — величины порядка $t^{1/2}$]

$$G(x_1) = O(x_1^{-1/2} t^{3\varepsilon}), \quad G(x_2) = O(x_2^{-1/2} t^{3\varepsilon}). \tag{35}$$

Следовательно,

$$\sqrt{x_1 y_1}\, G(x_1) = P_0 G(x_1) + O\left(\frac{H}{P_0} \cdot x_1^{-1/2} t^{3\varepsilon}\right) = P_0 G(x_1) + o(1) \tag{36}$$

и, аналогичным способом,

$$\sqrt{x_2 y_2}\, G(x_2) = P_0 G(x_2) + o(1). \tag{37}$$

Теперь, в силу (32), (33), (36), (37) имеет место

Лемма 1. *По гипотезе Линделёфа,*

$$P_0G(x_1) = e^{-i2\vartheta_1}\sum_{n\leqslant y_1} n^{it}+O(1), \tag{38}$$

$$P_0G(x_2) = e^{-i2\vartheta_1}\sum_{n\leqslant y_2} n^{it}+O(1), \tag{39}$$

и, $(x_1 \leftrightarrow y_1, x_2 \leftrightarrow y_2$, см. (28)–(37)),

$$P_0G(y_1) = e^{-i2\vartheta_1}\sum_{n\leqslant x_1} n^{it}+O(1), \tag{40}$$

$$P_0G(y_2) = e^{-i2\vartheta_1}\sum_{n\leqslant x_2} n^{it}+O(1). \tag{41}$$

5. Вычитая соотношения (38), (39), (см. (28)), получаем

$$P_0\sum_{x_1<n\leqslant x_2}\frac{1}{n^{1+it}} = e^{-i2\vartheta_1}\sum_{y_2<n\leqslant y_1} n^{it}+O(1), \tag{42}$$

и, аналогичным способом, из (40), (41),

$$P_0\sum_{y_2<n\leqslant y_1}\frac{1}{n^{1+it}} = e^{-i2\vartheta_1}\sum_{x_1<n\leqslant x_2} n^{it}+O(1). \tag{43}$$

Далее, (см. (31)),

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{t}{2\pi P_0} = P_0+O\left(\frac{H}{P_0}\right), \quad & y_1 &= P_0, \\ x_2 &= e^{1/K}P_0+O\left(\frac{H}{P_0}\right), & y_2 &= e^{-1/K}P_0, \end{aligned} \tag{44}$$

и

$$\sum_{x_1<n\leqslant x_2}\frac{1}{n^{1+it}} = \left(\sum_{P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}+\sum_{e^{1/K}P_0<n<x_2}-\sum_{P_0<n\leqslant x_1}\right)\frac{1}{n^{1+it}} = S+S_1-S_2. \tag{45}$$

Однако,

$$\begin{aligned} S_1 &= O\left\{\frac{1}{P_0}(x_2-e^{1/K}P_0)\right\} = O\left(\frac{H}{P_0^2}\right), \\ S_2 &= O\left\{\frac{1}{P_0}(x_1-P_0)\right\} = O\left(\frac{H}{P_0^2}\right). \end{aligned} \tag{46}$$

Следовательно, складывая соотношения (42), (43), получаем

$$P_0\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\frac{1}{n^{1+it}} = e^{-i2\vartheta_1}\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0} n^{it}+O(1) \tag{47}$$

Далее положим

$$\frac{P_0}{n} = 1+\frac{P_0-n}{n} = 1+\varphi(n), \tag{48}$$

$$A_1 = \max_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\varphi(n), \quad A_2 = \max_{P_0\leqslant n\leqslant e^{1/K}P_0}\{-\varphi(n)\}.$$

Очевидно,

$$A_1, A_2 = O(1/K). \tag{49}$$

Применяя в надлежащем месте преобразование Абеля, получаем

$$\begin{aligned} P_0\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0}\frac{1}{n^{1+it}} &= \sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0} n^{-it}+ \\ &+O\{A_1\max_{e^{-1/K}P_0<c_1<P_0}|E_1(c_1)|\}+O\{A_2\max_{P_0\leqslant c_2\leqslant e^{1/K}P_0}|E_2(c_2)|\}, \end{aligned} \tag{50}$$

где

$$E_1(c_1) = \sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant c_1} n^{-it}, \quad E_2(c_2) = \sum_{P_0\leqslant n\leqslant c_2} n^{-it} \tag{51}$$

и, (см. (1)),

$$E_1(c_1), E_2(c_2) = O(\sqrt{P_0}T^\varepsilon), \quad t\in\langle T, T+H\rangle. \tag{52}$$

Теперь из (47) следует

Лемма 2. *По гипотезе Линделёфа,*

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0} n^{-it} = e^{-i2\vartheta_1}\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0} n^{it}+O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K}T^\varepsilon\right). \tag{53}$$

Далее, вычитая соотношения (42), (43), имеем

$$P_0\left(\sum_{x_1<n\leqslant x_2}\frac{1}{n^{1+it}}-\sum_{y_2<n\leqslant y_1}\frac{1}{n^{1+it}}\right) = e^{-i2\vartheta_1}\left(\sum_{y_2<n\leqslant y_1} n^{it}-\sum_{x_1<n\leqslant x_2} n^{it}\right)+O(1). \tag{54}$$

Отсюда, способом (44)–(46), (48)–(52), получается

Лемма 3. *По гипотезе Линделёфа,*

$$\sum_{P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0} n^{-it}-\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant P_0} n^{-it} = e^{-i2\vartheta_1}\left(\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant P_0} n^{it}-\sum_{P_0<n\leqslant e^{1/K}P_0} n^{it}\right)+O\left(\frac{\sqrt{P_0}}{K}T^\varepsilon\right). \tag{55}$$

Теперь мы завершим доказательство теоремы 1. А именно, умножая соотношение (53) на $e^{i\vartheta_1}$, принимая во внимание что, (см. (2), (27)),

$$\vartheta_1 = \vartheta + O(1/t), \tag{56}$$

получаем (6). Аналогичным способом из (55) следует (7).

6. Пусть

$$U = \sum_{e^{-2}P_0<n\leqslant e^{-1}P_0} \frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}} \sin\varphi, \quad X = X(n) = \frac{\pi}{2}\,\frac{\ln(P_0/n)}{\ln P_0}, \tag{57}$$

где (см. [2], (43), (50))

$$t_{\bar\nu} = \min_{t_\nu\in\langle T, T+H\rangle}\{t_\nu\}, \quad \varphi = t_{\bar\nu}\ln n. \tag{58}$$

Лемма 4. *Из* (17) *следует*

$$U = O(T^{\Delta}\ln T). \tag{59}$$

Доказательство. Полагая

$$U = \sum_{e^{-2}P_0<n\leqslant e^{-1}P_0} n^{3/2}\cdot\frac{\operatorname{ctg} X}{n^2}\sin\varphi, \tag{60}$$

имеем

$$|U| \leqslant (e^{-1}P_0)^{3/2}\cdot \max_{e^{-2}P_0<c_1\leqslant e^{-1}P_0} |U_1(c_1)|, \tag{61}$$

где

$$U_1(c_1) = \sum_{e^{-2}P_0<n\leqslant c_1} \frac{\operatorname{ctg} X}{n^2}\sin\varphi. \tag{62}$$

Так как

$$\frac{d}{dn}\frac{\operatorname{ctg} X}{n^2} = -\frac{1}{n^3\sin^2 X}\left(\sin 2X - \frac{\pi}{2\ln P_0}\right) < 0, \quad n\in(e^{-2}P_0, e^{-1}P_0), \tag{63}$$

то последовательность

$$\left\{\frac{\operatorname{ctg} X}{n^2}\right\}$$

убывает в указанном промежутке и ограничена значением

$$\frac{\operatorname{ctg} X(e^{-2}P_0)}{e^{-4}P_0^2} < A\frac{\ln P_0}{P_0^2}. \tag{64}$$

Применяя преобразование Абеля к сумме (62), получаем

$$|U_1(c_1)| \leqslant A\frac{\ln P_0}{P_0^2}\cdot \max_{e^{-2}P_0<c_2\leqslant c_1} |U_2(c_2)|, \tag{65}$$

где

$$U_2(c_2) = \sum_{e^{-2}P_0<n\leqslant c_2} \sin(t_{\bar\nu}\ln n). \tag{66}$$

Однако,

$$U_2(c_2) = \begin{cases} \tilde S(e^{-2}P_0, c_2), & c_2\leqslant 2e^{-2}P_0,\\ \tilde S(e^{-2}P_0, 2e^{-2}P_0) + \tilde S(2e^{-2}P_0, c_2), & c_2 > 2e^{-2}P_0,\end{cases} \tag{67}$$

где $\tilde S(a, b) = \operatorname{Im} S(a, b)$, $(4e^{-2} > e^{-1})$. Отсюда, в силу (17),

$$U_2(c_2) = O(\sqrt{P_0}\,T^{\Delta}). \tag{68}$$

Наконец, из (61), (65), (68) следует (59).

7. Пусть

$$V(l) = \sum_{e^{-1/l}P_0<n\leqslant e^{-1/(l+1)}P_0} \frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}}\sin\varphi. \tag{69}$$

Лемма 5. *Из* (17) *следует*

$$|V(l)| < A(\Delta)\,l\,T^{\Delta}\ln T, \quad l = 1, 2, \ldots \tag{70}$$

Доказательство. Так как

$$\frac{d}{dn}\frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{3/2}\sin^2 X}\left(\frac{\pi}{\ln P_0} - \frac{\sin 2X}{2}\right) > 0, \quad n\in(e^{-1/l}P_0, P_0), \tag{71}$$

то последовательность

$$\left\{\frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}}\right\}, \quad e^{-1/l}P_0 < n \leqslant e^{-1/(l+1)}P_0, \tag{72}$$

возрастает и ограничена значением

$$\frac{\operatorname{ctg} X(e^{-1/(l+1)}P_0)}{\sqrt{P_0}\,e^{-1/(2(l+1))}} < A\frac{l\ln P_0}{\sqrt{P_0}}. \tag{73}$$

Применяя преобразование Абеля к сумме $V(l)$, получаем

$$|V(l)| < A\frac{l\ln P_0}{\sqrt{P_0}}\cdot \max_{e^{-1/l}P_0<c\leqslant e^{-1/(l+1)}P_0} |V_1(l, c)|, \tag{74}$$

где

$$V_1(l, c) = \sum_{e^{-1/l}P_0<n\leqslant c} \sin\varphi. \tag{75}$$

Однако,

$$c \leqslant e^{-1/(l+1)}P_0 < 2e^{-1/l}P_0. \tag{76}$$

Следовательно, в силу (17),

$$|V_1(l,c)| \leqslant |S(e^{-1/l}P_0, c)| < A(\Delta)e^{-1/(2l)}\sqrt{P_0}T^{\Delta} < A(\Delta)\sqrt{P_0}T^{\Delta}. \tag{77}$$

Теперь, в силу (74), (77) получаем (70).

Лемма 6. *Из* (17) *следует*

$$\left|\sum_{e^{-1}P_0\leqslant n<e^{-1/L}P_0}\frac{\operatorname{ctg}X}{\sqrt{n}}\sin\varphi\right| < A(\Delta)L^2T^{\Delta}\ln T, \qquad L\geqslant 2. \tag{78}$$

Оценка (78) следует из соотношения

$$\sum_{e^{-1}P_0\leqslant n<e^{-1/L}P_0}\frac{\operatorname{ctg}X}{\sqrt{n}}\sin\varphi = \sum_{l=1}^{L-1}V(l). \tag{79}$$

Наконец, в силу [2], (59), (60), (61), (70), (71), [4], (23), (26) и оценок (59), (78) предлагаемой работы, следует (18).

8. Доказательство теоремы 3. Прежде всего (см. (22))

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{P_0}}\cos(t'_\nu\ln n) = O\left(\frac{T^{\varepsilon}}{K^{\omega}}\right) \tag{80}$$

и

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{P_0}}\cos(t'_\nu\ln n) = \sum\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(t'_\nu\ln n) - \sum\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{P_0}}\right)\cos(t'_\nu\ln n). \tag{81}$$

Так как последовательность $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{P_0}}\right\}$ убывает в указанном промежутке и ограничена значением $A/K\sqrt{P_0}$ и, кроме этого (см. (1))

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n\leqslant M<P_0}\cos(t'_\nu\ln n) = O(\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}), \tag{82}$$

то применяя к второй сумме на правой стороне соотношения (81) преобразование Абеля, получаем для нее оценку

$$O\left(\frac{1}{K\sqrt{P_0}}\cdot\sqrt{P_0}T^{\varepsilon}\right) = O\left(\frac{T^{\varepsilon}}{K}\right) = O\left(\frac{T^{\varepsilon}}{K^{\omega}}\right).$$

Значит, (см. (80), (81)), имеет место

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(t'_\nu\ln n) = O\left(\frac{T^{\varepsilon}}{K^{\omega}}\right), \tag{83}$$

и, действуя аналогичным способом в случае (21), для неправильного значения t''_ν получаем

$$\sum_{e^{-1/K}P_0<n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(t''_\nu\ln n) = O(T^{\varepsilon}). \tag{84}$$

Еще напомним, ([2], (23)), что

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}1 = O(H\ln T). \tag{85}$$

Теперь, полагая в (19) $H=T^{\eta}$, $L=K=T^{\delta}$, в силу (83), (84) получаем

$$\begin{aligned} R &= O(T^{\eta}\ln T\cdot T^{\varepsilon-\delta\omega}) + O(T^{\eta-\tau}\cdot T^{\varepsilon}) = \\ &= O(T^{\eta+\varepsilon-\delta\omega}\ln T) + O(T^{\eta-\tau+\varepsilon}) = o(T^{\eta}) \end{aligned} \tag{86}$$

в случае $\varepsilon<\delta\omega$, $\varepsilon<\tau$. Наконец, (см. (20)),

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+T^{\eta}}Z(t_\nu) = O(T^{2\varepsilon+2\delta}) + R = o(T^{\eta}), \tag{87}$$

если $\varepsilon+\delta<\eta/2$. (Выбирая при данных, сколь угодно малых $\eta\geqslant\tau>0$, например, значения $\delta=\omega=\tau/4$, $\varepsilon=\tau^2/32$, то соотношения $\varepsilon<\delta\omega$, $\varepsilon<\tau$, $\varepsilon+\delta<\tau/2\leqslant\eta/2$ выполняются.)

Литература

[1] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Москва 1975.
[2] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43.
[3] —, *О корнях уравнения* $Z'(t)=0$, ibid. 40 (1982), стр. 79–89.
[4] —, *Исправление к работам*: Acta Arith. 31 (1976); стр. 31–43; 31 (1976), стр. 45–51; 35 (1979), стр. 403–404, ibid. 40 (1982), стр. 97–107.
[5] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Поступило 28. 9. 1979 (1175)