ACTA ARITHMETICA
XL (1981)

О корнях уравнения $Z'(t) = 0$

Ян Мозер (Братислава)

1. Пусть ([7], стр. 94, 383)

$$(1)\qquad \begin{cases} Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it), \\ \vartheta(t) = -\tfrac{1}{2}t\ln\pi + \operatorname{Im}\ln\Gamma(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}it) = \\ \qquad = \tfrac{1}{2}t\ln(t/2\pi) - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{8}\pi + O(1/t). \end{cases}$$

В этой работе мы получим новое следствие из гипотезы Линделёфа: а именно, что функция $Z(t)$ имеет колебательный характер на промежутке $(T, T+T^\tau)$, $\tau > 0$, где τ — сколь угодно малое число, т.е. имеет в этом промежутке неограниченное (при $T \to +\infty$) количество локальных экстремумов.

Теперь мы перечислим результаты. Пусть $S(a, b)$ обозначает элементарную тригонометрическую сумму (ср. [4], стр. 34).

Теорема. *Если*

$$(2)\qquad |S(a, b)| < A(\Delta)\sqrt{a}\,t^\Delta, \quad 0 < \Delta < \tfrac{1}{6},$$

то уравнение

$$(3)\qquad Z'(t) = 0$$

имеет корень нечетного порядка в промежутке

$$(4)\qquad \big(T, T+T^\Delta\psi(T)\big),$$

где $\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция.

Примечание 1. Конечно, корень нечетного порядка уравнения (3) есть точка локального экстремума функции $Z(t)$.

В случае (см. [2])

$$(5)\qquad \Delta = \frac{35}{216} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

мы имеем

Следствие 1. *Промежуток*

(6) $$(T,\ T+T^{\frac{35}{216}+\varepsilon})$$

содержит точку локального экстремума функции $Z(t)$.

В случае справедливости гипотезы Линделёфа для элементарной тригонометрической суммы имеет место (см. [1])

(7) $$|S(a,\ b)| < A(\varepsilon)\sqrt{a}t^{\varepsilon}.$$

Следствие 2. *В случае справедливости гипотезы Линделёфа промежуток*

(8) $$(T,\ T+T^{\varepsilon}\psi(T))$$

содержит точку локального экстремума функции $Z(t)$.

Примечание 2. Итак, в случае справедливости гипотезы Линделёфа мы имеем $100\,\%$-ое улучшение показателя $35/216$ в (6).

Пусть $N_0'(T)$ обозначает число корней уравнения (3) для $t\in(0,\ T)$.

Следствие 3. *В случае справедливости гипотезы Линделёфа имеет место оценка*

(9) $$N_0'(T+T^{\tau})-N_0'(T) > A(\tau,\ \varepsilon)T^{\tau-\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<\tau,$$

где τ *— сколь угодно малое.*

Обоснованием для изучения корней уравнения (3) являются следующие обстоятельства.

(а) С вопросом о расположении корней уравнения (3) относительно корней уравнения $Z(t)=0$, связан вопрос о справедливости гипотезы Римана (ср. например, [3], стр. 34, следствие 3).

(б) В случае же справедливости гипотезы Римана, корни уравнения (3) связаны с вопросом о существовании кратных нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$.

2. Основой доказательства теоремы является

Формула 1.

(10) $$Z'(t) = -2\sum_{n\leqslant\sqrt{t/2\pi}}\frac{1}{\sqrt{n}}(\vartheta'-\ln n)\sin(\vartheta-t\ln n)+O(t^{-1/4}\ln t).$$

Доказательство этой формулы помещено в частях 3, 4.

В части 5, при $t\in\langle T,\ T+H\rangle$, $H\in(0,\ \sqrt[4]{T})$, формулу (10) преобразуем так

Формула 2.

(11) $$Z'(t) = -2\sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{P_0}{n}\sin(\vartheta-t\ln n)+O(t^{-1/4}\ln t),$$

где $P_0=\sqrt{T/2\pi}$.

В части 6, исходя из формулы 2, в случае последовательности $\{\bar t_\nu\}$ определенной соотношением

(12) $$\vartheta(\bar t_\nu) = \pi\nu+\pi/2,$$

(ν — целое положительное), мы покажем, что имеет место

Лемма 1. *Из* (2) *следует*

(13) $$\sum_{T\leqslant\bar t_\nu\leqslant T+H} Z'(\bar t_\nu) = O(T^{\Delta}\ln^2 T).$$

В части 7 мы покажем, что имеет место

Лемма 2. *Из* (2) *следует*

(14) $$\sum_{T\leqslant\bar t_\nu\leqslant T+H}(-1)^{\nu}Z'(\bar t_\nu) = -\frac{1}{2\pi}H\ln^2\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln^2 T).$$

Примечание 3. Соотношение (14) является асимптотическим в случае $T^{\Delta}=o(H)$, т.е. например, при

(15) $$H_1 = T^{\Delta}\psi(T).$$

Наконец, из леммы 1 и 2 получаем

Следствие 4.

(16) $$\sum_{T\leqslant\bar t_{2\nu}\leqslant T+H} Z'(\bar t_{2\nu}) = -\frac{1}{4\pi}H\ln^2\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln^2 T),$$
$$\sum_{T\leqslant\bar t_{2\nu+1}\leqslant T+H} Z'(\bar t_{2\nu+1}) = \frac{1}{4\pi}H\ln^2\frac{T}{2\pi}+O(T^{\Delta}\ln^2 T).$$

Отсюда, в случае (15), следует утверждение теоремы.

3. В этой и следующей части мы приведем

Доказательство формулы 1. Исходим из соотношения ([7], стр. 85, $x=y=\sqrt{t/2\pi}$, $\eta=\sqrt{2\pi t}$, $m=[x]$)

(17) $$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^s}+\chi(s)\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^{1-s}}+ \\ +\frac{e^{-i\pi s}\Gamma(1-s)}{2\pi i}\left(\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}\right)\frac{w^{s-1}e^{-mw}}{e^w-1}\,dw,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — отрезки, соединяющие следующие точки плоскости (w), соответственно,

$$\begin{array}{ll} \infty+i\eta(1+c), & c\eta+i\eta(1+c), \\ c\eta+i\eta(1+c), & -c\eta+i\eta(1-c), \\ -c\eta+i\eta(1-c), & -c\eta-i(2m+1)\pi, \\ -c\eta-i(2m+1)\pi, & \infty-i(2m+1)\pi, \end{array} \tag{18}$$

и $0<c\leqslant\frac{1}{2}$. Полагая в соотношении (17), $s=\frac{1}{2}+it$, и, умножая последнее на $\exp\{i\vartheta(t)\}$, (ср. [7], стр. 94), то получаем $(\alpha(t)=\sqrt{t/2\pi})$

$$\begin{aligned} Z(t) &= e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it) = \\ &= 2\sum_{n\leqslant\alpha(t)}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n)-\frac{1}{2\pi}e^{\pi t+i\vartheta}\Gamma(\tfrac{1}{2}-it)W(t), \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$W(t)=\Big(\int\limits_{C_1}+\int\limits_{C_2}+\int\limits_{C_3}+\int\limits_{C_4}\Big)\psi(t,w)dw=\int\limits_{C(t)}\psi(t,w)dw, \tag{20}$$

и,

$$\psi(t,w)=\frac{w^{-1/2+it}e^{-mw}}{e^w-1}. \tag{21}$$

(а) Положим

$$\Phi(t)=\sum_{n\leqslant\alpha(t)}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos(\vartheta-t\ln n). \tag{22}$$

Приращение этой функции (пусть, например, $\delta>0$) напишем так

$$\begin{aligned} \Phi(t+\delta)-\Phi(t) &= \\ &= \sum_{n\leqslant\alpha(t)}\frac{1}{\sqrt{n}}\big(\cos\{\vartheta(t+\delta)-(t+\delta)\ln n\}-\cos\{\vartheta(t)-t\ln n\}\big)+ \\ &\quad+\sum_{\alpha(t)<n\leqslant\alpha(t+\delta)}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\{\vartheta(t+\delta)-(t+\delta)\ln n\}=\Sigma_1+\Sigma_2. \end{aligned} \tag{23}$$

Так как

$$\alpha(t+\delta)-\alpha(t)=O(\delta/\sqrt{t}), \tag{24}$$

то, при надлежащем выборе δ, промежуток $\langle\alpha(t),\alpha(t+\delta)\rangle$ не содержит целого положительного, и, следовательно,

$$\Sigma_2=0. \tag{25}$$

(б) Далее, (см. (20)),

$$\begin{aligned} W(t+\delta)-W(t) &= \int\limits_{C(t+\delta)}\psi(t+\delta,w)\,dw-\int\limits_{C(t)}\psi(t,w)\,dw= \\ &= \int\limits_{C(t+\delta)}\psi(t+\delta,w)\,dw-\int\limits_{C(t)}\psi(t+\delta,w)\,dw+ \\ &\quad+\int\limits_{C(t)}[\psi(t+\delta,w)-\psi(t,w)]\,dw= \\ &= \int\limits_{C(t+\delta)\cup\{-C(t)\}}\psi(t+\delta,w)dw+\int\limits_{C(t)}[\psi(t+\delta,w)-\psi(t,w)]dw= \\ &= \int\limits_{C(t)}[\psi(t+\delta,w)-\psi(t,w)]dw, \end{aligned} \tag{26}$$

в силу теоремы Коши, так как функция $\psi(t+\delta,w)$ аналитична в переменной w (δ — сколь угодно малое) в области ограниченной контуром $C(t+\delta)\cup\{-C(t)\}$. Отсюда

$$W'(t)=\int\limits_{C(t)}\frac{\partial\psi(t,w)}{\partial t}\,dw. \tag{27}$$

Следовательно, в силу (а), (б) из (19) получаем

$$\begin{aligned} Z'(t) &= -2\sum_{n\leqslant\alpha(t)}\frac{1}{\sqrt{n}}(\vartheta'-\ln n)\sin(\vartheta-t\ln n)+ \\ &\quad+\frac{1}{2\pi i}\Big\{\vartheta'-\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}-it)-\pi i\Big\}e^{i\vartheta+\pi t}\Gamma(\tfrac{1}{2}-it)\,W(t)- \\ &\quad-\frac{1}{2\pi}e^{i\vartheta+\pi t}\Gamma(\tfrac{1}{2}-it)\,W'(t)=Z_1(t)+Z_2(t)+Z_3(t). \end{aligned} \tag{28}$$

Так как к функции

$$e^{i\vartheta}\cdot e^{\pi t-i\pi/2}\Gamma(\tfrac{1}{2}-it)\,W(t)$$

применим анализ изложенный в [7], стр. 85–88, приводящий к оценке $O(t^{-1/4})$, и, в силу [7], стр. 34, 260,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\tfrac{1}{2}-it)=O(\ln t),\qquad \vartheta'(t)=O(\ln t), \tag{29}$$

то получается

$$Z_2(t)=O(t^{-1/4}\ln t). \tag{30}$$

4. Так как, в силу (21),

$$\frac{\partial\psi(t,w)}{\partial t}=i\ln w\,\frac{w^{-1/2+it}e^{-mw}}{e^w-1}, \tag{31}$$

то оценка величины $Z_3(t)$ получается способом [7], стр. 85–88, только в соответствующих местах нужно учесть влияние сомножителя $\ln w$.

4.1. На C_4 ([7], стр. 86), так как

$$w = u+i(2m+1)\pi, \qquad \ln w = \begin{cases} O(\ln u), & u > m, \\ O(\ln t), & u \in (-c\eta,\, m\rangle, \end{cases} \tag{32}$$

имеем

$$\int\limits_{C_4} = O\Big\{\eta^{-1/2} e^{-\frac{5\pi}{4}t} \int\limits_{-c\eta}^{\infty} e^{-mu} |\ln w|\, du\Big\} = O(e^{t(c-5\pi/4)}\ln t). \tag{33}$$

4.2. На C_3 имеет место $|\ln w| < A\ln t$, следовательно (ср. [7], стр. 86)

$$\int\limits_{C_3} = O(e^{-t(\pi/2+A)}\ln t). \tag{34}$$

4.3. На C_1

$$|\ln w| = \begin{cases} O(\ln t), & 0 < u \leqslant \pi\eta, \\ O(\ln u), & u > \pi\eta, \end{cases} \tag{35}$$

и, следовательно (ср. [7], стр. 86),

$$\int\limits_{C_1} = O\Big(\eta^{-1/2}\ln t \cdot \int\limits_0^{\pi\eta} e^{-(\pi/2+A)t}\, du\Big) + O\Big(\eta^{-1/2} \int\limits_{\pi\eta}^{\infty} e^{-xu} \ln u\, du\Big) = \\ = O(\eta^{1/2} e^{-(\pi/2+A)t}\ln t) \tag{36}$$

(напомним, что $\eta = 2\pi x$).

4.4. Так как на C_2, $w = i\eta + \lambda e^{i\pi/4}$, $|\lambda| < \sqrt{2c\eta}$, $\ln w = O(\ln t)$, то оценки соответствующих частей интеграла заменяются следующими (ср. [7], стр. 87, 88)

$$\begin{cases} O(\eta^{\sigma} t^{-1/2} e^{-\pi t/2}) \to O(\eta^{1/2} t^{-1/2} e^{-\pi t/2}\ln t), \\ O(\eta^{\sigma-1} e^{-\pi t/2}) \to O(\eta^{-1/2} e^{-\pi t/2}\ln t). \end{cases} \tag{37}$$

Следовательно, в силу (28), (33), (34), (36), (37), так как (ср. [7], стр. 88)

$$e^{i\vartheta+\pi t}\Gamma(\tfrac{1}{2}-it) = O(e^{\pi t/2}), \tag{38}$$

получаем

$$Z_3(t) = O(t^{-1/4}\ln t). \tag{39}$$

Наконец, из (28), в силу (30), (39) получается (10), т.е. доказательство формулы 1 закончено.

5. В этой части мы приведем

Доказательство формулы 2 и одно следствие из последней.

Пусть $H \in (0, \sqrt[4]{T}\rangle$, $t \in \langle T, T+H\rangle$. Тогда

$$a(T+H) - a(T) = O(H/\sqrt{T}) = O(T^{-1/4}), \tag{40}$$

и, в силу (29),

$$\sum_{a(T)\leqslant n\leqslant a(T+H)} \frac{1}{\sqrt{n}} (\vartheta' - \ln n)\sin(\vartheta - t\ln n) = O(T^{-1/4}\ln T). \tag{41}$$

Следовательно, из (10), в силу (41), получается

$$Z'(t) = -2\sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} (\vartheta' - \ln n)\sin(\vartheta - t\ln n) + O(T^{-1/4}\ln T), \tag{42}$$

где $P_0 = a(T) = \sqrt{T/2\pi}$. Далее в силу соотношений ([7], стр. 260)

$$\vartheta'(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t}{2\pi} + O\Big(\frac{1}{t}\Big), \qquad \vartheta''(t) \sim \frac{1}{2t}, \tag{43}$$

имеем

$$\vartheta'(t) = \vartheta'(T) + O(H/T) = \ln P_0 + O(T^{-3/4}). \tag{44}$$

Так как

$$\sum_{n\leqslant P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} O(T^{-3/4}) = O(T^{-1/2}), \tag{45}$$

то, из (42), в силу (44), (45), получается

$$Z'(t) = -2\sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P_0}{n} \cdot \sin(\vartheta - t\ln n) + O(T^{-1/4}\ln T), \tag{46}$$

т.е. формула 2. Доказательство закончено.

Так как (см. (12))

$$\sin\{\vartheta(\bar{t}_\nu)\} = (-1)^\nu, \qquad \cos\{\vartheta(\bar{t}_\nu)\} = 0, \tag{47}$$

то из (46) получаем

$$Z'(\bar{t}_\nu) = 2(-1)^{\nu+1} \sum_{n<P_0} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\frac{P_0}{n} \cdot \cos(\bar{t}_\nu \ln n) + O\Big(\frac{\ln T}{\sqrt[4]{T}}\Big). \tag{48}$$

Наконец мы заметим, что для расстояния соседних членов последовательности $\{\bar t_\nu\}$ в случае $\bar t_\nu \in \langle T, T+H\rangle$, имеет место (ср. [8], стр. 102, [4], (42))

$$(49)\qquad \bar t_{\nu+1}-\bar t_\nu = \frac{2\pi}{\ln(T/2\pi)}+O\left(\frac{H}{T\ln^2 T}\right) = \frac{\pi}{\ln P_0}+O\left(\frac{T^{-3/4}}{\ln T}\right).$$

6. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 1. Прежде всего

(а) формула (49) для $\bar t_{\nu+1}-\bar t_\nu$ совпадает (асимптотически) с формулой для $t_{\nu+1}-t_\nu$ ([4], (42)),

(б) формула для $Z'(\bar t_\nu)$ (см. (48)), отличается от формулы для $Z(t_\nu)$ (см. [7], стр. 261, $t_\nu\in\langle T, T+H\rangle$)

$$(50)\qquad Z(t_\nu) = 2(-1)^\nu \sum_{n<P_0}\frac{1}{\sqrt n}\cos(t_\nu \ln n)+O(T^{-1/4}),$$

наличием множителя $(-\ln(P_0/n))$ в каждом члене суммы, и, множителем $\ln T$ в остаточном члене.

В силу этого мы проходим к следующему заключению. Способ сведения задачи об оценке суммы

$$\sum_{T\le t_\nu\le T+H} Z(t_\nu)$$

к оценке величины $W(T, H)$ (см. [4], (59)–(61)) срабатывает и в теперь изучаемом случае, если сделать подстановки: в суммах

$$\frac{1}{\sqrt n}\to -\frac{1}{\sqrt n}\ln\frac{P_0}{n},$$

в остаточных членах

$$O\{(\ldots)\}\to O\{(\ldots)\ln T\}.$$

В силу этого (см. [4], (59)–(61))

$$(51)\qquad \sum_{T\le \bar t_\nu\le T+H} Z'(\bar t_\nu) = -2\overline{W}(T, H)+O(\ln^2 T),$$

где $(n<P_0)$

$$(52)\qquad \overline{W}(T, H) = \frac12(-1)^{\bar\nu}\sum\frac{\ln(P_0/n)}{\sqrt n}\cos\varphi+ \frac12(-1)^{N+\bar\nu}\sum\frac{\ln(P_0/n)}{\sqrt n}\cos(\omega N+\varphi)+$$

$$+\frac12(-1)^{\bar\nu}\sum\frac{\ln(P_0/n)\cdot\operatorname{tg}(\omega/2)}{\sqrt n}\sin\varphi+ \frac12(-1)^{N+\bar\nu+1}\sum\frac{\ln(P_0/n)\cdot\operatorname{tg}(\omega/2)}{\sqrt n}\sin(\omega N+\varphi)+O(\ln^2 T) =$$

$$=\overline{W}_1+\overline{W}_2+\overline{W}_3+\overline{W}_4+O(\ln^2 T),$$

и (см. [4], (43), (50))

$$(53)\qquad \begin{cases}\bar t_{\bar\nu} = \min\limits_{\bar t_\nu\in\langle T, T+H\rangle}\{\bar t_\nu\}, & \bar t_{\bar\nu+N} = \max\limits_{\bar t_\nu\in\langle T, T+H\rangle}\{\bar t_\nu\},\\ \omega = \pi\dfrac{\ln n}{\ln P_0}, & \varphi = \bar t_{\bar\nu}\ln n.\end{cases}$$

(а) Начнем с оценки для $\overline{W}_1$. Имеет место (ср. [4], (70))

$$(54)\qquad \sum_{1\le n<M\le P_0}\frac{\cos\varphi}{\sqrt n} = O(T^\Delta\ln T),$$

где M — целое. Однако, последовательность $\{\ln(P_0/n)\}$ убывает и ограничена значением $A\ln T$. Следовательно, применяя к сумме $\overline{W}_1$ преобразование Абеля, используя (54), получаем

$$(55)\qquad \overline{W}_1 = O(T^\Delta\ln^2 T),$$

и, действуя аналогично,

$$(56)\qquad \overline{W}_2 = O(T^\Delta\ln^2 T).$$

(б) Теперь мы обратим внимание на величины $\overline{W}_3$, $\overline{W}_4$. Сначала изучим последовательность

$$(57)\qquad \left\{\ln\frac{P_0}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\right\}.$$

В силу (53)

$$(58)\qquad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \operatorname{tg}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\frac{\ln(P_0/n)}{\ln P_0}\right\} = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\frac{\ln(P_0/n)}{\ln P_0}\right) = \operatorname{ctg}X(n),$$

и, следовательно,

$$(59)\qquad \ln\frac{P_0}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \frac{2}{\pi}\ln P_0\cdot X(n)\operatorname{ctg}X(n).$$

Однако, последовательность

$$\{X(n)\operatorname{ctg}X(n)\};\quad 0<X(n)\le\pi/2,\ \ 1\le n<P_0,$$

возрастает, так как

$$(60)\qquad \frac{d}{dn}X\operatorname{ctg}X=\frac{\pi}{2n\ln P_0}\cdot\frac{1-(\sin 2X/2X)}{\sin^2 X}>0,\qquad n\in\langle 1,P_0),$$

и ограничена значением 1. Так как аналогично случаю (54) имеет место

$$(61)\qquad \sum_{1\leqslant n<M\leqslant P_0}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{n}}=O(T^{\Delta}\ln T),$$

то, применяя преобразование Абеля, получаем

$$(62)\qquad \sum_{n<P_0}X(n)\operatorname{ctg}X(n)\cdot\frac{\sin\varphi}{\sqrt{n}}=O(T^{\Delta}\ln T),$$

т.е. (см. (59))

$$(63)\qquad \overline{W}_3=O(T^{\Delta}\ln^2 T),$$

и, аналогичным способом,

$$(64)\qquad \overline{W}_4=O(T^{\Delta}\ln^2 T).$$

Наконец, из (51), в силу (52), (55), (56), (63), (64) получаем (13).

7. В этой части мы приведем

Доказательство леммы 2. Прежде всего мы напомним ([5], (26)), что

$$(65)\qquad \sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu Z(t_\nu)=\frac{1}{\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+\widetilde{W}(T,H)+O\left(\frac{H^2}{T}\right),$$

где

$$\widetilde{W}=2\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{T\leqslant t_\nu\leqslant T+H}\cos(t_\nu\ln n)$$

и, в силу [6], (51'),

$$(66)\qquad \widetilde{W}=O(T^{\Delta}\ln T).$$

Так как (ср. (49) и [5], (23))

$$(67)\qquad \sum_{T\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T+H}1=\frac{1}{2\pi}H\ln\frac{T}{2\pi}+O(T^{-1/2})=\frac{1}{\pi}H\ln P_0+O(T^{-1/2}),$$

то, в силу (48) $(H\leqslant\sqrt[4]{T})$,

$$(68)\qquad \sum_{T\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T+H}(-1)^\nu Z'(\bar{t}_\nu)=$$

$$=-2\ln P_0\sum_{\bar{t}_\nu}1-2\sum_{2\leqslant n<P_0}\frac{\ln(P_0/n)}{\sqrt{n}}\sum_{\bar{t}_\nu}\cos(\bar{t}_\nu\ln n)+\sum_{\bar{t}_\nu}O(T^{-1/4}\ln T)=$$

$$=-2\ln P_0\cdot\left\{\frac{1}{\pi}H\ln P_0+O(T^{-1/2})\right\}-R(T,H)+O(\ln^2 T).$$

Так как, конечно, имеет место (ср. (66))

$$(69)\qquad \sum_{2\leqslant n<M\leqslant P_0}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{T\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T+H}\cos(\bar{t}_\nu\ln n)=O(T^{\Delta}\ln T),$$

то, применяя к сумме $R(T,H)$ преобразование Абеля, получаем оценку

$$(70)\qquad R=O(T^{\Delta}\ln^2 T).$$

Следовательно, из (68), в силу (70) получаем (14).

Литература

[1] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Москва 1975.

[2] G. A. Kolesnik, *On the order of Dirichlet L-function*, Pacific J. Math. 82 (1979), стр. 479–482.

[3] Ян Мозер, *Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой*, Acta Arith. 26 (1974), стр. 33–39.

[4] — *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, ibid. 31 (1976), стр. 31–43.

[5] — *Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 31 (1976), стр. 45–51.

[6] — *Добавление к работе: Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 35 (1979), стр. 403–404.

[7] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[8] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV)*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 30.1.1979 (1132)