ACTA ARITHMETICA
XL (1981)

Six entiers dont les sommes deux à deux sont des carrés

par

J. LAGRANGE (Reims)

1. Introduction. Le problème suivant a été posé indépendamment par P. Erdös (Problème 40 de [2]) et L. Moser (Problème 94 de [6]):

Soit k un entier positif; peut-on trouver k entiers distincts $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tels que toutes les sommes n_i+n_j $(i \neq j)$ soient des carrés?

En fait pour $k = 5$ le problème est assez ancien, il a été résolu par Baker [1] et Gill [3]; des références récentes sont Lagrange [4] et Thatcher [7].

Nous proposons ici une étude du cas $k = 6$. On doit trouver six entiers tels que les quinze sommes deux à deux soient des carrés; on dira qu'on a une pseudo-solution si seulement quatorze sommes sont des carrés. On va montrer l'existence d'une infinité de pseudo-solutions, une famille simple étant donnée par (9), et fournir une solution exacte:

$$-15863902,\ 17798783,\ 21126338,\ 49064546,\ 82221218,\ 447422978.$$

Bien que nous ne connaissions pas d'autres solutions, il semble raisonnable de faire la

CONJECTURE. *Il existe une infinité de sextuplets d'entiers dont les sommes deux à deux sont des carrés.*

Dans la suite nous chercherons des solutions en nombres rationnels; par multiplication par un carré on rendra les solutions entières.

2. Carrés magiques. On remarque d'abord qu'avec les six entiers on peut former des carrés magiques tels que

$$(1)\qquad \begin{bmatrix} n_3+n_4 & n_2+n_6 & n_1+n_5 \\ n_1+n_6 & n_3+n_5 & n_2+n_4 \\ n_2+n_5 & n_1+n_4 & n_3+n_6 \end{bmatrix}$$

dont tous les éléments sont des carrés.

Pour obtenir un tel carré, on utilise l'identité:

$$(t^2+u^2+v^2+w^2)^2 = (t^2+u^2-v^2-w^2)^2+4(tw-uv)^2+4(tv+uw)^2.$$

Par échange des signes et permutation des lettres on obtient le carré magique:

$$\begin{bmatrix} (t^2+u^2-v^2-w^2)^2 & 4(tw+uv)^2 & 4(tv-uw)^2 \\ 4(tw-uv)^2 & (t^2-u^2+v^2-w^2)^2 & 4(tu+vw)^2 \\ 4(tv+uw)^2 & 4(tu-vw)^2 & (t^2-u^2-v^2+w^2)^2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

On identifie les carrés magiques (1) et (2), et par le choix de n_3 on obtient six entiers avec neuf carrés.

La somme des six entiers est $S = (t^2+u^2+v^2+w^2)^2$. Avec cette méthode on ne peut obtenir que des entiers dont la somme est un carré.

Pour obtenir un autre carré magique on remplace t, u, v, w par t', u', v', w' et on pose:

$$t' = t, \quad w' = w, \quad u' = \lambda u, \quad v' = \lambda v.$$

Par division par λ^2 on obtient le carré magique:

(3)

$$\begin{bmatrix} \left(\dfrac{t^2-w^2}{\lambda}+\lambda(u^2-v^2)\right)^2 & 4\left(\dfrac{tw}{\lambda}+\lambda uv\right)^2 & 4(tv-uw)^2 \\ 4\left(\dfrac{tw}{\lambda}-\lambda uv\right)^2 & \left(\dfrac{t^2-w^2}{\lambda}-\lambda(u^2-v^2)\right)^2 & 4(tu+vw)^2 \\ 4(tv+uw)^2 & 4(tu-vw)^2 & \left(\dfrac{t^2+w^2}{\lambda}-\lambda(u^2+v^2)\right)^2 \end{bmatrix}$$

qu'on identifie au carré magique:

$$\begin{bmatrix} n_4+n_6 & n_2+n_3 & n_1+n_5 \\ n_1+n_3 & n_5+n_6 & n_2+n_4 \\ n_2+n_5 & n_1+n_4 & n_3+n_6 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

La condition de compatibilité entre les carrés magiques (1) et (4) s'écrit:

$$\left(\frac{t^2+w^2}{\lambda}-\lambda(u^2+v^2)\right)^2 = (t^2+w^2-u^2-v^2)^2.$$

Rejetant la solution triviale $\lambda = 1$, on prend

$$\lambda = \frac{t^2+w^2}{u^2+v^2}. \tag{5}$$

Donc donnant quatre rationnels t, u, v, w les formules (1), (2), (3), (4), (5) permettent de calculer six entiers tels que treize des sommes deux à deux soient des carrés. Seules deux sommes ne sont pas des carrés à savoir:

$$\begin{aligned} n_1+n_2 &= 2(u^2+v^2)(w^2+t^2)+\left(4u^2v^2-\left(\frac{w^2-t^2}{\lambda}\right)^2\right)(\lambda^2+1), \\ n_4+n_5 &= 2(u^2+v^2)(w^2+t^2)-\left(4u^2v^2-\left(\frac{w^2-t^2}{\lambda}\right)^2\right)(\lambda^2+1). \end{aligned} \tag{6}$$

3. Une première famille de pseudo-solutions. Il est facile de trouver des valeurs numériques des paramètres telles que n_1+n_2 ou n_4+n_5 soient des carrés. La méthode la plus simple consiste à prendre:

$$t = 2u+v, \quad w = -u+2v.$$

On a donc $\lambda = 5$. On calcule ensuite les n_i et après réduction on obtient:

$$\begin{aligned} n_1 &= 2u^4-56u^3v+88u^2v^2+56uv^3+2v^4, \\ n_2 &= 2u^4-256u^3v+388u^2v^2+256uv^3+2v^4, \\ n_3 &= 2u^4+144u^3v+388u^2v^2-144uv^3+2v^4, \\ n_4 &= 98u^4+256u^3v-188u^2v^2-256uv^3+98v^4, \\ n_5 &= 23u^4+56u^3v-38u^2v^2-56uv^3+23v^4, \\ n_6 &= 98u^4-144u^3v-188u^2v^2+144uv^3+98v^4. \end{aligned}$$

Seuls n_1+n_2 et n_4+n_5 ne sont pas des carrés:

$$\begin{aligned} n_1+n_2 &= 4(u^4-78u^3v+119u^2v^2+78uv^3+v^4), \\ n_4+n_5 &= 121u^4+312uv^3-226u^2v^2-312uv^3+121v^4. \end{aligned}$$

Les deux formes quartiques des seconds membres sont équivalentes (remplacer u et v par $u+v$ et $u-v$); il existe une infinité de valeurs de u et v telles que n_1+n_2 soit un carré.

Par exemple la méthode d'Euler consiste à écrire

$$(n_1+n_2)/4 = (u^2-39uv+v^2)^2-156uv^2(9u-v).$$

Le couple $(u, v) = (1, 9)$ fournit donc une pseudo-solution:

$$-14782, \ 15143, \ 26882, \ 57218, \ 110882, \ 182882$$

seul $26882+110882$ n'est pas une carré.

4. Une seconde famille de pseudo-solutions. Cette seconde famille est obtenue par la méthode suivante.

Dans l'égalité (5) on prend $\lambda = \mu^2/2$, cette égalité s'écrit alors:

$$\left(\frac{t+w}{\mu}\right)^2+\left(\frac{t-w}{\mu}\right)^2 = u^2+v^2$$

dont la solution générale est

$$\begin{aligned} \frac{t+w}{\mu} &= xy+1, \quad u = xy-1, \\ \frac{t-w}{\mu} &= x-y, \quad v = v+y \end{aligned} \tag{7}$$

avec x et y rationnels.

Les égalités (6) s'écrivent:

$$n_1+n_2 = \mu^2(x^2+1)^2(y^2+1)^2+4(\mu^4+4)xy(x^2-1)(y^2-1),$$

$$n_4+n_5 = \mu^2(x^2+1)^2(y^2+1)^2-4(\mu^4+4)xy(x^2-1)(y^2-1).$$

On écrit ensuite n_4+n_5 sous la forme

$$n_4+n_5 = \left(\mu(x^2+1)(y^2+1) - 2xy\frac{\mu^4+4}{\mu^2}\right)^2 + 4xy(\mu^4+4)\left(2x^2 - xy\frac{\mu^4+4}{\mu^2}+2y^2\right).$$

n_4+n_5 est un carré pour $2x^2-xy\dfrac{\mu^4+4}{\mu^2}+2y^2 = 0$.

Les solutions de cette équation sont rationnelles; une solution est

$$y = x\frac{\mu^2}{2}. \tag{8}$$

Les formules (1), (2), (3), (4), (5), (7) et (8) donnent une famille de pseudo-solutions dépendant des deux paramètres μ et x; seule n_1+n_2 n'est pas un carré. Plus précisément pour μ constant on obtient une pseudo-solution dans l'anneau des polynômes à coefficients entiers. Le cas particulier $\mu = 1$ donne la pseudo-solution suivante:

$$\begin{aligned}
n_1 &= 2x^8-24x^7+100x^6-24x^5-334x^4+48x^3+400x^2+192x+32,\\
n_2 &= 2x^8+24x^7+100x^6+24x^5-334x^4-48x^3+400x^2-192x+32,\\
n_3 &= 2x^8-40x^6+258x^4-160x^2+32,\\
n_4 &= 2x^8+8x^7-60x^6-88x^5+466x^4-176x^3-240x^2+64x+32,\\
n_5 &= 2x^8-8x^7-60x^6+88x^5+466x^4+176x^3-240x^2-64x+32,\\
n_6 &= -x^8+50x^6-225x^4+200x^2-16.
\end{aligned} \tag{9}$$

Seule n_1+n_2 n'est pas un carré

$$n_1+n_2 = 4(x^8+50x^6-167x^4+200x^2+16).$$

Pour $x = \frac{1}{3}$ on obtient la pseudo-solution

$$-5662,\ 5762,\ 11138,\ 28463,\ 41762,\ 226562.$$

Seul $11138+226562$ n'est pas un carré.

Pour obtenir une solution exacte on essaie la méthode d'Euler:

$$(n_1+n_2)/4 = (x^4+25x^2-4)^2-16x^2(49x^2-25).$$

L'équation $49x^2-25 = 0$ a la racine rationnelle $\frac{5}{7}$; on obtient alors la solution exacte

$$-15863902,\ 17798783,\ 21126338,\ 49064546,\ 82221218,\ 447422978.$$

5. Quelques résultats numériques. Les résultats de ce paragraphe sont dus à J. L. Nicolas [5] qui a fait un programme permettant d'écrire systématiquement les pseudo-solutions (calculs effectués sur l'I.B.M. 370/168 du C.I.R.C.E.). On trouvera ci-contre les 24 premières solutions ordonnées par rapport à la somme S des six entiers, l'avant-dernière colonne donne la racine de cette somme et la dernière colonne les indices i et j tels que n_i+n_j n'est pas un carré.

Pseudo-solutions en 6 nombres

	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	$\sqrt{S}$	i, j
1	−5662	5762	11138	28463	41762	226562	555	3,6
2	−14782	15143	26882	57218	110882	182882	615	3,5
3	−49822	50498	63746	78383	114338	1022018	1131	2,6
4	−62782	62882	135143	230882	561218	854882	1335	3,5
5	−556318	−530782	559343	751682	1180418	1675682	1755	1,2
6	−118782	119682	161218	750807	983682	1544418	1855	2,5
7	9122	104447	208034	348482	1295042	2307362	2067	4,6
8	−166302	173698	275202	405423	728802	2888802	2075	3,6
9	−380142	424242	440658	620242	1438983	2541042	2255	3,6
10	−64942	101042	285842	515183	2179058	2529842	2355	4,5
11	−20398	22898	61202	241298	1829423	7321202	3075	3,6
12	−302494	335618	393698	1377863	2381858	5491778	3111	2,5
13	−2408382	−2176857	2452482	3032482	3510882	5670018	3175	1,2
14	−286177	369698	458402	1507202	2095202	6844898	3315	3,6
15	−2873358	−2446542	2922642	3723442	4861458	6167583	3515	1,2
16	−297598	304322	613442	800279	2928482	8374562	3567	2,6
17	−627262	632738	892487	1189762	4429762	6263138	3575	4,5
18	−348536	354312	397377	1684872	5348232	6678792	3757	3,6
19	−2453742	−1649358	2514258	4355383	4614642	7789842	3895	1,2
20	−816094	849218	1150178	2540063	3369698	8422658	3939	2,6
21	−103198	132098	590402	1858823	2656802	10665698	3975	3,6
22	334226	515858	641918	3155198	3835538	7629458	4014	3,4
23	−247518	320418	956482	2634543	4287618	8715618	4082,54...	2,5
24	−597688	665288	1170737	1351112	4087112	11753288	4293	3,4

On notera que les deux premières pseudo-solutions ont été obtenues précédemment, que les pseudo-solutions 7 et 22 sont positives et que pour la pseudo-solution 23, S n'est pas un carré.

Au bout de huit heures de calcul, la solution exacte déjà connue a été obtenue, le programme n'a pas encore fourni d'autre solution.

Terminons par une remarque; chercher cinq entiers dont les sommes deux à deux sont des carrés est équivalent à la recherche de cinq entiers dont les sommes trois à trois sont des carrés. C'est ce dernier problème qui a été résolu par Gill [3], mais il n'est pas facile d'écrire des solutions positives. Un sous-produit du programme de J. L. Nicolas est le suiva les cinq entiers

92763, 4914963, 7559299, 9945963, 16308963

ont des sommes trois à trois qui sont des carrés et c'est la plus pe solution.

Bibliographie

[1] T. Baker, The Gentleman's Diary, or Math. Repository, London, 1838, 8 Quest 1360.

[2] P. Erdös, *Quelques problèmes de la théorie des nombres*, Monographie de l'en gnement mathématique, Genève, n° 6, p. 81–135.

[3] C. Gill, *Applications of the angular analysis to indeterminate problems of degr* New-York, 1848, p. 60.

[4] J. Lagrange, *Cinq nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés*, Sémin de théorie des nombres Delange–Pisot–Poitou, Paris, 12ème année (1970– n° 20.

[5] J. L. Nicolas, *Six nombres dont les sommes deux à deux sont des carrés*, Calculat en Math. (1975 — Limoges), Bull. Soc. Math. France, Mémoire 49–50, 1 p. 141–143.

[6] W. Sierpiński, *A selection of problems in the theory of numbers*, Pergamon Pr Warszawa 1964.

[7] A. R. Thatcher, *Five integers which sum in pair to square*, The Math. Gaz. (1978), p. 25–29.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES
Reims, France

Reçu le 26. 2. 1979 (11

ACTA ARITHMETICA
XL (1981)

Исправление к работам: Acta Arith. 31 (1976), стр. 31-43; 31 (1976), стр. 45-51; 35 (1979), стр. 403-404

Ян Мозер (Братислава)

1. Как мне сообщил г. проф. А. А. Карацуба, в работе [4], содержится следующая ошибка: на стр. 41 утверждается, что последовательность

$$\left\{\frac{\operatorname{tg}(\tilde{\omega}/2)}{\sqrt{n}}\right\}, \quad n < P_0 = \sqrt{\frac{T}{2\pi}},$$

убывает для $n \geqslant 8$. Однако, это свойство имеет место лишь для $n \in \langle 8, e^{-A}P_0)$, $A > 1$. В силу этого обстоятельства я должен теперь исправить соответствующее доказательство. К счастью, обстановка такая, что в процессе исправления я получил более точные теоремы (независимо от какой бы то ни было гипотезы), чем первоначальные.

Теперь мы перечислим результаты (относительно обозначений см. [4], [5]). Пусть $\psi(T)$ — возрастающая к $+\infty$ $(T \to +\infty)$, функция, для которой

$$(1) \qquad 0 < \psi(T) < \frac{1}{6}\frac{\ln T}{\ln\ln T}.$$

Теорема 1.

$$(2) \qquad \sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} Z(t_\nu) = O(T^{1/6+1/(2\psi)}\ln^{5/2} T),$$

для $H = T^{1/6+1/\psi}$.

Примечание 1. Этот результат исправляет и улучшает теорему из работы [4].

Е. К. Титчмарш ([9], стр. 100) получил следующую формулу (записанную в локальной форме)

$$(3) \qquad \sum_{T \leqslant t_\nu \leqslant T+H} (-1)^\nu Z(t_\nu) = \frac{1}{\pi} H \ln\frac{T}{2\pi} + O(T^{1/4}), \quad H \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle.$$