positives. Un sous-produit du programme de J. L. Nicolas est le suiva les cinq entiers

92763, 4914963, 7559299, 9945963, 16308963

ont des sommes trois à trois qui sont des carrés et c'est la plus pet solution.

**Bibliographie**


[1] T. Baker, The Gentleman's Diary, or Math. Repository, London, 1838, 85 Quest 1360.

[2] P. Erdös, *Quelques problèmes de la théorie des nombres*, Monographie de l'en gnement mathématique, Genève, n° 6, p. 81–135.

[3] C. Gill, *Applications of the angular analysis to indeterminate problems of degre* New-York, 1848, p. 60.

[4] J. Lagrange, *Cinq nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés*, Sémin de théorie des nombres Delange–Pisot–Poitou, Paris, 12ème année (1970– n° 20.

[5] J. L. Nicolas, *Six nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés*, Calculat en Math. (1975 — Limoges), Bull. Soc. Math. France, Mémoire 49–50, 19 p. 141–143.

[6] W. Sierpiński, *A selection of problems in the theory of numbers*, Pergamon Pr Warszawa 1964.

[7] A. R. Thatcher, *Five integers which sum in pair to square*, The Math. Gaz. (1978), p. 25–29.


DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
Reims, France

*Reçu le 26. 2. 1979* (11

---

ACTA ARITHMETICA
XL (1981)

# Исправление к работам: Acta Arith. 31 (1976), стр. 31-43; 31 (1976), стр. 45-51; 35 (1979), стр. 403-404

Ян Мозер (Братислава)

**1.** Как мне сообщил г. проф. А. А. Карацуба, в работе [4], содержится следующая ошибка: на стр. 41 утверждается, что последовательность

$$\left\{\frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}}\right\}, \quad n < P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

убывает для $n \geqslant 8$. Однако, это свойство имеет место лишь для $n \in \langle 8, e^{-A}P_0)$, $A > 1$. В силу этого обстоятельства я должен теперь исправить соответствующее доказательство. К счастью, обстановка такая, что в процессе исправления я получил более точные теоремы (независимо от какой бы то ни было гипотезы), чем первоначальные.

Теперь мы перечислим результаты (относительно обозначений см. [4], [5]). Пусть $\psi(T)$ — возрастающая к $+\infty$ $(T \to +\infty)$, функция, для которой

$$0 < \psi(T) < \frac{1}{6}\frac{\ln T}{\ln\ln T}. \tag{1}$$

Теорема 1.

$$\sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} Z(t_\nu) = O(T^{1/6+1/(2\psi)}\ln^{5/2} T), \tag{2}$$

*для* $H = T^{1/6+1/\psi}$.

Примечание 1. Этот результат исправляет и улучшает теорему из работы [4].

Е. К. Титчмарш ([9], стр. 100) получил следующую формулу (записанную в локальной форме)

$$\sum_{T < t_\nu \leqslant T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi} H \ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{1/4}), \quad H \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle. \tag{3}$$

Так как в работе [5] сохраняют силу соотношения (21)–(52) и в работе [6], соотношения (31′)–(51′), то имеет место (относительно $S(a, b)$ см. [4], стр. 34)

Теорема 2. *Если*

$$|S(a,b)| < A(\Delta)\sqrt{a}\,t^{\Delta}, \quad 0<\Delta\leqslant 1/6, \tag{4}$$

*то*

$$\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln T). \tag{5}$$

Примечание 2. В случае (см. [3])

$$\Delta = \frac{35}{216}+\varepsilon, \tag{6}$$

мы имеем 35,1%-ое улучшение показателя 1/4 в (3).

Так как в случае справедливости гипотезы Линделёфа имеет место (ср. [2], стр. 89)

$$|S(a,b)| < A(\varepsilon)\sqrt{a}\,t^{\varepsilon}, \tag{7}$$

то делаем

Примечание 3. В случае справедливости гипотезы Линделёфа мы имеем почти 100%-ое улучшение показателя 1/4 в (3).

Е. К. Титчмарш в книге [8], стр. 261, 262 получил следующие формулы

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=\nu_0}^{N} Z(t_{2\nu}) &= 2N+O(N^{3/4}\ln^{3/4}N),\\ \sum_{\nu=\nu_0}^{N} Z(t_{2\nu+1}) &= -2N+O(N^{3/4}\ln^{3/4}N),\end{aligned} \tag{8}$$

где $t_\nu \sim 2\pi\nu/\ln\nu$, (см. [8], стр. 261).

В силу (2), (3), (6), мы получаем такой результат:

Теорема 3.

$$\begin{aligned}\sum_{T<t_{2\nu}\leqslant T+H} Z(t_{2\nu}) &= \frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{1/6+1/(2\psi)}\ln^{5/2}T),\\ \sum_{T\leqslant t_{2\nu+1}\leqslant T+H} Z(t_{2\nu+1}) &= -\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{1/6+1/(2\psi)}\ln^{5/2}T).\end{aligned} \tag{9}$$

*где*

$$H = T^{1/6+1/\psi}. \tag{10}$$



Примечание 4. Итак мы имеем 77,7%-ое улучшение показателя 3/4 в (8), т.е. значительное локальное улучшение формул (8).

Харди и Литтлвуд в работе [1], стр. 177–184, показали, что имеет место теорема: отрезок

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^{1/4+\varepsilon}), \quad T\geqslant T_0(\varepsilon), \tag{11}$$

содержит нуль нечетного порядка функции $\zeta(s)$.

Так как (см. (1))

$$T^{-1/(2\psi)}\ln^{3/2}T < \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{\ln T}{\psi}\right),$$

то формулы (9) являются асимптотическими. Следовательно, имеет место

Теорема 4. *Отрезок*

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^{1/6+1/\psi}) \tag{12}$$

*содержит нуль нечетного порядка функции* $\zeta(s)$.

Примечание 5. Этот результат исправляет и улучшает теорему из работы [5].

**2.** Теперь мы введем следующее предположение:

$$|S(a,b)| < \begin{cases} A(\varepsilon)\sqrt{a}\,t^{\varepsilon}, & 0<a\leqslant B\tau,\ 0<B<1,\\ A(\varepsilon)\sqrt{b-a}\,t^{\varepsilon}, & B\tau<a<\tau,\end{cases} \tag{13}$$

где $b\leqslant 2a$, $\tau=\sqrt{t/2\pi}$.

Из формулы Римана–Зигеля ([8], стр. 94)

$$Z(t) = 2\sum_{n\leqslant\tau}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)+O(t^{-1/4}) \tag{14}$$

в силу (13) следует (ср. [4], (14)–(22)) оценка

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = O(t^{\varepsilon}). \tag{15}$$

В силу этого мы назовем предположение (13) усиленной гипотезой Линделёфа.

Мы покажем, что эта гипотеза существенно влияет на оценки остаточных членов в формулах (9). Имеет место

Теорема 5. *Если справедлива усиленная гипотеза Линделёфа, то*

$$\begin{aligned}\sum_{T\leqslant t_{2\nu}\leqslant T+H} Z(t_{2\nu}) &= \frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\eta/2+2\varepsilon}),\\ \sum_{T\leqslant t_{2\nu+1}\leqslant T+H} Z(t_{2\nu+1}) &= -\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{\eta/2+2\varepsilon}),\end{aligned} \tag{16}$$

где

(17) $$H = T^{\eta}$$

($\eta$ — *сколь угодно мало*).

Так как формулы (16) являются асимптотическими в случае $\varepsilon < \eta/4$, то получается

Следствие 1. *Если справедлива усиленная гипотеза Линделёфа, то отрезок*

(18) $$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^{\eta})$$

*содержит нуль нечетного порядка функции* $\zeta(s)$.

Пусть $N_0(T)$ обозначает количество нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$, $0 < t < T$. Имеет место

Следствие 2. *Если справедлива усиленная гипотеза Линделёфа, то*

(19) $$N_0(T+T^{\alpha})-N_0(T) > A(\alpha,\eta)T^{\alpha-\eta},$$

*где* $0<\eta<\alpha$ *и, например,* $\alpha \in (0, 1/4)$.

**3.** Работа [7] тоже опирается на метод изложенный в работах [4]–[6]. Все результаты этой работы сохраняют силу, так как (ср. [7], (38))

(20) $$\frac{d}{dn}\frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}} = \frac{\pi/\ln P_0-\sin\tilde{\omega}}{4n^{3/2}\cos^2(\tilde{\omega}/2)} < 0, \quad n \in \langle 8, P_0\rangle,$$

где

$$\frac{3\pi}{2}\frac{\ln 2}{\ln P_0} < \tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}\frac{\ln n}{\ln P_0} < \frac{\pi}{2}.$$

Остается доказать теорему 1 и 5.

**4.** Положим

(21) $$D(T) = \sum_{8\leqslant n<\sqrt{P_0}} \frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}} e^{iT\ln n},$$

где

(22) $$X = X(n) = \frac{\pi}{2}\frac{\ln(P_0/n)}{\ln P_0}.$$

Лемма 1. *Из (4) следует*

(23) $$D(T) = O(T^{\Delta}\ln T).$$



Доказательство. Имеет место (ср. [4], (22))

(24) $$\sum_{8\leqslant n\leqslant M<\sqrt{P_0}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{iT\ln n} = O(T^{\Delta}\ln T).$$

Далее, последовательность $\{\operatorname{ctg} X\}$ возрастает для $n \in \langle 8, \sqrt{P_0}\rangle$, (см. (22)), и $\operatorname{ctg} X < 1$ в этом промежутке. Следовательно, применяя к сумме (21) преобразование Абеля, в силу (24) получаем (23).

**5.** Положим

(25) $$E(T) = \sum_{\sqrt{P_0}\leqslant n<P_0e^{-2}} \frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}} e^{iT\ln n}.$$

Лемма 2. *Из (4) следует*

(26) $$E(T) = O(T^{\Delta}\ln^2 T).$$

Доказательство. Введем целые положительные $L_0$, $L_1$ согласно условиям

(27) $$2^{L_0} \leqslant \sqrt{P_0} < 2^{L_0+1}, \quad 2^{L_1} < P_0e^{-2} \leqslant 2^{L_1+1}$$

и сумму $E(T)$ подразделим на $O(\ln T)$ частей

(28) $$E(T) = \sum_{\sqrt{P_0}\leqslant n<2^{L_0+1}} + \sum_{l=L_0+2}^{L_1}\ \sum_{2^{l-1}\leqslant n<2^l} + \sum_{2^{L_1}\leqslant n<P_0e^{-2}}.$$

Далее,

(29) $$\sum_{2^{l-1}\leqslant n<2^l} \frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}} e^{iT\ln n} = \sum_{2^{l-1}\leqslant n<2^l} \sqrt{n}\cdot\frac{\operatorname{ctg} X}{n} e^{iT\ln n},$$

и положим

(30) $$E(T,l) = \max_{2^{l-1}\leqslant a<b\leqslant 2^l}\left|\sum_{a\leqslant n<b}\frac{\operatorname{ctg} X}{n} e^{iT\ln n}\right|.$$

Однако, при $n \in \langle\sqrt{P_0}, P_0e^{-2}\rangle$,

(31) $$\frac{d}{dn}\frac{\operatorname{ctg} X}{n} = -\frac{1}{2n^2\sin^2 X}\left(\sin 2X - \frac{\pi}{\ln P_0}\right) < 0.$$

Значит, последовательность

(32) $$\left\{\frac{\operatorname{ctg} X}{n}\right\}$$

убывает для $n \in \langle \sqrt{P_0}, P_0 e^{-2})$. Еще напомним, что $\{\operatorname{ctg} X\}$ возрастает в указанном промежутке. Обозначая

$$S^*(l) = \max_{2^{l-1} \leqslant a < b \leqslant 2^l} \Big| \sum_{a \leqslant n < b} e^{it \ln n} \Big|,$$

из (4) получаем

$$S^*(l) = O(2^{(l-1)/2} t^{\Delta}).$$

Теперь, применяя к сумме (30) преобразование Абеля, получаем

$$(33)\quad |E(T, l)| < \frac{\operatorname{ctg} X(2^{l-1})}{2^{l-1}} |S^*(l)| < \frac{\operatorname{ctg} X(P_0 e^{-2})}{2^{l-1}} A(\Delta) 2^{(l-1)/2} T^{\Delta} <$$
$$< A(\Delta) 2^{-(l-1)/2} T^{\Delta} \ln T,$$

так как

$$(34)\quad \operatorname{ctg} X(P_0 e^{-2}) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\ln P_0} \sim \frac{1}{\pi} \ln P_0.$$

Применяя к сумме (29) преобразование Абеля, в силу (33) получаем

$$(35)\quad \sum_{2^{l-1} \leqslant n < 2^l} \frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}} e^{iT \ln n} = O(2^{l/2} \cdot 2^{-(l-1)/2} T^{\Delta} \ln T) = O(T^{\Delta} \ln T).$$

Такая же оценка имеет место для первой и последней сумм в (28). Так как в (28) входит $O(\ln T)$ сумм рассмотренного типа, то отсюда следует (26).

**6.** В этой части мы преобразуем величину

$$(36)\quad K = \frac{(-1)^{\bar{\nu}}}{2} \sum_{P_0 e^{-2} \leqslant n < P_0} \frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}} \sin\varphi +$$
$$+ \frac{(-1)^{\bar{\nu}+N+1}}{2} \sum_{P_0 e^{-2} \leqslant n < P_0} \frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}} \sin(\omega N + \varphi)$$

к форме удобной для дальнейшего исследования (относительно $\bar{\nu}$, $\omega$, $\varphi$ см. [4], (43), (50)).

Мы предположим, что

$$(37)\quad N = 4\bar{N}.$$

Это допустимо, так как $N = 4\bar{N} + R$, $0 \leqslant R \leqslant 3$, и, следовательно, в силу [4], (22), (43),

$$(38)\quad \sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} Z(t_\nu) = \sum_{k=0}^{N} Z(t_{\bar{\nu}+k}) = \sum_{k=0}^{4\bar{N}} Z(t_{\bar{\nu}+k}) + O(T^{\Delta} \ln T).$$



Далее (ср. (22) и [4], (50))

$$(39)\quad \operatorname{tg} \frac{\tilde{\omega}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \frac{\ln n}{\ln P_0} = \operatorname{tg}\Big(\frac{\pi}{2} - X\Big) = \operatorname{ctg} X,$$

$$(40)\quad \sin\Big(\frac{\tilde{\omega}}{2} N\Big) = \sin\Big[N\Big(\frac{\pi}{2} - X\Big)\Big] = \sin(2\bar{N}\pi - NX) = -\sin NX,$$

$$(41)\quad \cos\Big(\varphi + \frac{\tilde{\omega}}{2} N\Big) = \cos\Big[\Big(t_{\bar{\nu}} + \frac{\pi N}{2 \ln P_0}\Big) \ln n\Big] = \cos \tilde{T}(\ln n),$$

$$(42)\quad \sin\varphi - \sin(\tilde{\omega} N + \varphi) = -2 \sin\Big(\frac{\tilde{\omega}}{2} N\Big) \cos\Big(\varphi + \frac{\tilde{\omega}}{2} N\Big) =$$
$$= 2 \sin NX \cos(\tilde{T} \ln n).$$

Следовательно,

$$(43)\quad K = (-1)^{\bar{\nu}} \sum_{P_0 e^{-2} \leqslant n < P_0} \frac{\operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}} \sin NX \cos(\tilde{T} \ln n) =$$
$$= (-1)^{\bar{\nu}} N \sum_{P_0 e^{-2} \leqslant n < P_0} \frac{X \operatorname{ctg} X}{\sqrt{n}} \frac{\sin NX}{NX} \cos(\tilde{T} \ln n).$$

Теперь мы обратим внимание на последовательность $\{X(n)\}$, (см. (22)). Очевидно $\{X(n)\}$ убывает для $n \in \langle P_0 e^{-2}, P_0)$, и,

$$(44)\quad 0 < X(n) \leqslant \frac{\pi}{\ln P_0}, \quad P_0 e^{-2} \leqslant n < P_0.$$

Далее, из (22) получаем, что $P_0/n = P_0^{2X/\pi}$, т.е.

$$(45)\quad \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{P_0}} P_0^{X/\pi}.$$

Наконец, из (43), в силу (45), получаем

$$(46)\quad K = (-1)^{\bar{\nu}} \frac{N}{\sqrt{P_0}} \sum_{P_0 e^{-2} \leqslant n < P_0} P_0^{X/\pi} \cdot X \operatorname{ctg} X \cdot \frac{\sin NX}{NX} \cdot \cos(\tilde{T} \ln n) =$$
$$= (-1)^{\bar{\nu}} \frac{N}{\sqrt{P_0}} G(\tilde{T}, N).$$

**7.** В этой части (используя преобразование Абеля) мы отбросим все несущественное в сумме $G$.

(a) Мы уже заметили, что $\{X(n)\}$ убывает для $n \in \langle P_0 e^{-2}, P_0)$, т.е. и последовательность $\{P_0^{X/\pi}\}$ убывает на этом промежутке, и,

$$(47)\quad 1 < P_0^{X/\pi} \leqslant P_0^{1/\ln P_0} = e.$$

Следовательно,

$$(48)\qquad |G(\tilde{T}, N)| \leqslant e\cdot \max_{P_0e^{-2}<c_1<P_0} |G_1(c_1)|,$$

где

$$(49)\qquad G_1(c_1) = \sum_{P_0e^{-2}\leqslant n\leqslant c_1} X\operatorname{ctg}X\cdot \frac{\sin NX}{NX}\cdot\cos(\tilde{T}\ln n).$$

(b) Так как

$$(50)\qquad \frac{d}{dn}(X\operatorname{ctg}X) = \frac{\pi}{2n\ln P_0}\,\frac{1-(\sin 2X/2X)}{\sin^2 X} > 0,\quad n\in\langle P_0e^{-2}, P_0),$$

то последовательность $\{X\operatorname{ctg}X\}$ возрастает и ограничена значением 1 на этом промежутке. Следовательно,

$$(51)\qquad |G_1(c_1)| \leqslant \max_{P_0e^{-2}<c_2\leqslant c_1} |G_2(c_2)|,$$

где

$$(52)\qquad G_2(c_2) = \sum_{P_0e^{-2}\leqslant n\leqslant c_2} \frac{\sin NX}{NX}\cos(\tilde{T}\ln n).$$

**8.** Однако, сумма $G_2$ еще является сложной. Поэтому в этой части мы подразделим $G_2$ на суммы — атомы, согласно свойствам функции

$$\frac{\sin w}{w},\quad w>0.$$

Положим ($n\in\langle P_0e^{-2}, c_2)$),

$$(53)\qquad G_2(c_2) = \sum_{0<NX\leqslant\pi} + \sum_{l=1}^{L}\sum_{\pi l<NX\leqslant\pi(l+1)} = G_3(c_2)+\sum_{l=1}^{L} G_4(c_2, l),$$

где, в силу (22),

$$(54)\qquad \begin{gathered} 0<NX\leqslant\pi \leftrightarrow P_0^{1-2/N}\leqslant n<P_0,\\ \pi l<NX\leqslant\pi(l+1)\leftrightarrow P_0^{1-2(l+1)/N}\leqslant n<P_0^{1-2l/N}, \end{gathered}$$

и,

$$(55)\qquad \begin{gathered} \sum_{0<NX\leqslant\pi} 1 \sim P_0-P_0^{1-2/N}\sim\frac{2}{N}P_0\ln P_0,\\ \sum_{\pi l<NX\leqslant\pi(l+1)} 1 < \frac{3}{N}P_0\ln P_0,\quad l=1,\ldots,L. \end{gathered}$$



Еще, из условия $P_0^{1-2(\tilde{l}+1)/N} = P_0e^{-2}$ мы получаем, что $l+1 = N/\ln P_0$, т.е.

$$(56)\qquad L = \left[\frac{N}{\ln P_0}\right].$$

Пусть, далее, $\{w_l\}$ — последовательность точек локальных экстремумов функции $\sin w/w$, $w>0$. Так как, очевидно, $\pi l<w_l<\pi(l+1)$, то

$$(57)\qquad G_4(c_2, l) = \sum_{\pi l<NX\leqslant w_l} + \sum_{w_l<NX\leqslant\pi(l+1)} = G_{41}(c_2, l)+G_{42}(c_2, l).$$

На промежутке $(\pi l, w_l)$ функция $\sin w/w$ является

(a) положительной и возрастающей, если $l$ — четное,

(b) отрицательной и убывающей, если $l$ — нечетное.

Однако, в случае (b) функция $(-\sin w/w)$ обладает свойством (a). Кроме этого

$$(58)\qquad \left|\frac{\sin w}{w}\right| \leqslant \frac{1}{w_l} < \frac{1}{\pi l}.$$

Следовательно, в обоих случаях мы имеем

$$(59)\qquad |G_{41}(c_2, l)| < \frac{1}{\pi l}\cdot \max_{P_0^{1-2w_l/(\pi N)}\leqslant c_3<P_0^{1-2l/N}} |G_{411}(c_3, l)|,$$

где

$$G_{411}(c_3, l) = \sum_{P_0^{1-2w_l/(\pi N)}\leqslant n<c_3} \cos(\tilde{T}\ln n).$$

$G_{411}(c_3, l)$ и есть сумма — атом для нашей задачи.

Аналогичные соображения имеют место и в случае $G_{42}$.

**9.** В этой части мы приведем некоторые оценки.

Лемма 3.

$$(61)\qquad G_{41}(c_2, l) = O\left\{\frac{1}{l}\,\frac{\sqrt{P_0}}{N}(T^{1/6}+\sqrt{N}T^{1/12})\ln T\right\}.$$

Доказательство. Положим

$$(62)\qquad M_1 = P_0^{1-2w_l/(\pi N)},\quad M_2 = c_3.$$

Очевидно (см. (55)),

$$(63)\qquad P_0e^{-2}<M_1<P_0,\quad M_2-M_1<A\,\frac{P_0\ln P_0}{N},$$

и

$$(64)\qquad M_2 = M_1+(M_2-M_1) < 2M_1.$$

Однако ([10], стр. 198)

$$(65)\quad \sum_{M_1\leqslant n\leqslant M_2<2M_1} e^{i\tilde{T}\ln n} = O\{(M_2-M_1)\tilde{T}^{1/6}M_1^{-1/2}\}+O\{(M_2-M_1)^{1/2}M_1^{1/2}\tilde{T}^{-1/6}\} = O\left\{\frac{\sqrt{P_0}}{N}(T^{1/6}+\sqrt{N}T^{1/12})\ln T\right\}.$$

Наконец, из (59), в силу (65) следует (61).

Лемма 4.

$$(66)\quad K = O\{(T^{1/6}+\sqrt{N}T^{1/12})\ln^2 T\}.$$

Доказательство. Прежде всего, способом (62)–(65) мы получаем (см. (53), (57))

$$(67)\quad G_{42} = O\left\{\frac{1}{l}\frac{\sqrt{P_0}}{N}(T^{1/6}+\sqrt{N}T^{1/12})\ln T\right\},\qquad G_3 = O\left\{\frac{\sqrt{P_0}}{N}(T^{1/6}+\sqrt{N}T^{1/12})\ln T\right\}.$$

Отсюда (см. (53)),

$$(68)\quad G_2 = O\left\{\frac{\sqrt{P_0}}{N}(T^{1/6}+\sqrt{N}T^{1/12})\ln T\cdot\sum_{l=1}^{L}\frac{1}{l}\right\} = O\left\{\frac{\sqrt{P_0}}{N}(T^{1/6}+\sqrt{N}T^{1/12})\ln^2 T\right\}.$$

Наконец, в силу (46), (48), (49), (51), (52), (53), (68) получается (66).

**10.** Теперь мы завершим

Доказательство теоремы 1. Так как ([4], (46))

$$(69)\quad N\sim\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi},$$

то, в силу [4], (59), (61), (70), (71), в случае $\Delta = 1/6$ ([8], стр. 110) и (24), (26), (38), (43), (66) (в этой работе) имеем

$$(70)\quad \sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H} Z(t_\nu) = O(T^{1/6}\ln^2 T)+K = O(T^{1/6}\ln^2 T)+O(\sqrt{N}T^{1/12}\ln^2 T) = O(T^{1/6+1/(2\psi)}\ln^{5/2}T),$$

в случае $H = T^{1/6+1/\psi}$.



Доказательство теоремы 5. Так как (см. (41))

$$(71)\quad \tilde{P}_0-P_0 = \sqrt{\frac{\tilde{T}}{2\pi}}-\sqrt{\frac{T}{2\pi}} = O\left(\frac{\tilde{T}-T}{\sqrt{T}}\right) = O\left(\frac{H}{\sqrt{T}}\right) = o(1),$$

то в силу (13), имеет место

$$(65')\quad \sum_{M_1\leqslant n\leqslant M_2<2M_1} e^{i\tilde{T}\ln n} = O\left(\sqrt{\frac{P_0\ln P_0}{N}}\cdot T^{\varepsilon}\right),$$

и, следовательно,

$$(66')\quad K = O(\sqrt{N}T^{\varepsilon}\ln^2 T).$$

Далее, вместо (70) ($\Delta\to\varepsilon$), имеем

$$(70')\quad \sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H} Z(t_\nu) = O(\sqrt{H}T^{\varepsilon}\ln^{5/2}T) = O(T^{\eta/2+2\varepsilon})$$

в случае $H = T^{\eta}$. Отсюда, в силу (5) ($\Delta\to\varepsilon$), следует (16), т.е. теорема 5 доказана.

### Литература


[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), стр. 119–196.

[2] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Москва 1975.

[3] G. A. Kolesnik, *On the order of Dirichlet L-function*, Pacific J. Math. 82 (1979), стр. 479–482.

[4] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43.

[5] — *Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 31 (1976), стр. 45–51.

[6] — *Добавление к работе: Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 35 (1979), стр. 403–404.

[7] — *О поведении функций* Re{ζ(s)}, Im{ζ(s)} *в критической полосе*, ibid. 34 (1977), стр. 25–35.

[8] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[9] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann* (IV), (V), Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105; 195–210.


*Поступило 1. 3. 1979* (1140)