[17] C. L. Siegel, *Additive Theorie der Zahlenkörper II*, Math. Ann. 88 (1923), pp. 184–210.
[18] R. M. Stemmler, *The easier Waring problem in algebraic number fields*, Acta Arith. 6 (1961), pp. 447–468.
[19] T. Tatuzawa, *On Waring's problem in algebraic number fields*, ibid. 24 (1973), pp. 37–60.
[20] G. Terjanian, *Une contre-exemple à une conjecture d'Artin*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A, 262 (1966), p. 612.
[21] — *Sur la dimension diophantienne des corps p-adiques*, Acta Arith. 34 (1978), pp. 127–130.
[22] A. Tietäväinen, *On a problem of Chowla and Shimura*, J. Number Theory 3 (1971), pp. 247–252.
[23] — *Proof of a conjecture of S. Chowla*, ibid. 7 (1975), pp. 353–356.
[24] A. Weil, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), pp. 497–508.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF YORK
Heslington, York, England

Received on 23.4.1976
and in revised form on 12.7.1979 (843)

ACTA ARITHMETICA
XL (1982)

К одной формуле Зигеля

Т. В. Вепхвадзе (Тбилиси)

§1. Пусть $f = \sum_{1\leqslant k\leqslant j\leqslant m} a_{kj}x_kx_j$ — целочисленная квадратичная форма с индексом инерции n, $S(f,q)$ — соответствующая сумма Гаусса, $d = (-1)^{[m/2]}\det(2f)$ — дискриминант формы f; далее пусть z и τ — комплексные переменные, причем $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Раманатхан [12] доказал, что при $m \geqslant 3$ (за исключением нулевых форм при $m=3$ и нулевых форм, дискриминант которых полный квадрат, при $m=4$) функцию

$$(1)\qquad \Psi_m(\tau, z; f) = 1 + e^{\frac{\pi i(2n-m)}{4}}|d|^{-1/2}\times$$
$$\times \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{\substack{H=-\infty \\ (q,H)=1}}^{\infty} \frac{S(fH, q)}{q^{m/2}(q\tau-H)^{n/2}(q\bar{\tau}-H)^{(m-n)/2}|q\tau-H|^z},$$

регулярную при фиксированном τ и $\operatorname{Re} z > 2-m/2$, можно аналитически продолжить в полную окрестность точки $z=0$. Далее, положив

$$(2)\qquad \theta_m(\tau; f) = \Psi_m(\tau, z; f)|_{z=0},$$

доказал, что при $m \geqslant 3$ имеет место равенство

$$(3)\qquad F_m(\tau; f) = \theta_m(\tau; f),$$

где $F_m(\tau; f)$ — тэта-функция рода формы f (см., напр., [12], стр. 432, формула (38)).

В случае $m > 4$ функция (2) совпадает с рядом Эйзенштейна–Зигеля, а формула (3) — с известной формулой Зигеля ([13], теорема 3).

В упомянутой выше работе Раманатхан утверждает, что в случае положительных и ненулевых неопределенных бинарных квадратичных форм функцию (1) невозможно аналитически продолжить в полную окрестность точки $z=0$.

Однако, в случае положительных диагональных квадратичных форм функция (1) еще ранее была исследована Ломадзе [5], который в работах [5], [6] и [7] при $m = 2$, 3 и 4 нашел ее аналитическое продолжение в полную окрестность точки $z = 0$; в случае произвольных положительных бинарных квадратичных форм аналогичные результаты получены нами в работах [1] и [2].

В настоящей работе мы доказываем, что и в случае ненулевых бинарных квадратичных форм, как положительных, так и неопределенных, функцию $\Psi_2(\tau, z; f)$ можно аналитически продолжить в полную окрестность точки $z = 0$ и показываем, что имеет место равенство

$$F_2(\tau; f) = \tfrac{1}{2}\theta_2(\tau; f).$$

§2. В этом параграфе, для удобства ссылок, в виде лемм будут сформулированы некоторые известные результаты.

Лемма 1 (см., напр., [11], стр. 172, теорема 213). *Всякое $d \equiv 0$ или $1 \pmod 4$, не являющееся полным квадратом, представимо, и притом единственным образом, в виде $d = hg^2$, где $g > 0$ и h — фундаментальный дискриминант.*

Лемма 2 (см., напр., [9], стр. 148 и 155). *Символ Кронекера $\left(\frac{d}{q}\right)$ является характером с основным модулем*

$$k^* = \begin{cases} |h|, & \text{если } h \equiv 1 \pmod 4, \\ 4|h|, & \text{если } h \not\equiv 1 \pmod 4, \end{cases}$$

где h есть свободное от квадратов ядро числа d.

Лемма 3 (см., напр., [10], стр. 33, теорема 12). *Если d — фундаментальный дискриминант, то символ Кронекера $\left(\frac{d}{q}\right)$ для всех натуральных q совпадает с действительным первообразным характером $\chi(q)$, модуль k которого равен $|d|$, причем между числами d и k имеет место соотношение*

$$d = \chi(-1)\cdot k.$$

Лемма 4 (см., напр., [12], стр. 425, 428 и [5], стр. 297). *При $\operatorname{Re} z > 1 - m/2$ интеграл*

$$A(\tau, z, m, n, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i w t}dw}{(\tau + w)^{(n+z)/2}(\bar\tau + w)^{(m-n+z)/2}} \tag{4}$$

сходится абсолютно, причем функция $A(\tau, z, m, n, t)$ обладает следующими свойствами:

1) *если $m = n$ и $t \neq 0$, то она может быть аналитически продолжена во всю z-плоскость и*

$$A(\tau, 0, m, n, t) = \frac{(2\pi)^{m/2} t^{m/2-1} e^{2\pi i \tau t}}{e^{\pi i m/4}\Gamma(m/2)} \quad \text{при } t > 0,$$
$$= 0 \quad \text{при } t < 0;$$

2) *если $m = n$, то $A(\tau, z, m, n, 0)$[*] регулярна в полной окрестности точки $z = 0$ и*

$$A(\tau, 0, 2, 2, 0) = \pi/i;$$

3) *если $n(m-n) \neq 0$, то $A(\tau, z, m, n, t)$ аналитически продолжаема в полную окрестность точки $z = 0$, кроме случая $m = 2$, $n = 1$, $t = 0$. Функция $A(\tau, z, 2, 1, 0)$ имеет полюс в точке $z = 0$, причем*

$$A(\tau, z, 2, 1, 0) = \frac{\pi\Gamma(z)}{\left(\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right)\right)^2 (\operatorname{Im}\tau)^z 2^{z-1}}.$$

Лемма 5 (см., напр., [12], стр. 425). *При $\operatorname{Re} z > 2 - m/2$ функции (1) можно придать следующий вид:*

$$\Psi_m(\tau, z; f) = 1 + e^{\frac{\pi i}{4}(2n-m)}|d|^{-1/2}\sum_{t=-\infty}^{\infty} V_m(t, z; f) A(\tau, z, m, n, t), \tag{5}$$

где

$$V_m(t, z; f) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q(t; f) q^{-z} \tag{6}$$

$$A_q(t; f) = q^{-m} \sum_{h \bmod q}{}' e^{-2\pi i t h/q} S(fh, q). \tag{7}$$

Лемма 6 (см., напр., [12], стр. 425). *Пусть*

$$X_p(t, z; f) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{p^\lambda}(t; f) p^{-\lambda z}. \tag{8}$$

Тогда при $\operatorname{Re} z > 2 - m/2$

$$V_m(t, z; f) = \prod_p X_p(t, z; f).$$

Лемма 7 (см., напр., [10], стр. 92). *Если $\chi = \chi(q)$ первообразный характер по модулю k, то во всей плоскости переменного z, кроме изолированных точек $z = 0, -1, -2, \ldots$ справедливо функциональное уравнение*

$$L(1-z, \chi) = \frac{2k^{z-1/2}\Gamma(z)}{(2\pi)^z}\sin\frac{\pi}{2}z\, L(z, \bar\chi) \quad \text{при } \chi(-1) = -1,$$
$$= \frac{2k^{z-1/2}\Gamma(z)}{(2\pi)^z}\cos\frac{\pi}{2}z\, L(z, \bar\chi) \quad \text{при } \chi(-1) = 1.$$

Лемма 8 (см., напр., [10], стр. 111). *Пусть $\chi=\chi(q)$ характер по модулю k, k^* — его основной модуль и $\chi^*=\chi^*(q)$ — соответствующий первообразный характер по модулю k^*. Тогда между $L(z,\chi)$ и $L(z,\chi^*)$ имеет место соотношение*

$$L(z,\chi)=\prod_{p\mid k,\,p\nmid k^*}\left(1-\chi(p)p^{-z}\right)L(z,\chi^*).$$

Лемма 9 (см., напр., [10], стр. 95). *Имеют место тождества:*

$$\Gamma(z)=2^{z-1}\pi^{-1/2}\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right),$$

$$\sin\frac{\pi}{2}z=\pi\Gamma^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma^{-1}\left(1-\frac{z}{2}\right).$$

В следующих двух леммах приводятся формулы, которые, как частный случай, после длинных, но простых вычислений, получаются из соответствующих формул работы [8] (стр. 61 и 67–68).

Лемма 10. *Пусть p — нечетное простое число,*

$$f=ax^2+bxy+cy^2,\quad d=b^2-4ac,\quad t=p^{\alpha}t_1\quad (\alpha\geqslant 0,\ p\nmid t_1).$$

Тогда

1) *если*

$$f\equiv p^{e_1}(a_1x^2+a_2y^2)\ (\mathrm{mod}\ p^{e_1+1}),\quad e_1\geqslant 0,\ p\nmid a_1a_2, \tag{9}$$

то

11) *когда $\lambda\leqslant e_1$*

$$\begin{aligned}A_{p^\lambda}(t;f)&=(p-1)p^{\lambda-1} && \text{при } \lambda<\alpha+1,\\ &=-p^{\lambda-1} && \text{при } \lambda=\alpha+1,\\ &=0 && \text{при } \lambda>\alpha+1,\end{aligned}$$

12) *когда $\lambda>e_1$*

$$\begin{aligned}A_{p^\lambda}(t;f)&=(p-1)p^{e_1-1}\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)^{\lambda-e_1} && \text{при } \lambda<\alpha+1,\\ &=-p^{e_1-1}\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)^{\lambda-e_1} && \text{при } \lambda=\alpha+1,\\ &=0 && \text{при } \lambda>\alpha+1;\end{aligned}$$

2) *если*

$$f\equiv p^{e_1}a_1x^2+p^{e_2}a_2y^2\ (\mathrm{mod}\ p^{e_2+1}),\quad 0\leqslant e_1<e_2,\ p\nmid a_1a_2, \tag{10}$$

то

21) *когда $\lambda\leqslant e_1$, величины $A_{p^\lambda}(t;f)$ имеют те же значения, что и в случае 11),*

22) *когда $e_1<\lambda\leqslant e_2$*

$$\begin{aligned}A_{p^\lambda}(t;f)&=(p-1)p^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-1} && \text{при } 2\mid\lambda+e_1,\ \lambda<\alpha+1,\\ &=-p^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-1} && \text{при } 2\mid\lambda+e_1,\ \lambda=\alpha+1,\\ &=p^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1-1)}\left(\frac{t_1a_1}{p}\right) && \text{при } 2\nmid\lambda+e_1,\ \lambda=\alpha+1\\ &=0 && \text{при } \lambda>\alpha+1 \text{ и при } 2\nmid\lambda+e_1,\ \lambda<\alpha+1;\end{aligned}$$

23) *когда $\lambda>e_2$*

$$A_{p^\lambda}(t;f)=(p-1)p^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-1}\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)^{\lambda}\left(\frac{a_1}{p}\right)^{e_1}\left(\frac{-a_2}{p}\right)^{e_2}$$

$$\text{при } 2\mid e_1+e_2,\ \lambda<\alpha+1,$$

$$=-p^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-1}\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)^{\lambda}\left(\frac{a_1}{p}\right)^{e_1}\left(\frac{a_2}{p}\right)^{e_2}$$

$$\text{при } 2\mid e_1+e_2,\ \lambda=\alpha+1,$$

$$=\left(\frac{t_1}{p}\right)\left(\frac{a_1a_2}{p}\right)^{\lambda}\left(\frac{a_1}{p}\right)^{e_1}\left(\frac{a_2}{p}\right)^{e_2}p^{\frac{1}{2}(e_1+e_2-1)}$$

$$\text{при } 2\nmid e_1+e_2,\ \lambda=\alpha+1,$$

$$=0\quad \text{при } \lambda>\alpha+1 \text{ и при } 2\nmid e_1+e_2,\ \lambda<\alpha+1.$$

Лемма 11. *Пусть $f=ax^2+bxy+cy^2$, $d=b^2-4ac=2^{\gamma}d_1$ $(\gamma\geqslant 0,\ 2\nmid d_1)$, $t=2^{\beta}t_1$ $(\beta\geqslant 0,\ 2\nmid t_1)$. Тогда*

1) *если*

$$f\equiv 2^{e_1}(2a_1x^2+2b_1xy+2c_1y^2)\ (\mathrm{mod}\ 2^{e_1+3}),\quad 2\nmid 4a_1c_1-b_1^2,\ e_1\geqslant 0, \tag{11}$$

то

11) *когда $\lambda\leqslant e_1$*

$$\begin{aligned}A_{2^\lambda}(t;f)&=2^{\lambda-1} && \text{при } \lambda\leqslant\beta,\\ &=-2^{\lambda-1} && \text{при } \lambda=\beta+1,\\ &=0 && \text{при } \lambda>\beta+1,\end{aligned}$$

12) *когда* $\lambda \geqslant e_1+1$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = 2^{e_1}\left(\frac{2}{|d_1|}\right)^{\lambda-e_1-1} \qquad \text{при } \lambda \leqslant \beta,$$

$$= -2^{e_1}\left(\frac{2}{|d_1|}\right)^{\lambda-e_1-1} \qquad \text{при } \lambda = \beta+1,$$

$$= 0 \qquad \text{при } \lambda > \beta+1;$$

2) *если*

$$f \equiv 2^{e_1}(a_1x^2+a_2y^2)(\bmod 2^{e_1+3}), \quad e_1 \geqslant 0,\ 2 \nmid a_1a_2, \tag{12}$$

то

21) *когда* $\lambda \leqslant e_1$ *величины* $A_{2^\lambda}(t;f)$ *имеют те же значения, что и в случае* 1),

22) *когда* $\lambda = e_1+1$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = 0,$$

23) *когда* $\lambda > e_1+1$, $a_1a_2 \equiv 1 \pmod 4$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = (-1)^{\frac{1}{2}(t_1-a_1)}\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda-e_1} 2^{e_1} \qquad \text{при } \lambda = \beta+2,$$

$$= 0 \qquad \text{при } \lambda \neq \beta+2,$$

24) *когда* $\lambda > e_1+1$, $a_1a_2 \equiv 3 \pmod 4$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = \left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda-e_1} 2^{e_1} \qquad \text{при } \lambda \leqslant \beta,$$

$$= -\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda-e_1} 2^{e_1} \qquad \text{при } \lambda = \beta+1,$$

$$= 0 \qquad \text{при } \lambda \geqslant \beta+2;$$

3) *если*

$$f \equiv 2^{e_1}a_1x^2+2^{e_2}a_2y^2(\bmod 2^{e_2+3}), \quad e_1 \geqslant 0,\ e_2 > e_1,\ 2 \nmid a_1a_2, \tag{13}$$

то

31) *когда* $\lambda \leqslant e_1+1$ *величины* $A_{2^\lambda}(t;f)$ *имеют те же значения, что и в случае* 2),

32) *когда* $\lambda = e_2+1$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = 0,$$

33) *когда* $e_1+1 < \lambda \leqslant e_2$, $2 | \lambda+e_1$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = 2^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-1} \qquad \text{при } \lambda < \beta+1,$$

$$= -2^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-1} \qquad \text{при } \lambda = \beta+1,$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}(t_1-a_1)} 2^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-1} \qquad \text{при } \lambda = \beta+2,$$

$$= 0 \qquad \text{при } \lambda > \beta+2,$$

34) *когда* $e_1+1 < \lambda \leqslant e_2$, $2 | \lambda - e_1$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = 2^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1-1)}(-1)^{\frac{1}{4}(t_1-a_1)} \qquad \text{при } \lambda = \beta+3,\ t_1 \equiv a_1 \pmod 4,$$

$$= 0 \qquad \text{в остальных случаях,}$$

35) *когда* $\lambda > e_2+1$, $2 | e_1+e_2$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = \left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda}\left(\frac{2}{|a_1|}\right)^{e_1}\left(\frac{2}{|a_2|}\right)^{e_2} 2^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)}$$

$$\text{при } \lambda < \beta+1,\ a_1 \equiv -a_2 \pmod 4,$$

$$= -\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda}\left(\frac{2}{|a_1|}\right)^{e_1}\left(\frac{2}{|a_2|}\right)^{e_2} 2^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)}$$

$$\text{при } \lambda = \beta+1,\ a_1 \equiv -a_2 \pmod 4,$$

$$= (-1)^{\frac{t_1-a_1}{2}}\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda}\left(\frac{2}{|a_1|}\right)^{e_1}\left(\frac{2}{|a_2|}\right)^{e_2} 2^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)}$$

$$\text{при } \lambda = \beta+2,\ a_1 \equiv a_2 \pmod 4,$$

$$= 0 \qquad \text{в остальных случаях,}$$

36) *когда* $\lambda > e_2+1$, $2 \nmid e_1+e_2$

$$A_{2^\lambda}(t;f) = \left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda}\left(\frac{2}{t_1}\right)\left(\frac{2}{|a_1|}\right)^{e_1}\left(\frac{2}{|a_2|}\right)^{e_2} 2^{\frac{1}{2}(e_1+e_2-1)}$$

$$\text{при } \lambda = \beta+3,\ t_1 \equiv a_1 \text{ или } a_2 \pmod 4,$$

$$= -\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda}\left(\frac{2}{t_1}\right)\left(\frac{2}{|a_1|}\right)^{e_1}\left(\frac{2}{|a_2|}\right)^{e_2} 2^{\frac{1}{2}(e_1+e_2-1)}$$

$$\text{при } \lambda = \beta+3,\ t_1 \not\equiv a_1 \equiv a_2 \pmod 4,$$

$$= 0 \qquad \text{в остальных случаях.}$$

Лемма 12 (см., напр., [8], стр. 15). *Пусть p — простое число. Для любой бинарной квадратичной формы $f = ax^2+bxy+cy^2$ найдется эквивалентная ей форма, удовлетворяющая одному из условий* (9) *или* (10) *в случае $p > 2$ и* (11), (12) *или* (13) *в случае $p = 2$.*

§3. Всюду в дальнейшем $f = ax^2+bxy+cy^2$ — ненулевая бинарная квадратичная форма, $d = b^2-4ac$ — дискриминант этой формы.

Теорема 1. *Функцию $V_2(0, z; f)$, определенную формулами* (6) *и* (7), *можно аналитически продолжить в полную окрестность точки $z = 0$.*

Доказательство. Согласно лемме 6, при $\operatorname{Re} z > 1$ имеем

$$V_2(0, z; f) = \prod_{p|2d} X_p(0, z; f) \prod_{p\nmid 2d} X_p(0, z; f). \tag{14}$$

Пусть $p \nmid d$ $(p > 2)$. Согласно лемме 12, без ограничения общности можно предположить, что

$$f \equiv a_1 x^2 + a_2 y^2 \pmod{p},$$

где

$$p \nmid a_1, \quad p \nmid a_2, \quad d \equiv -4a_1a_2 \pmod{p}.$$

Тогда, согласно (8) и лемме 10, получим

$$\prod_{p\nmid 2d} X_p(0, z; f) = \prod_{p\nmid 2d}\left(1 + \sum_{\lambda=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{d}{p}\right)^{\lambda} p^{-\lambda z}\right) = $$
$$= \prod_{p\nmid 2d} \frac{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-1-z}}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-z}},$$

т.е.

$$\prod_{p\nmid 2d} X_p(0, z; f) = \frac{L(z, \chi)}{L(1+z, \chi)} \qquad \text{при } 2|d, \tag{15}$$
$$= \frac{L(z, \chi)}{L(1+z, \chi)} \cdot \frac{1-\chi(2)2^{-z}}{1-\chi(2)2^{-1-z}} \qquad \text{при } 2\nmid d,$$

здесь $\chi = \chi(q) = \left(\frac{d}{q}\right)$ и $\chi(2) = \left(\frac{d}{2}\right)$ являются символами Кронекера.

Пусть $p|d$ $(p > 2)$. Тогда, согласно лемме 12, без ограничения общности можно предположить, что форма f удовлетворяет одному из двух условий (9) или (10) леммы 10. Следовательно, согласно (8), при условии (9)

(16)

$$X_p(0, z; f) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{e_1}(p-1)p^{\lambda-1}p^{-\lambda z} + \sum_{\lambda=e_1+1}^{\infty}(p-1)p^{e_1-1}\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)p^{-\lambda z} =$$
$$= 1 + \sum_{\lambda=1}^{e_1}(p-1)p^{\lambda-1}p^{-\lambda z} + \frac{(p-1)p^{e_1-1}\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)p^{-(e_1+1)z}}{1-\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)p^{-z}},$$

а при условии (10)

$$X_p(0, z; f) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{e_1}(p-1)p^{\lambda(1-z)-1} + \sum_{\substack{\lambda=e_1+1\\ 2|\lambda-e}}^{e_2}(p-1)p^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-1}p^{-\lambda z} \tag{17}$$

когда $2 \nmid e_1 + e_2$

и

$$X_p(0, z; f) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{e_1}(p-1)p^{\lambda(1-z)-1} + \sum_{\substack{\lambda=e_1+1\\ 2|\lambda-e_1}}^{e_2}(p-1)p^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-1}p^{-\lambda z} + \tag{18}$$
$$+ \sum_{\lambda=e_2+1}^{\infty}(p-1)p^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-1}\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)^{\lambda}\left(\frac{a_1}{p}\right)^{e_1}\left(\frac{a_2}{p}\right)^{e_2}p^{-\lambda z} =$$
$$= 1 + \sum_{\lambda=1}^{e_1}(p-1)p^{\lambda(1-z)-1} + \sum_{\substack{\lambda=e_1+1\\ 2|\lambda-e_1}}^{e_2}(p-1)p^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-1}p^{-\lambda z} +$$
$$+ \frac{(p-1)p^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-1}\left(\frac{a_1}{p}\right)^{e_1}\left(\frac{-a_2}{p}\right)^{e_2}\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)^{e_2+1}p^{-(e_2+1)z}}{1-\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right)p^{-z}}$$

когда $2|e_1+e_2$.

Согласно формулам (16)–(18), функция $X_p(0, z; f)$ при $p > 2$ регулярна в полной окрестности точки $z = 0$, за исключением случая, когда $\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right) = 1$ при условии (9) и $\left(\frac{-a_1a_2}{p}\right) = 1$, $2|e_1+e_2$ при условии (10), т.е. если $p^e \| d$ то $2|e$ и $\left(\frac{p^{-e}d}{p}\right) = 1$. В этом случае она имеет простой полюс в точке $z = 0$.

Пусть теперь $p = 2$ и $d = 2^{\gamma}d_1$ $(\gamma \geqslant 0,\ 2\nmid d_1)$. Тогда, согласно (6), (7) и лемме 12, без ограничения общности можно предположить, что форма f удовлетворяет одному из трех условий (11), (12) или (13) леммы 11. Следовательно, согласно (8), при условии (11)

$$X_2(0, z; f, = 1 + \sum_{\lambda=1}^{e_1}2^{\lambda(1-z)-1} + 2^{e_1}\sum_{\lambda=e_1+1}^{\infty}\left(\frac{2}{|d_1|}\right)^{\lambda-e_1-1}2^{-\lambda z} = \tag{19}$$
$$= 1 + \sum_{\lambda=1}^{e_1}2^{\lambda(1-z)-1} + 2^{e_1}\frac{2^{-z(e_1+1)}}{1-\left(\frac{2}{|d_1|}\right)2^{-z}}$$

когда $e_1 \geqslant 0$

и

$$(20)\qquad X_2(0,z;f)=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}2^{-\lambda}\left(\frac{2}{|d_1|}\right)^{\lambda-z}2^{-\lambda z}=$$

$$=1+\frac{2^{-1}\left(\frac{2}{|d_1|}\right)2^{-z}}{1-\left(\frac{2}{|d_1|}\right)2^{-z}}=\frac{1-\left(\frac{2}{|d_1|}\right)2^{-1-z}}{1-\left(\frac{2}{|d_1|}\right)2^{-z}}$$

когда $e_1=-1$,

при условии (12)

$$(21)\qquad X_2(0,z;f)=1+\sum_{\lambda=1}^{e_1}2^{\lambda-1}2^{-\lambda z}+2^{e_1}\sum_{\lambda=e_1+2}^{\infty}\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda-e_1}2^{-\lambda z}=$$

$$=1+\sum_{\lambda=1}^{e_1}2^{\lambda(1-z)-1}+2^{e_1}\frac{2^{-z(e_1+2)}}{1-\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)2^{-z}}$$

когда $a_1a_2\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$

и

$$(22)\qquad X_2(0,z;f)=1+\sum_{\lambda=1}^{e_1}2^{\lambda(1-z)-1}\quad \text{когда}\quad a_1a_2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4),$$

а при условии (13)

$$(23)\qquad X_2(0,z;f)=1+\sum_{\lambda=1}^{e_1}2^{\lambda(1-z)-1}+\sum_{\substack{\lambda=e_1+2\\ 2|\lambda+e_1}}^{e_2}2^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-\lambda z-1}$$

когда $2|e_1+e_2$, $a_1a_2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$ или когда $2\nmid e_1+e_2$

и

$$(24)\qquad X_2(0,z;f)=1+\sum_{\lambda=1}^{e_1}2^{\lambda(1-z)-1}+\sum_{\substack{\lambda=e_1+2\\ 2|\lambda+e_1}}^{e_2}2^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-\lambda z-1}+$$

$$+\sum_{\lambda=e_2+2}^{\infty}\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)^{\lambda}\left(\frac{2}{|a_1|}\right)^{e_1}\left(\frac{2}{|a_2|}\right)^{e_2}2^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)-\lambda z}=$$

$$=1+\sum_{\lambda=1}^{e_1}2^{\lambda(1-z)-1}+\sum_{\substack{\lambda=e_1+2\\ 2|\lambda+e_1}}^{e_2}2^{\frac{1}{2}(\lambda+e_1)-\lambda z-1}+2^{\frac{1}{2}(e_1+e_2)}\frac{2^{-z(e_2+2)}}{1-\left(\frac{2}{|a_1a_2|}\right)2^{-z}}$$

когда $2|e_1+e_2$, $a_1a_2\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 4)$.

Согласно формулам (19)–(24), функция $X_2(0,z;f)$ является регулярной функцией в полной окрестности точки $z=0$, за исключением случая, когда при $d=2^{\gamma}d_1$, $2\nmid d_1$ имеем: $2|\gamma$ и $d_1\equiv 7\ (\mathrm{mod}\ 8)$.

В этом случае она имеет простой полюс в точке $z=0$.

Теперь покажем, что несмотря на то, что функции $X_p(0,z;f)$ могут иметь простые полюсы в точке $z=0$, функция $V_2(0,z;f)$ все же аналитически продолжаема в полную окрестность точки $z=0$. С этой целью следуя Ломадзе ([5], стр. 294–297), исследовавшего лишь положительные диагональные квадратичные формы, рассмотрим в отдельности два случая в зависимости от того d является или не является фундаментальным дискриминантом.

а) Пусть d — фундаментальный дискриминант. Тогда в силу леммы 3 символ Кронекера $\left(\frac{d}{q}\right)$ для всех натуральных q будет совпадать с некоторым первообразным характером $\chi^*(q)$, модуль которого равен $|d|$.

Так как d является фундаментальным дискриминантом, то он не делится ни на какой квадрат нечетного простого числа. Поэтому, согласно лемме 12, форма f удовлетворяет условию (10) леммы 10, при этом $e_1=0$ и $e_2=1$. Следовательно, согласно (17), имеем

$$(25)\qquad X_p(0,z;f)=1.$$

Если $2|d$, то $d\equiv 8$ или $12\ (\mathrm{mod}\ 16)$, т.е. $d/4\equiv 2$ или $3\ (\mathrm{mod}\ 4)$. Следовательно, или $d/4$ — удвоенное нечетное число или $d/4$ — нечетное число.

В первом случае, согласно лемме 12, форма f удовлетворяет условию (13) леммы 11, при этом $e_1=0$ и $e_2=1$. Во втором случае, согласно лемме 12, форма f удовлетворяет условию (12) леммы 11, при этом $e_1=0$ и $a_1a_2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 4)$. Поэтому, согласно формулам (23) и (22), имеем

$$(26)\qquad X_2(0,z;f)=1.$$

Далее, если $2\nmid d$, то, согласно лемме 12, форма f удовлетворяет условию (11) леммы 11, при этом $e_1=-1$. Следовательно, согласно (20), имеем

$$(27)\qquad X_2(0,z;f)=\frac{1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{-1-z}}{1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{-z}}.$$

Из (14), (15) и (25)–(27) получаем, что

$$(28)\qquad V_2(0,z;f)=\frac{L(z,\chi^*)}{L(1+z,\chi^*)}.$$

б) Пусть теперь d не является фундаментальным дискриминантом. Тогда, согласно лемме 1, будет иметь место единственное представление

$$d = hg^2, \tag{29}$$

где $g>0$ и h — фундаментальный дискриминант. Согласно лемме 3, символ Кронекера $\left(\frac{h}{q}\right)$ для всех натуральных q будет совпадать с некоторым первообразным характером $\chi^*(q)$ по модулю $|h|$, причем

$$\chi^*(-1) = -1 \text{ при } h<0 \quad \text{и} \quad \chi^*(-1) = 1 \text{ при } h>0.$$

Символ Кронекера $\left(\frac{d}{q}\right)$ для всех натуральных q будет совпадать с некоторым производным характером $\chi(q)$ по модулю $|d|$, основным модулем которого, согласно лемме 2, будет $|h|$, а соответствующим первообразным характером $\chi^*(q)$. Следовательно, согласно лемме 8, будем иметь

$$\begin{aligned} L(z,\chi) &= \prod_{p|d,\, p\nmid h}\bigl(1-\chi^*(p)p^{-z}\bigr)L(z,\chi^*),\\ L(1+z,\chi) &= \prod_{p|d,\, p\nmid h}\bigl(1-\chi^*(p)p^{-1-z}\bigr)L(1+z,\chi^*). \end{aligned} \tag{30}$$

Здесь имеем

$$\begin{aligned} \chi^*(p) &= 0 && \text{при } p>2,\ p^e\|d,\ 2\nmid e,\\ &= \left(\frac{p^{-e}d}{p}\right) && \text{при } p>2,\ p^e\|d,\ 2|e. \end{aligned} \tag{31}$$

Действительно, для простых p из первой строки, согласно (29), имеем: $p|h$, т.е. $\chi^*(p)=0$. Далее, так как h фундаментальный дискриминант, то он не делится ни на какой квадрат нечетного p. Следовательно, для простых p из второй строки, согласно (29), имеем: $p^e|g^2$, $p\nmid h$. Таким образом,

$$\left(\frac{p^{-e}d}{p}\right) = \left(\frac{p^{-e}hg^2}{p}\right) = \left(\frac{h}{p}\right) = \chi^*(p).$$

Теперь рассмотрим в отдельности следующие подслучаи:

1) Пусть $d = 2^\gamma d_1$, $2\nmid\gamma$ или $2|\gamma$, $d_1\equiv 3 \pmod 4$, т.е. $\gamma>0$. Тогда всегда $2|h$. В первом случае это непосредственно следует из (29), откуда даже следует, что $8\|h$. Если бы во втором случае $2\nmid h$, то из $d_1\equiv 3 \pmod 4$ и (29) следовало бы $h\equiv 3 \pmod 4$, что невозможно, ибо h является фундаментальным дискриминантом; в этом случае

даже $h\equiv 12 \pmod{16}$, ибо сравнение $h\equiv 8 \pmod{16}$ невозможно, т.е. $4\|h$. Итак, $2|h$, и, как было показано выше, $p\nmid h$ при $p>2$, $p^e\|d$, $2|e$.

Таким образом, из (14), (15), (30) и (31) получим

$$V_2(0,z;f) = X_2(0,z;f)\prod_{\substack{p^e\|d\\ p>2,\,2\nmid e}} X_p(0,z;f)\prod_{\substack{p^e\|d\\ p>2,\,2|e\\ p\nmid h}} X_p(0,z;f)\times \tag{32}$$
$$\times\prod_{\substack{p^e\|d\\ p>2,\,2|e\\ p\nmid h}}\frac{1-\left(\frac{p^{-e}d}{p}\right)p^{-z}}{1-\left(\frac{p^{-e}d}{p}\right)p^{-1-z}}\cdot\frac{L(z,\chi^*)}{L(1+z,\chi^*)}.$$

Здесь функция $X_2(0,z;f)$ имеет вид (22) или (23). Действительно, в рассматриваемом случае форма f удовлетворяет одному из условий (12) или (13) леммы 11; при условии (12) — $2e_1 = \gamma-2$ и $a_1a_2\equiv 1 \pmod 4$, а при условии (13) — $e_1+e_2 = \gamma-2$, $2|e_1+e_2$ и $a_1a_2\equiv 1 \pmod 4$ или $2\nmid e_1+e_2$ и $e_1+e_2=\gamma-2$. Функции $X_p(0,z;f)$ при $p>2$, $p^e\|d$, $2\nmid e$ имеют вид (17), а при $p>2$, $p^e\|d$, $2|e$ — вид (16) или (18). В самом деле, в первом случае форма f удовлетворяет условию (10) леммы 10, причем $e_1+e_2=e$; во втором же случае — одному из условий (9) или (10), причем $2e_1 = e$ и $-a_1a_2\equiv p^{-e}d \pmod p$ при условии (9) и $e_1+e_2=e$ и $-a_1a_2\equiv p^{-e}d \pmod p$ при условии (10).

Следовательно, согласно (32), функция $V_2(0,z;f)$ аналитически продолжаема в полную окрестность точки $z=0$.

2) Пусть $d = 2^\gamma d_1$, $2|\gamma$, $\gamma>0$, $d_1\equiv 1 \pmod 4$. Тогда $2\nmid h$, $\chi^*(2) = \left(\frac{h}{2}\right) = \left(\frac{d_1}{2}\right)$ и, как было показано выше, $p\nmid h$ при $p>2$, $p^e\|d$, $2|e$.

Таким образом, из (14), (15), (10) и (31) получим

$$V_2(0,z;f) = X_2(0,z;f)\prod_{\substack{p^e\|d\\ p>2,\,2\nmid}} X_p(0,z;f)\prod_{\substack{p^e\|d\\ p>2,\,2|e\\ p\nmid h}} X_p(0,z;f)\times \tag{33}$$
$$\times\prod_{\substack{p^e\|d\\ p>2,\,2|e\\ p\nmid h}}\frac{1-\left(\frac{p^{-e}d}{p}\right)p^{-z}}{1-\left(\frac{p^{-e}d}{p}\right)p^{-1-z}}\cdot\frac{1-\left(\frac{d_1}{2}\right)2^{-z}}{1-\left(\frac{d_1}{2}\right)2^{-1-z}}\cdot\frac{L(z,\chi^*)}{L(1+z,\chi^*)},$$

где $X_2(0,z;f)$ имеет вид (19), (21) или (24), ибо в рассматриваемом случае форма f удовлетворяет одному из условий (11), (12) или (13) леммы 11, причем $2e_1 = \gamma-2\geqslant 0$ при условии (11), $2e_1=\gamma-2$, $a_1a_2\equiv -d_1 \pmod 8$, т.е. $a_1a_2\equiv 3 \pmod 4$ при условии (12) и $e_1+e_2=\gamma-2$,

$a_1a_2 \equiv -d_1 \pmod 8$, т.е. $a_1a_2 \equiv 3 \pmod 4$ при условии (13); функции $X_p(0, z; f)$ имеют тот же вид, что и в случае 1).

Следовательно, функция $V_2(0, z; f)$ и в этом случае аналитически продолжаема в полную окрестность точки $z = 0$.

3) Пусть теперь $2 \nmid d$. Тогда $2 \nmid h$ и $\chi^*(2) = \left(\frac{d}{2}\right)$. Таким образом, из (14), (15), (30) и (31) получим

$$V_2(0, z; f) = X_2(0, z; f) \prod_{\substack{p^e \| d \\ p>2,\, 2\nmid e}} X_p(0, z; f) \prod_{\substack{p^e\|d \\ p>2,\, 2|e \\ p\nmid h}} X_p(0, z; f) \times$$
$$\times \prod_{\substack{p^e\|d \\ p>2,\, 2|e \\ p\nmid h}} \frac{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-z}}{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-1-z}} \cdot \frac{1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{-z}}{1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{-1-z}} \cdot \frac{L(z, \chi^*)}{L(1+z, \chi^*)}, \tag{34}$$

где $X_2(0, z; f)$ имеет вид (20), ибо в рассматриваемом случае форма f удовлетворяет условию (11) леммы 11, причем $e_1 = -1$, а функции $X_p(0, z; f)$ имеют тот же вид, что и в случае 1). Следовательно, функция $V_2(0, z; f)$ и в этом случае аналитически продолжаема в полную окрестность точки $z = 0$.

Теорема 2. *Функция $\Psi_2(\tau, z; f)$, определенная при* $\mathrm{Re}\, z > 1$ *формулой* (1), *аналитически продолжаема в полную окрестность точки* $z = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 1, дискриминант формы f можно единственным образом представить в виде $d = hg^2$, где $g > 0$ и h — фундаментальный дискриминант.

Пусть $d = 2^\gamma d_1$ $(\gamma \geqslant 0,\ 2 \nmid d_1)$. Тогда, как было замечено выше, $8\|h$ при $2\nmid\gamma$, $4\|h$ при $2|\gamma$, $d_1 \equiv 3 \pmod 4$ и $2\nmid h$ при $2|\gamma$, $d_1 \equiv 1 \pmod 4$. Следовательно, имеем

$$g^2 = 2^{\gamma^*} \prod_{\substack{p^e\|d \\ p>2,\, 2\nmid e}} p^{e-1} \prod_{\substack{p^e\|d \\ p>2,\, 2|e}} p^e, \tag{35}$$

где $\gamma^* = \gamma - 3$ при $2\nmid\gamma$, $\gamma^* = \gamma - 2$ при $2|\gamma$, $d_1 \equiv 3 \pmod 4$ и $\gamma^* = \gamma$ при $d_1 \equiv 1 \pmod 4$.

Далее, написав в лемме 7 z вместо $1-z$ и приняв во внимание лемму 3, во всей плоскости переменного z, кроме точек $z = 1, 2, \ldots$, при $d < 0$ будет выполняться равенство

$$L(z, \chi^*) = 2^z \pi^{-1+z} |h|^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(1-z) \cos\frac{\pi}{2} z\, L(1-z, \chi^*), \tag{36}$$

а при $d > 0$, согласно лемме 9, — равенство

$$L(z, \chi^*) = 2^z \pi^{-1+z} h^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(1-z) \sin\frac{\pi}{2} z\, L(1-z, \chi^*) =$$
$$= 2^{2z-1} \pi^{z-\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}-z} \Gamma^{-1}\left(1-\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) \Gamma^{-1}(z) L(1-z, \chi^*).$$

Из последнего равенства, согласно лемме 4, при $d > 0$, $z \neq 1, 2, \ldots$ следует, что

$$\frac{L(z, \chi^*)}{L(1+z, \chi^*)} A(\tau, z, 2, 1, 0) =$$
$$= \frac{L(1-z, \chi^*)}{L(1+z, \chi^*)} 2^z h^{\frac{1}{2}-z} \pi^{z+\frac{1}{2}} \Gamma^{-1}\left(1-\frac{z}{2}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1+z}{2}\right) (\mathrm{Im}\,\tau)^{-z}. \tag{37}$$

Функция

$$V_2(0, z; f) A(\tau, z, 2, n, 0)$$

аналитически продолжаема в полную окрестность точки $z = 0$ и в произвольной ограниченной достаточно малой окрестности D точки $z = 0$

$$V_2(0, z; f) A(\tau, z, 2, n, 0) = O(1).$$

При $n = 2$, т.е. $d < 0$, это следует из теоремы 1 и леммы 4, а при $n = 1$, т.е. $d > 0$, — из формул (14), (15) и (37).

Следовательно, согласно (32)–(37), (16)–(18), (19)–(24) и лемме 4,

$$V_2(0, z; f) A(\tau, z, 2, n, 0)|_{z=0} = g \frac{L(z, \chi^*)}{L(1+z, \chi^*)} A(\tau, z, 2, n, 0)|_{z=0} =$$
$$= \begin{cases} g \dfrac{|h|^{1/2}}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{i} & \text{при } d < 0, \\ g h^{1/2} \pi^{-1/2} \Gamma^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) & \text{при } d > 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$V_2(0, z; f) A(\tau, z, 2, n, 0)|_{z=0} = \begin{cases} -i|d|^{1/2} & \text{при } d < 0, \\ d^{1/2} & \text{при } d > 0. \end{cases} \tag{38}$$

В работе [12] (стр. 429) показано, что функция

$$V_2(t, z; f) A(\tau, z, 2, n, t)$$

при $t \neq 0$ также регулярна в D и в этой области

$$V_2(t, z; f) A(\tau, z, 2, n, t) = O(|t|^\lambda e^{-\delta t}), \quad \delta > 0,\ |t| \to \infty.$$

Таким образом, ряд $\sum_{t=-\infty}^{\infty} V_2(t, z; f) A(\tau, z, 2, n, t)$ абсолютно и равномерно сходится в D и является в этой области регулярной функцией от z. Следовательно, согласно (5),

$$1+e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}|d|^{-1/2}\sum_{t=-\infty}^{\infty} V_2(t, z; f) A(\tau, z, 2, n, t)$$

является искомым аналитическим продолжением функции $\Psi_2(\tau, z; f)$ в полную окрестность точки $z=0$.

Так как функция $\Psi_2(\tau, z; f)$ регулярна в точке $z=0$, то положив

$$\theta_2(\tau; f) = \Psi_2(\tau, z; f)|_{z=0},$$

согласно (38) и лемме 4, получим

$$\theta_2(\tau; f) = 2+\frac{2\pi}{|d|^{1/2}}\sum_{t=1}^{\infty} V_2(t, 0; f) e^{2\pi i \tau t} \qquad \text{в случае } d<0,$$

$$= 2+\frac{1}{d^{1/2}}\sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} V_2(t, 0; f) A(\tau, 0, 2, 1, t) \qquad \text{в случае } d>0.$$

Применяя леммы 10 и 11 и рассуждая так же, как и в работе [5] (стр. 292), можно показать, что в случае $t \neq 0$ в области D имеем:

$$V_2(t, z; f) = X_2(t, z; f)\prod_{\substack{p|dt \\ p>2}} X_p(t, z; f)\prod_{\substack{p\nmid dt \\ p>2}}\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-1-z}\right)^{-1}\cdot\frac{1}{L(1+z, \chi)}.$$

Отсюда, согласно (8) и лемме 10, так же, как и в работе [5] (стр. 30), получаем, что

$$V_2(t, 0; f) = \prod_p X_p,$$

где

$$X_p = X_p(t, 0; f);$$

согласно (8), значения величин X_p можно вычислить по формулам (10)–(13) и (28)–(33) главы 3 работы [8].

Таким образом,

$$\theta_2(\tau; f) = 2+\frac{2\pi}{|d|^{1/2}}\sum_{t=1}^{\infty}\prod_p X_p e^{2\pi i \tau t} \qquad \text{при } d<0, \tag{39}$$

$$= 2+\frac{1}{d^{1/2}}\sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty}\prod_p X_p A(\tau, 0, 2, 1, t) \qquad \text{при } d>0.$$

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$F_2(\tau; f) = \tfrac{1}{2}\theta_2(\tau; f). \tag{40}$$

Доказательство. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_l$ — полная система представителей эквивалентных форм, принадлежащих роду формы $f=f_1$, $\mu(f_j)$ — мера группы единиц формы f_j, $\mu(t, f_j)$ — мера представлений числа t формой f_j,

$$a(t, f) = \sum_{j=1}^{l}\mu(t, f_j)\Big(\sum_{j=1}^{l}\mu(f_j)\Big)^{-1}$$

(см., напр., [12], стр. 431–432). Тогда как известно (см., напр., [12], стр. 432), функции $F_2(\tau; f)$ можно придать следующий вид

$$F_2(\tau; f) = 1+e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}|d|^{-1/2}\sum_{\substack{t=-\infty \\ t\neq 0}}^{\infty} a(t, f) A(\tau, 0, 2, n, t). \tag{41}$$

Далее, применяя формулы (41) и (39) и рассуждая так же, как и Раманатхан [12] при доказательстве формулы (3), получаем формулу (40).

В частном случае, а именно в случае положительно определенных примитивных квадратичных форм, формула (40) арифметическим путем доказана в работах [3] и [4].

Литература

[1] Т. В. Вепхвадзе, *О представлении чисел положительными гауссовыми бинарными квадратичными формами*, Труды Тбилисского мат. ин-та 40 (1971), стр. 25–58.

[2] — *О представлении чисел положительными бинарными квадратичными формами нечетного дискриминанта*, ibid. 45 (1974), стр. 5–40.

[3] — *Об арифметическом смысле сингулярного ряда положительных бинарных квадратичных форм*, ibid. 45 (1974), стр. 60–77.

[4] — *О количестве представлений чисел родами положительных бинарных квадратичных форм*, ibid. 57 (1977), стр. 29–39.

[5] Г. А. Ломадзе, *О представлении чисел положительными бинарными квадратичными формами*, Мат. сб. 68 (2) (1965), стр. 282–312.

[6] — *О представлении чисел положительными тернарными диагональными квадратичными формами*, Acta Arith. 19 (1971), стр. 267–305; 387–407.

[7] — *О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными*, Труды Тбилисского гос. ун-та 76 (1959), стр. 107–159.

[8] А. В. Малышев, *О представлении целых чисел положительными квадратичными формами*, Труды мат. ин-та им. В. А. Стеклова 65 (1962), стр. 1–312.

[9] Г. Хассе, *Лекции по теории чисел*, перевод с немецкого В. Б. Демьянова, Москва 1953.

[10] Н. Г. Чудаков, *Введение в теорию L-функций Дирихле*, Москва–Ленинград 1947.
[11] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Band 1, Leipzig 1927.
[12] K. G. Ramanathan, *On the analytic theory of quadratic forms*, Acta Arith. 21 (1972), стр. 423–436.
[13] C. L. Siegel, *Über die Analytische Theorie der quadratischen Formen*, Ann. of Math. 36 (1935), стр. 527–606.

Поступило 22. 6. 1978 (1083)

ACTA ARITHMETICA
XL (1982)

On a certain infinite series for a periodic arithmetical function

by

TADASHIGE OKADA (Hachinohe, Japan)

1. Introduction. Let $q \geqslant 2$ be an integer and let f be a function defined on the ring of integers $\boldsymbol{Z}$ with period q. Then Baker, Birch and Wirsing proved that if f satisfies the three conditions (A), (B) and (C) below, then $f = 0$ ([2], Theorem 1).

$$\text{(A)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} = 0.$$

(B) $f(1), \ldots, f(q)$ are algebraic and Φ_q is irreducible over $\boldsymbol{Q}\big(f(1), \ldots, f(q)\big)$, where Φ_q denotes the qth cyclotomic polynomial and $\boldsymbol{Q}$ denotes the field of rationals.

(C) $f(r) = 0$ if $1 < (r, q) < q$.

This resolved in the negative a well-known problem of Chowla as to whether there exists a rational-valued function f periodic with prime period for which (A) holds.

The main purpose of this note is to prove a result which provides a description of all functions f such that (A) and (B) hold. It can be stated as follows: If f satisfies (B), then (A) holds if and only if $\big(f(1), \ldots, f(q)\big)$ is a solution of a certain system of $\varphi(q)+t(q)$ homogeneous linear equations with rational coefficients, where $t(q)$ denotes the number of primes dividing q (see Theorem 10 for the precise statement). Thus, in particular, it reveals that if $2\varphi(q)+1 > q$ and $f(n) \in \{1, -1\}$ when $n = 1, \ldots, q-1$ and $f(q) = 0$, then

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \neq 0$$

whenever the series is convergent (Corollary 16). This gives a partial answer for a conjecture of Erdös ([4], p. 430).