[3] G. I. Gusev, *Poincaré series* (Russian), Mat. Zametki 17 (1975), pp. 245–254 = Math. Notes 17 (1975), pp. 142–147.
[4] E. Hille, *Analytic function theory*, Vol. II, Ginn and Company, Boston 1962.
[5] J.-I. Igusa, *Complex powers and asymptotic expansions*, Journ. Reine Angew. Math. I 268/269 (1974), pp. 110–130; II 278/279 (1975), pp. 307–321.
[6] — *Some observations on higher degree characters*, Amer. Journ. Math. 99 (1977), pp. 393–417.
[7] M. D. Nutt, *The Radon–Nikodym derivative in p-adic fields*, Ph. D. Dissertation, University of Massachusetts, 1974.
[8] J. W. Shuck, *Calculus on p-adic manifolds with applications to number theory*, Ph. D. Dissertation, Northwestern University, 1969.
[9] — *On the Poincaré series of a polynomial with p-adic integer coefficients*, Abstract 691-12-13, Notices A. M. S., 19 (1972), pp. A-58.
[10] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Princeton, N. J., 1961.

UNIVERSITY OF MASSACHUSETTS
Amherst, Mass., USA
ACADIA UNIVERSITY
Wolfville, N.S., Canada

Received on 10. 5. 1978
and in revised form on 14. 2. 1980 (1068)

ACTA ARITHMETICA
XL (1982)

Über die Verteilung der Primzahlen in Folgen der Form $[f(n+x)]$, II

von

FRIEDRICH ROESLER (München)

Es bezeichne $\mathscr{F}_{\text{pol}}$ die Menge aller verallgemeinerten Polynomfunktionen

$$f(y) = ay^k + \sum_{i=1}^{m} a_i y^{k_i}$$

mit positiven Leitkoeffizienten a, reellen a_i und monoton fallenden Exponenten $k > k_1 > \ldots > k_m \geqslant 0$. In [2] war die harmonische Dichte $D^{\text{har}}_{\text{har}}(P, f)(x)$ der Menge P aller Primzahlen in der Folge $[f(n+x)]_{n\in N}$ definiert worden als der (nicht immer existierende) Limes

$$D^{\text{har}}_{\text{har}}(P, f)(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N, [f(n+x)]\in P} 1/n}{\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant N, n\in P} 1/n}.$$

Diese Dichte hat die Eigenschaft:

Satz. *Für jede Funktion f aus $\mathscr{F}_{\text{pol}}$ vom Grad $k > 12/5$ und für fast alle x (im Sinne des Lebesgue-Maßes) aus dem Intervall $0 \leqslant x < 1$ ist*

$$D^{\text{har}}_{\text{har}}(P, f)(x) = 1/k.$$

Diese Behauptung wurde als Satz 11 (ii) — und zwar für alle f aus $\mathscr{F}_{\text{pol}}$ vom Grad $k > 2$ — schon in [2], § 7, bewiesen, dort aber unter der Voraussetzung, daß der Primzahlsatz in der Form

$$\text{(PZS2)} \qquad \pi(y) = \operatorname{li} y + O(\sqrt{y}\log y)$$

gültig ist, und die Richtigkeit dieser Abschätzung ist äquivalent zur Richtigkeit der Riemannschen Vermutung.

Satz 11 (i) in [2], § 7, machte eine ähnliche Dichteaussage für exponentiell wachsende Funktionen f, und zum Beweis dieser Aussage reichte der schwächere (und bewiesene) Primzahlsatz

$$\text{(PZS1)} \qquad \pi(y) = \operatorname{li} y + O\big(y\exp(-\log^{1/2} y)\big).$$

Der Grund für diesen auf den ersten Blick erstaunlichen Sachverhalt ist der, daß in beiden Fällen für $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ Beschreibungen der Anzahl

$$(1)\qquad \pi\big(f(n+b)\big) - \pi\big(f(n+a)\big)$$

in Haupt- und O-Term benötigt wurden, und diese sind leicht ableitbar aus (PZS1) für exponentiell wachsende Funktionen f, nicht aber für Funktionen aus $\mathscr{F}_{\mathrm{pol}}$.

Hier wird nun eine Beschreibung der Differenz

$$\psi(y+h) - \psi(y)$$

für im Vergleich zu y kleine h aus Huxley [1], Kap. 28, übernommen, wie sie Anwendung findet bei den Beweisen über die Größe möglicher Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen. Sie liefert eine Abschätzung der Differenz in (1), die scharf genug ist, (PZS2) im Beweis von Satz 11 (ii) zu ersetzen.

Die Formeln (28.25) bis (28.33) und (13.14) in [1] zeigen für beliebiges positives δ mit einer von δ abhängigen positiven Konstanten c

$$\psi(y+h) - \psi(y) = h + O\big(h\exp(-c\log^{1/4} y) + y^{7/12+\delta}\big),$$

und mit $\vartheta(y) = \psi(y) + O(\sqrt{y}\log y)$ folgt auch

$$(2)\qquad \vartheta(y+h) - \vartheta(y) = h + O\big(h\exp(-c\log^{1/4} y) + y^{7/12+\delta}\big).$$

Es sei nun f eine Funktion aus $\mathscr{F}_{\mathrm{pol}}$ vom Grad $k > 12/5$. Wie in [2], § 1, kann von f ohne Einschränkung gefordert werden:

(F1) $\quad f(0) \geqslant 1, \quad f'(0) \geqslant 1, \quad f''(0) > 0, \quad f''$ monoton wachsend.

Für natürliche Zahlen n und $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ ergibt sich dann aus (2) bei passender Wahl von δ mit einem positiven ε

$$\begin{aligned}&\vartheta\big(f(n+b)\big) - \vartheta\big(f(n+a)\big)\\ &\quad = f(n+b) - f(n+a) + O_f\big((b-a)n^{k-1}\exp(-c\log^{1/4} n) + n^{k-1-\varepsilon}\big),\end{aligned}$$

und daraus folgt mit dem Mittelwertsatz

$$(3)\qquad \begin{aligned}&\pi\big(f(n+b)\big) - \pi\big(f(n+a)\big)\\ &\quad = (b-a)\frac{f'(n)}{\log f(n)} + O_f\big((b-a)n^{k-1}\exp(-c\log^{1/4} n) + n^{k-1-\varepsilon}\big).\end{aligned}$$

Nun läßt sich der Beweis von Satz 11 (ii) aus [2] in der Weise modifizieren, daß (PZS2) durch Formel (3) ersetzt wird. Gemäß [2], § 1, nimmt die Funktion

$$s_n(x) = \chi_P\big([f(n+x)]\big) = \begin{cases}1 & \text{wenn } [f(n+x)] \text{ Primzahl ist,}\\ 0 & \text{sonst,}\end{cases}$$

auf dem Intervall $[a, b[$ den Wert 1 an genau für die x aus einem der paarweise disjunkten Intervalle

$$I_{p,n}^{a,b} = [f^{-1}(p) - n, f^{-1}(p+1) - n[\; \cap\; [a, b[$$

mit

$$(4)\qquad p \in P_n(a, b) = \{p \in P;\; f(n+a) - 1 < p < f(n+b)\}.$$

Alle diese $I_{p,n}^{a,b}$ bis auf höchstens zwei haben die Länge

$$\mu(I_{p,n}^{a,b}) = \frac{1}{f'(n)} + O_f\Big(\frac{1}{n^k}\Big),$$

und für die beiden eventuell auftretenden Randintervalle ist jedenfalls

$$\mu(I_{p,n}^{a,b}) = O_f\Big(\frac{1}{f'(n)}\Big).$$

Diese Bemerkungen und Formel (3) zeigen

$$(5)\qquad \begin{aligned}&\int_a^b s_n(x)\,dx\\ &\quad = \Big((b-a)\frac{f'(n)}{\log f(n)} + O_f\big((b-a)n^{k-1}\exp(-c\log^{1/4} n) + n^{k-1-\varepsilon}\big)\Big) \times\\ &\qquad\qquad \times\Big(\frac{1}{f'(n)} + O_f\Big(\frac{1}{n^k}\Big)\Big)\\ &\quad = \frac{b-a}{\log f(n)} + O_f\big((b-a)\exp(-c\log^{1/4} n) + n^{-\varepsilon}\big).\end{aligned}$$

Für

$$S_N^{\mathrm{nat}}(x) = \sum_{n=1}^{N} s_n(x) \quad \text{und} \quad \Pi(N) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\log f(n)}$$

folgt daraus mit einem positiven c_1

$$(6)\qquad \int_a^b S_N^{\mathrm{nat}}(x)\,dx = (b-a)\Pi(N) + O_f\big((b-a)N\exp(-c_1\log^{1/4} N) + N^{1-\varepsilon}\big),$$

und das ist formal die Aussage von Lemma 1 aus [2], § 2, für die hier behandelte spezielle Situation. Nun wird, in Analogie zu Lemma 2, $\int_0^1 s_m(x)s_n(x)\,dx$ nach oben abgeschätzt: $s_m(x)$ nimmt den Wert 1 an auf $|P_m(0,1)|$ Intervallen J, und die Länge jedes dieser Intervalle ist nach oben beschränkt durch

$$\frac{1}{f'(m)} + O_f\Big(\frac{1}{m^k}\Big).$$

Die Integrale $\int_J s_n(x)\,dx$ werden abgeschätzt mit (5), wobei dort $b-a$ zu ersetzen ist durch $\mu(J)$. Mit (3) und (4) ergibt sich

$$\int_0^1 s_m(x)s_n(x)\,dx \leqslant \left(\frac{f'(m)}{\log f(m)} + O_f\big(m^{k-1}\exp(-c\log^{1/4} m)\big)\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{f'(m)\log f(n)} + O_f\left(\frac{\exp(-c\log^{1/4} n)}{m^{k-1}} + n^{-\varepsilon} + \frac{1}{m^k\log n}\right)\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{\log f(m)\log f(n)} +$$
$$+O_f\left(\frac{\exp(-c_2\log^{1/4} m)+\exp(-c_2\log^{1/4} n)}{\log m\log n} + \frac{m^{k-1}}{n^{\varepsilon}} + \frac{1}{m\log m\log n}\right),$$

und Summation zeigt für $M \leqslant N$

$$\text{(7)}\qquad \int_0^1 S_M^{\mathrm{nat}}(x) S_N^{\mathrm{nat}}(x)\,dx$$
$$\leqslant \Pi(M)\Pi(N) + O_f\left(\frac{\Pi(M)\Pi(N)}{\exp(c_3\log^{1/4}M)} + M^kN^{1-\varepsilon} + \Pi(N)\log\log M\right).$$

Mit

$$s_f = 2\,\frac{k}{\varepsilon}$$

folgt daraus für

$$T_1(y;x) = \frac{1}{\Pi(y)}\, S_y^{\mathrm{nat}}(x):$$

$$\text{(8)}\qquad \int_0^1 T_1(M;x)\,T_1(N;x)\,dx \leqslant 1 + O_f\big(\exp(-c_3\log^{1/4}M)\big)$$
$$\text{für}\qquad N \geqslant M^{s_f},$$

und das ist das Analogon zu Behauptung 1 im Beweis von Satz 11 aus [2], § 7. Wie dort in Behauptung 2 wird für $s \geqslant s_f$ die C_1-Summe

$$T_2(y,s;x) = \frac{1}{y} \sum_{0\leqslant n\leqslant y-1} T_1\big(\exp(s^n);x\big)$$

gebildet. Für $m<n$ ist nach (8)

$$\int_0^1 T_1\big(\exp(s^m);x\big)T_1\big(\exp(s^n);x\big)\,dx \leqslant 1+O_f\big(\exp(-c_3 s^{m/4})\big),$$

und daraus folgt zusammen mit Hilfssatz 4 (i) aus [2], § 6,

$$\text{(9)}\qquad \int_0^1 T_2(N,s;x)^2\,dx \leqslant 1+O_f(1/N).$$

Andererseits zeigt (6)

$$\int_0^1 T_1\big(\exp(s^n);x\big)\,dx = 1+O_f\big(\exp(-c_4 s^{n/4})\big),$$

und daraus folgt

$$\text{(10)}\qquad \int_0^1 T_2(N,s;x)\,dx = 1+O_f(1/N).$$

(9) und (10) ergeben zusammen mit der Hölderschen Ungleichung

$$\int_0^1 |T_2(N,s;x)-1|\,dx = O_f(1/\sqrt{N}).$$

Das ist Behauptung 2 von [2], § 7. Von hier an läßt sich der Beweis von Satz 11 übernehmen: $T_2(N,s;x)$ wird interpretiert als $S_M^{\psi}(P;x)$ mit einer zunächst komplizierten Wichtung ψ, in den Behauptungen 3 und 4 wird diese Wichtung vereinfacht, in Behauptung 5 dann durch Integration über s geglättet und in Behauptung 6 als harmonische Wichtung mit dem multiplikativen Faktor k erkannt. Behauptung 7 liefert schließlich — unter Verwendung von Lemma 1, und das kann ersetzt werden durch die hier abgeleitete Formel (5) — die Abschätzung

$$\int_0^1\left|\frac{k}{\log\log N}\sum_{n=1}^{N} \frac{\chi_P\big([f(n+x)]\big)}{n} - 1\right|dx = O_f\left(\frac{\log_3^3 N}{\log_2^{1/2}N}\right),$$

aus der auf $D_{\mathrm{har}}^{\mathrm{har}}(P,f)(x) = 1/k$ für fast alle x geschlossen werden kann.

Literaturverzeichnis

[1] M. N. Huxley, *The Distribution of Prime Numbers*, Clarendon Press, Oxford 1972.

[2] F. Roesler, *Über die Verteilung der Primzahlen in Folgen der Form* $[f(n+x)]$, Acta Arith. 35 (1979), S. 117–174.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT
Arcisstraße 21, D-8000 München, GFR

Eingegangen am 8. 2. 1979 (1135)