Sur un problème posé par M. Paul Turán

par

S. Uchiyama (Sapporo, Japon)

1. Introduction. Nous nous occuperons dans cette note d'une propriété constructive de l'ensemble $Z(m, n)$ de tous les systèmes de n nombres complexes $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ satisfaisant à la condition

$$s_{m+1} = s_{m+2} = \ldots = s_{m+n-1} = 0, \tag{1.1}$$

où $s_\nu = z_1^\nu + z_2^\nu + \ldots + z_n^\nu$, m étant un nombre entier non négatif. Il est évident que l'ensemble $Z(m, n)$ contient toujours un système non trivial, c'est-à-dire autre que $(0, 0, \ldots, 0)$. Pour $n = 1$ la condition (1.1) devient évidemment vide et $Z(m, 1)$ se compose de tous les nombres complexes (z_1) sans exception.

Il n'est pas difficile de voir que tout système de $Z(0, n)$ et de $Z(1, n)$ se compose respectivement des racines de l'équation

$$z^n + a = 0$$

et des racines de l'équation

$$z^n + \frac{a}{1!} z^{n-1} + \ldots + \frac{a^n}{n!} = 0,$$

a étant un nombre complexe quelconque [1, 2]. Une formule générale caractérisant l'ensemble $Z(m, n)$ pour $m \geqslant 1$ a été donnée dans [3]; voir aussi, pour $m = 2$, [1] ou [2].

Soit maintenant $B(m, n)$ le nombre des systèmes *fondamentaux* de l'ensemble $Z(m, n)$, à partir desquels les autres systèmes de $Z(m, n)$ peuvent être obtenus par dilatation ou contraction avec rotation par rapport à l'origine du plan des nombres complexes. La détermination du nombre $B(m, n)$ en général, qui fera l'objet principal de la présente note, résoudra un problème posé récemment par M. P. Turán dans une de ses lettres à l'auteur.

Par définition on voit aisément que

$$B(0, n) = 1, \quad B(1, n) = 1$$

et on peut montrer par un calcul direct [4] que

$$B(2, n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \quad B(3, n) = \left[\frac{n^2+3n}{6}\right] + 1.$$

Le nombre $B(m, n)$ sera déterminé dans le cas général par une formule récurrente.

Théorème 1. *On a*

$$\sum_{d|(m,n)} a(d) B\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right) = \frac{(m+n-1)!}{m!\,n!}, \tag{1.2}$$

où $a(1) = 1$ *et* $a(l) = \prod_{p|l} (1-p)/l$ $(l > 1)$.

En particulier, si $(m, n) = 1$, on aura

$$B(m, n) = \frac{(m+n-1)!}{m!\,n!} = B(n, m),$$

donc, si nous admettons que $B(m, 0) = 1$, le théorème suivant est une conséquence immédiate du Théorème 1:

Théorème 2. *On a toujours*

$$B(m, n) = B(n, m). \tag{1.3}$$

La relation (1.3) affirme qu'il y a une correspondance univoque entre les systèmes fondamentaux de l'ensemble $Z(m, n)$ et ceux de l'ensemble $Z(n, m)$, mais on ne sait rien de la structure explicite de cette correspondance.

2. Considérations préliminaires. Nous allons démontrer d'abord deux lemmes préparatoires.

Lemme 1. *Soit c un nombre positif et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres positifs quelconques. Alors, le système d'équations*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j^{c+k} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

admet une seule solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Démonstration. La proposition étant triviale pour $n = 1$, on procède par induction sur n. Supposons que le lemme soit vrai pour tous les $n \leqslant m-1$. Or, s'il existait une solution non triviale $(x_1, \ldots, x_m)$ du système

$$\sum_{j=1}^{m} a_j x_j^{c+k} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

on pourrait évidemment supposer que

$$x_1 x_2 \ldots x_m \neq 0 \quad \text{et} \quad \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) \neq 0;$$

mais c'est impossible, puisque l'on doit avoir d'autre part

$$\begin{vmatrix} x_1^c & x_2^c & \ldots & x_m^c \\ x_1^{c+1} & x_2^{c+1} & \ldots & x_m^{c+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{c+m-1} & x_2^{c+m-1} & \ldots & x_m^{c+m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{m(m-1)/2} (x_1 x_2 \ldots x_m)^c \prod_{i<j} (x_i - x_j) = 0,$$

ce qui complète la preuve par induction.

Pour un système $(z_1, \ldots, z_n)$ de $Z(m, n)$ soit le polynôme

$$f(x; z_1, \ldots, z_n) = \prod_{j=1}^{n} (x - z_j).$$

Soient ensuite $(z_1, \ldots, z_n)$ et $(z'_1, \ldots, z'_n)$ deux systèmes non triviaux quelconques de $Z(m, n)$. Nous dirons que ces systèmes $(z_1, \ldots, z_n)$ et $(z'_1, \ldots, z'_n)$ sont équivalents dans $Z(m, n)$, s'il existe un nombre complexe $\lambda \neq 0$ tel que

$$f(x; z_1, \ldots, z_n) = f(x; \lambda z'_1, \ldots, \lambda z'_n).$$

Il est clair que le nombre $B(m, n)$ des systèmes fondamentaux de $Z(m, n)$ est égal au nombre des systèmes non triviaux, mutuellement inéquivalents dans $Z(m, n)$.

Considérons maintenant le cas spécial de $(m, n) > 1$. Soit $l > 1$ un commun diviseur de m et n. On vérifie tout de suite que, si $(w_1, \ldots, w_{n/l})$ est un système non trivial de $Z(m/l, n/l)$, alors les n nombres

$$\omega_j w_k^{1/l} \quad (j = 1, 2, \ldots, l, \; k = 1, 2, \ldots, n/l)$$

forment un système non trivial de $Z(m, n)$ où ω_j $(j = 1, 2, \ldots, l)$ sont les l-èmes racines de l'unité et $w_k^{1/l}$ est l'une fixe des l-èmes racines de w_k $(1 \leqslant k \leqslant n/l)$. On dit qu'un système non trivial $(z_1, \ldots, z_n)$ de $Z(m, n)$ équivalent au système $(\omega_j w_k^{1/l};\; j = 1, \ldots, l,\; k = 1, \ldots, n/l)$ est attaché au système $(w_1, \ldots, w_{n/l})$ de $Z(m/l, n/l)$. Ces considérations sont évidemment une extension de celles de J. Surányi relatives au cas où $m|n$ ([2], p. 358).

Lemme 2. *Soient $(z_1, \ldots, z_n)$ et $(z'_1, \ldots, z'_n)$ deux systèmes non triviaux de $Z(m, n)$ respectivement attachés à un système $(w_k;\; k = 1, \ldots, n/l)$ de $Z(m/l, n/l)$ et à un système $(w'_k;\; k = 1, \ldots, n/l')$ de $Z(m/l', n/l')$ où l et l' sont des communs diviseurs de m et n tels que $l|l'$. Pour que ces systèmes $(z_1, \ldots, z_n)$ et $(z'_1, \ldots, z'_n)$ soient équivalents dans $Z(m, n)$, il faut et il suffit les systèmes de $Z(m/l, n/l)$:*

$$(w_1, \ldots, w_{n/l}) \quad \text{et} \quad (\omega_j w_k'^{l/l'};\; j = 1, \ldots, l'/l,\; k = 1, \ldots, n/l')$$

soient équivalents dans $Z(m/l, n/l)$, où ω_j $(j = 1, \ldots, l'/l)$ sont les l'/l-èmes racines de l'unité.

Démonstration. On notera qu'il existe deux nombres non nuls λ et λ' tels que

$$f(x; \lambda z_1, \ldots, \lambda z_n) = \prod_{k=1}^{n/l} (x^l - w_k),$$

$$f(x; \lambda' z'_1, \ldots, \lambda' z'_n) = \prod_{k=1}^{n/l'} (x^{l'} - w'_k).$$

La conclusion de notre lemme résulte immédiatement de ces identités.

3. Démonstration du Théorème 1. On vérifie par un calcul direct que la relation (1.2) est valable lorsque $m = 0$ ou $n = 1$; donc, on supposera dans ce qui va suivre que $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$.

Considérons le système d'équations

$$F_{m+\varkappa}(z_1, \ldots, z_n) = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3.1}$$

où $F_\nu(z_1, \ldots, z_n) = z_1^\nu + \ldots + z_n^\nu$. D'après la terminologie de [5], on entendra par rayon de solution du système (3.1) la totalité des solutions $\{\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n\}$ proportionnelles à une solution non triviale fixe $\{z_1, \ldots, z_n\}$. Il est aisé de voir qu'il existe seulement un nombre fini de rayons de solutions de (3.1). En effet, si $n = 2$, l'assertion est triviale. Pour $n \geqslant 3$, si le système d'équations (3.1) admettait une infinité de rayons de solutions, il existerait un facteur commun non constant $g(z_1, \ldots, z_n)$ des formes $F_{m+\varkappa}(z_1, \ldots, z_n)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$, ce qui entraînerait en particulier que

$$g(z_1, z_2, 0, \ldots, 0) \,|\, z_1^{m+1} + z_2^{m+1} \quad \text{et} \quad g(z_1, z_2, 0, \ldots, 0) \,|\, z_1^{m+2} + z_2^{m+2},$$

$g(z_1, z_2, 0, \ldots, 0)$ étant un polynôme non constant en z_1 et z_2. Mais on voit facilement que c'est impossible.

Il est encore facile de vérifier que le rang de la matrice

$$\left\| \frac{\partial F_{m+\varkappa}(z_1, \ldots, z_n)}{\partial z_j} \right\|_{\varkappa=1,2,\ldots,n-1;\; j=1,2,\ldots,n}$$

est égal à $n-1$ pour toutes les solutions non triviales $\{z_1, \ldots, z_n\}$ du système (3.1). Il en résulte que la multiplicité d'un rayon de solution de (3.1) est égale à 1, quel que soit le rayon de solution. Ainsi, on a démontré, en appliquant le théorème de Bézout [5], que le nombre des rayons de solutions mutuellement distincts du système (3.1) est exactement $(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$.

Soit $(z_1, \ldots, z_n)$ un système non trivial de $Z(m, n)$: il est clair qu'un système non trivial $(z_1, \ldots, z_n)$ de $Z(m, n)$ donne en général plusieurs rayons de solutions $\{z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}\}$ de (3.1), où π est une permutation sur $1, 2, \ldots, n$. Nous dirons que le système $(z_1, \ldots, z_n)$ admet une permutation π lorsqu'on a

$$\{z_1, \ldots, z_n\} = \{z_{\pi(1)}, \ldots, z_{\pi(n)}\}.$$

Nous allons déterminer toutes les permutations possibles, admises par un système non trivial $(z_1, \ldots, z_n)$ de $Z(m, n)$.

Étant donnée une permutation π sur $1, 2, \ldots, n$, on dit que π est de type $\langle l_1, l_2, \ldots, l_s\rangle$ si l'on a une décomposition complète de π en cycles π_k d'ordres l_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$:

$$\pi = \pi_1\pi_2\ldots\pi_s.$$

On a toujours $\sum_{k=1}^{s} l_k = n$.

Supposons donné un système non trivial $(z_1, \ldots, z_n)$ de $Z(m, n)$ admettant une permutation non identique π sur $1, \ldots, n$ de type $\langle l_1, \ldots, l_s\rangle$. Il existe alors un nombre $\lambda \neq 0, 1$ tel que

$$z_j = \lambda z_{\pi(j)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

d'où $\lambda^{l_k} = 1$ $(k = 1, \ldots, s)$, et par suite $\lambda^l = 1$, l désignant le plus grand commun diviseur des nombres entiers $l_1, \ldots, l_s$: ici on doit avoir $l > 1$ et $l|n$. Donc, on peut supposer sans nuire à la généralité que l'on a

$$z_j = \lambda^{a_j} z_{\beta(k-1)+1} \qquad \big(\beta(k-1)+1 \leqslant j \leqslant \beta(k)\big)$$

pour $k = 1, \ldots, s$, où a_j $(j = 1, \ldots, n)$ sont des nombres entiers tels que $0 \leqslant a_j \leqslant l-1$ et $\beta(0) = 0$, $\beta(k) = l_1 + l_2 + \ldots + l_k$ $(1 \leqslant k \leqslant s)$. Il en résulte que

$$\sum_{k=1}^{s} l_k z_{\beta(k-1)+1}^{m+\varkappa} = 0 \tag{3.2}$$

pour tous les $\varkappa$ tels que $l|m+\varkappa$ $(1 \leqslant \varkappa \leqslant n-1)$.

Le nombre des équations contenues dans (3.2) est égal à

$$\left[\frac{m+n-1}{l}\right] - \left[\frac{m}{l}\right] = \begin{cases} \dfrac{n}{l} - 1 & \text{si} \quad l|m, \\[2ex] \dfrac{n}{l} & \text{si} \quad l\nmid m. \end{cases}$$

Il s'ensuit que le systéme d'équations (3.2) peut admettre des solutions non triviales, si et seulement si $l|m$ et $l_k = l$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$. C'est une conséquence directe du Lemme 1: en effet, on a toujours $s \leqslant n/l$ et, s'il existe un indice k $(1 \leqslant k \leqslant s)$ tel que $l_k > l$, on aura

$$sl < \sum_{k=1}^{s} l_k = n, \qquad \text{d'où} \qquad s \leqslant \frac{n}{l} - 1.$$

On a ainsi démontré que, si un système non trivial $(z_1, \ldots, z_n)$ de $Z(m, n)$ admettait une permutation non identique π sur $1, 2, \ldots, n$, π serait nécessairement de type $\langle l, l, \ldots, l\rangle$, l étant un commun diviseur > 1 de m et n et un tel système $(z_1, \ldots, z_n)$ serait un système attaché à l'un des systèmes de $Z(m/l, n/l)$. Inversement, si $(z_1, \ldots, z_n)$ est un système non trivial de $Z(m, n)$ attaché à l'un des systèmes de $Z(m/l, n/l)$, où l est un commun diviseur de m et n, il est aisé de voir que $(z_1, \ldots, z_n)$ admet une permutation π de type $\langle l, l, \ldots, l\rangle$.

Or, nous allons déterminer le nombre des contributions des systèmes non triviaux de $Z(m, n)$ au nombre des rayons de solutions mutuellement distinctes du système (3.1).

Si $(m, n) = 1$, on aura

$$n!B(m, n) = (m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)$$

ou

$$B(m, n) = \frac{(m+n-1)!}{m!\,n!},$$

car il n'y a aucun des systèmes non triviaux de $Z(m, n)$ qui n'admette que la permutation identique.

Dans le cas où $(m, n) > 1$, soit l un commun diviseur > 1 de m et n et soit N_l le nombre des systèmes non triviaux de $Z(m, n)$ qui admettent une permutation sur $1, \ldots, n$, exactement de type $\langle l, l, \ldots, l\rangle$. En vertu du Lemme 2, on peut vérifier sans peine que

$$N_l = \sum_{d|(m,n)l^{-1}} \mu(d) B\left(\frac{m}{dl}, \frac{n}{dl}\right).$$

Cela établi, on a enfin

$$n!\Big(B(m, n) - \sum_{\substack{l|(m,n)\\ l>1}} N_l\Big) + \sum_{\substack{l|(m,n)\\ l>1}} \frac{n!}{l} N_l = (m+1)\ldots(m+n-1),$$

d'où l'on obtient, en observant que $B(m, n) = \sum_{l|(m,n)} N_l$,

$$\sum_{l|(m,n)} \frac{1}{l} N_l = \frac{(m+n-1)!}{m!\,n!}.$$

Comme on le voit immédiatement, cette dernière relation est équivalente à la formule (1.2). Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Travaux cités

[1] Vera T. Sós et P. Turán, *On some new theorems in the theory of Diophantine approximations*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 6 (1955), p. 241-255.

[2] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, édition chinoise, Peking 1956.

[3] S. Uchiyama, *Complex numbers with vanishing power sums*, Proc. Japan Acad. 33 (1957), p. 10-12.

[4] — *Systems of n complex numbers with vanishing power sums*, J. Fac. Sci. Hokkaidô Univ., Ser. I, sous presse.

[5] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, vol. II, deuxième édition, Berlin 1940.

UNIVERSITÉ DE HOKKAIDÔ

Reçu par la Rédaction le 23. 10. 1957