(5.3), (6.2) and (6.3) give

$$\max_{1\leqslant x\leqslant T}|M(x)| > T^{1/2}\exp\left(-\frac{\log T}{\sqrt{\log\log T}}\right).$$

Remark 2. Note that the Theorem gives some lower estimatics in the theory of Farey fractions. Let $r_\nu^{(n)}$, $1\leqslant \nu\leqslant A(n)$, denote the νth Farey fraction for the number n, $A(n)=\sum_{q=1}^{N}\varphi(q)$, $\delta_\nu^{(n)}=r_\nu^{(n)}-\nu/A(n)$.

Then we have

Either $\sum_{\nu=1}^{A(N)}|\delta_\nu^{(N)}| = O(\sqrt{N})$ *is false, or*

$$\max_{1\leqslant n\leqslant N}\sum_{\nu=1}^{A(n)}|\delta_\nu^{(n)}| \geqslant \frac{1}{2\pi}N^{1/2}\exp\left(-\frac{\log N}{\sqrt{\log\log N}}\right)$$

(for N sufficiently large) is true.

For the proof it suffices to apply the inequality

$$|M(n)|\leqslant 2\pi\sum_{\nu=1}^{A(n)}|\delta_\nu^{(n)}| \qquad \text{(see [1], p.169)}.$$

References

[1] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd II. Leipzig 1927.
[2] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-function*, Oxford 1951.
[3] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1957

Quadratische Formen und Modulfunktionen

von
M. Eichler (Marburg-Lahn)

Einleitung

Zu den ältesten Themen der analytischen Zahlentheorie gehört die Frage nach der Anzahl der Darstellungen von natürlichen Zahlen durch definite quadratische Formen und speziell die Behandlung dieser Frage mit Hilfe von Modulfunktionen. Ungeachtet der langen Geschichte, die dieses Thema gehabt hat, verdankt man die am weitesten reichenden Entdeckungen über die Zusammenhänge von Modulfunktionen und definiten quadratischen Formen den Arbeiten von E. Hecke der Jahre 1937-1941, auf deren zusammenfassende Darstellung [9] wir hier mehrfach Bezug nehmen müssen. Hecke zeigte, daß sich die fraglichen Darstellungsanzahlen aus den Koeffizienten gewisser Darstellungen der seit langem wohlbekannten Modularkorrespondenzen berechnen lassen. Durch diese Tatsache wird die Theorie der quadratischen Formen mit der Algebra der algebraischen Funktionenkörper verbunden, was unter den Händen Heckes und seiner Schüler zu zahlreichen schönen Anwendungen führte.

In den vergangenen 3 Jahren habe ich die Spuren der genannten Darstellungen der Modularkorrespondenzen unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen bestimmt. Mit dieser Kenntnis hat man jetzt ein sicher arbeitendes Verfahren in der Hand, die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch eine definite quadratische Form formelmäßig zu berechnen, falls die Form nicht allzu kompliziert ist. Es wäre aber ein Irrtum zu glauben, daß hiermit das angeschnittene Problem dem endgültigen Abschluß nahe gebracht worden wäre. Ich weise in § 4 vielmehr auf 7 offene Probleme hin, die teilweise recht umfangreich sind, und deren Bearbeitung mit den heutigen Hilfsmitteln möglich erscheint.

Der Zweck dieser Abhandlung ist es, die Ergebnisse früherer Arbeiten zusammenzutragen, sie zu erläutern und zu ergänzen. Auf eine ausführliche Wiederholung der Beweise darf verzichtet werden. In § 1 bringen wir nur einen neuen und allgemeiner gültigen Beweis für die Existenz des Normalintegraden 3. Gattung.

§ 1. Die Modulformen

1. Es sei F eine natürliche Zahl. Mit $\Gamma_0(F)$ bezeichnet man die Modulgruppe der Stufe F, d. h. die Gruppe der linearen Substitutionen

$$\tau \to \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1, \quad a \equiv b \equiv \frac{c}{F} \equiv d \equiv 0 \bmod 1. \tag{1}$$

$\Gamma_0(F)$ besitzt in der oberen Halbebene $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ einen Fundamentalbereich mit

$$h = \sum_{t|F} \varphi(t, Ft^{-1}) \tag{2}$$

parabolischen Spitzen, wo (t, Ft^{-1}) den größten gemeinsamen Teiler und φ die Eulersche Funktion bezeichnet; t durchläuft die positiven Teiler von F. Der Fundamentalbereich besitzt ferner elliptische Ecken der Ordnungen 2 und 3 in den Anzahlen

$$e_2 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 4|F, \\ \prod\limits_{p|F}\left(1+\left(\frac{-4}{p}\right)\right), & \text{sonst}, \end{cases} \qquad e_3 = \begin{cases} 0, & \text{wenn } 9|F, \\ \prod\limits_{p|F}\left(1+\left(\frac{-3}{p}\right)\right), & \text{sonst}, \end{cases} \tag{3}$$

wo p alle Primteiler von F durchläuft. Endlich ist der hyperbolische Flächeninhalt

$$\mu = \tfrac{1}{3}\pi F \prod_{p|F} (1+p^{-1}). \tag{4}$$

Aus (2)-(4) bekommt man bekanntlich das Geschlecht als

$$g = 1 + \frac{\mu}{4\pi} - \frac{h}{2} - \frac{e_2}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{e_3}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right). \tag{5}$$

Es sei nun $\chi(a)$ ein Charakter mit dem Führer F, der die Werte 1 und -1 annimmt. Die Substitutionen (1) mit $\chi(a) = 1$ bilden dann eine Untergruppe $\Gamma_0'(F)$ vom Index 2 in $\Gamma_0(F)$ mit den (2)-(5) entsprechenden Anzahlen

$$h' = 2h, \tag{2'}$$

$$\begin{aligned} &e_2' = \text{Anzahl der Lösungen von } x^2+1 \equiv 0 \bmod F \text{ mit } \chi(x) = 1, \\ &e_3' = 2e_3, \end{aligned} \tag{3'}$$

$$\mu' = 2\mu, \tag{4'}$$

$$g' = 1 + \frac{\mu'}{4\pi} - \frac{h'}{2} - \frac{e_2'}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) - \frac{e_3'}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right). \tag{5'}$$

2. Die bei $\Gamma_0(F)$ und $\Gamma_0'(F)$ invarianten Modulfunktionen bilden zwei Körper $K(F)$, $K'(F)$, deren zweiter eine Erweiterung 2. Grades des ersteren ist. Neben den invarianten Funktionen interessieren hier besonders die durch die Funktionalgleichungen

$$\varphi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^{-n} = \chi(a)\varphi(\tau), \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon\, \Gamma_0(F) \tag{6}$$

gekennzeichneten Modulformen des Grades $-n$. Für gerades n sind die formalen Ausdrücke $\varphi(\tau)d\tau^{n/2}$ Differentiale des Grades $\frac{1}{2}n$ des Körpers $K(F)$ bzw. $K'(F)$, je nachdem $\chi(a) = 1$ für alle a ist oder nicht. Jeder dieser Modulformen $\varphi(\tau)$ ist bekanntlich ein Divisor D zugeordnet: ist u eine lokale Uniformisierende und U ihr Primdivisor, so ist D genausooft durch U teilbar wie $\varphi(\tau)(d\tau/du)^{n/2}$. Der Divisor D gehört der $\frac{1}{2}n$-ten Potenz der kanonischen Klasse W an. Es interessieren im Folgenden vornehmlich die überall in τ holomorphen Modulformen, welche überdies in den parabolischen Spitzen verschwinden. Wir nennen sie die *Modulformen* 1. *Gattung des Grades* $-n$. Im Falle $n = 2$ sind die entsprechenden Differentiale $\varphi(\tau)d\tau$ die Integranden 1. Gattung. Für $n > 2$ enthält indessen der zugehörige Divisor die Primdivisoren der parabolischen Spitzen in einer Potenz $\geqslant 1-\frac{1}{2}n$. Die Anzahlen G_n bzw. G_n' der linear unabhängigen Modulformen 1. Gattung des Grades $-n$ berechnet man leicht mittels des Riemann-Rochschen Satzes ([6], S. 272):

$$G_n = \begin{cases} g, & n = 2, \\ (n-1)(g-1) + h\dfrac{n-2}{2} + e_2\left(\dfrac{n-2}{2} - \left[\dfrac{n-2}{4}\right]\right) + e_3\left(\dfrac{n-2}{2} - \left[\dfrac{n-2}{3}\right]\right), & \\ & n > 2,\ n \equiv 0 \bmod 2, \end{cases} \tag{7}$$

$$G_n' = \begin{cases} g', & n = 2, \\ (n-1)(g'-1) + h'\dfrac{n-2}{2} + e_2'\left(\dfrac{n-2}{2} - \left[\dfrac{n-2}{4}\right]\right) + e_3'\left(\dfrac{n-2}{2} - \left[\dfrac{n-2}{3}\right]\right), & \\ & n > 2,\ n \equiv 0 \bmod 2. \end{cases} \tag{7'}$$

Die Anzahl derjenigen $\varphi(\tau)$ 1. Gattung, welche (6) mit einem Charakter $\chi(a) \neq 1$ erfüllen, ist also $G_n' - G_n$.

Modulformen eines ungeraden Grades n können nach (6) nur für einen Charakter mit der Eigenschaft $\chi(-1) = -1$ existieren, was wir so ausdrücken wollen:

$$G_n = 0, \qquad n \equiv 1 \bmod 2. \tag{8}$$

Diesen Modulformen ist in gleicher Weise ein Divisor des Körpers $K'(F)$ zugeordnet, welcher der Klasse V^n angehört, wo V die dadurch eindeutig gekennzeichnete Divisorenklasse ist, daß ihr Quadrat $V^2 = W$ die kanonische Klasse ist. $K'(F)$ enthält also eine solche Klasse V, $K(F)$ dagegen nicht. Die Anzahl G_n' der linear unabhängigen Modulformen 1. Gattung eines ungeraden Grades $-n < -2$ läßt sich in gleicher Weise mittels des Riemann-Rochschen Satzes bestimmen und ist

$$(8') \quad G_n' = (n-1)(g'-1)+h'\frac{n-3}{2}+e_2'\left[\frac{n}{4}\right]+e_3'\left[\frac{n}{3}\right], \qquad n>2,\ n\equiv 1 \bmod 2.$$

3. Es folgt jetzt ein Bericht über die in [6] entwickelte Theorie der verallgemeinerten Abelschen Integrale. Es sei fortan stets $n > 1$. Für eine Modulform $\varphi(\tau)$ des Grades $-n$ wird das Integral

$$(9) \qquad \Phi(\tau) = \frac{1}{(n-2)!}\int_{\tau_0}^{\tau}(\tau-\sigma)^{n-2}\varphi(\sigma)\,d\sigma+\Theta(\tau)$$

gebildet. Die untere Integrationsgrenze τ_0 und ebenso die „Intergrationskonstante" $\Theta(\tau)$, ein Polynom vom Grade $n-2$, sind dabei willkürlich. Wir nennen (9) ein (verallgemeinertes) Abelsches Integral 1., 2., oder 3. Gattung, je nachdem es überall holomorph, meromorph, oder mit logarithmischen Singularitäten behaftet ist. Sinngemäß bezeichnen wir die Integranden $\varphi(\tau)$ als Modulformen 1., 2., oder 3. Gattung. Die Modulformen 2. Gattung dürfen im Endlichen nur Pole mit den Hauptteilen $c_n(\tau-\tau_0)^{-n}+c_{n+1}(\tau-\tau_0)^{-n-1}+\ldots$ haben; in den parabolischen Spitzen sind beliebige Pole gestattet. Integrale 1. und 2. Gattung sind vom Integrationswege unabhängig.

Um das Verhalten von Abelschen Integralen bei Modulsubstitutionen bequemer beschreiben zu können, führen wir allgemein die Bezeichnung

$$(10) \qquad \Phi(\tau)\circ\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right]^n = \Phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\left(\frac{c\tau+d}{\sqrt{|ad-bc|}}\right)^n$$

ein. Es gilt für alle $\varepsilon\in\Gamma_0(F)$:

$$(11) \qquad \Phi(\tau)\circ[\varepsilon]^{n-2} = \chi(\varepsilon)\Phi(\tau)+\Omega_\varepsilon(\tau), \qquad \chi(\varepsilon) = \chi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \chi(a)$$

mit einem Polynom $\Omega_\varepsilon(\tau)$ vom Grade $n-2$, der zu ε gehörigen *Periode* von $\Phi(\tau)$, welches der Funktionalgleichung

$$(12) \qquad \Omega_{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\tau)-\Omega_{\varepsilon_1}(\tau)\circ[\varepsilon_2]^{n-2}-\chi(\varepsilon_1)\Omega_{\varepsilon_2}(\tau) = 0$$

genügt. Addiert man zu $\Theta(\tau)$ in (9) ein weiteres Polynom $\Theta_1(\tau)$, so addiert sich zu $\Omega_\varepsilon(\tau)$:

$$\Theta_1(\tau)\circ[\varepsilon]^{n-2}-\chi(\varepsilon)\Theta_1(\tau) = \Theta_1(\tau)\circ([\varepsilon]^{n-2}-\chi(\varepsilon)[1]^{n-2}).$$

Durch $p(\tau)\to p(\tau)[\varepsilon]^{n-2}$ wird im Modul M^{n-2} der Polynome $(n-2)$-ten Grades von τ eine Darstellung der Modulgruppe definiert. Die Funktionalgleichung (12) besagt nun: die Perioden $\Omega_\varepsilon(\tau)$ der Abelschen Integrale (9) sind 1-Cocyclen der Gruppe $\Gamma_0(F)$ in dem Modul M^{n-2}. Und zwar ist jeder Modulform 1. oder 2. Gattung wegen der Willkür der Integrationskonstanten $\Theta(\tau)$ eine Cohomologieklasse zugeordnet.

4. Die Modulformen des nicht negativen Grades $n-2$, d. h. die Lösungen der Funktionalgleichung $\Phi(\tau)\circ[\varepsilon]^{n-2} = \Phi(\tau)$ können nach (11) als spezielle Abelsche Integrale mit den Perioden 0 aufgefasst werden. Leitet man (11) mit einem beliebigen Polynom $\Omega_\varepsilon(\tau)$ vom Grade $n-2$ genau $(n-1)$-mal ab, so erweist sich $\varphi(\tau) = \left(\dfrac{d}{d\tau}\right)^{n-1}\Phi(\tau)$ als eine Modulform des Grades $-n$. Dieses gilt speziell für die $(n-1)$-fachen Ableitungen der Modulformen $(n-2)$-ten Grades, welche wir *integrable Modulformen* nennen wollen. Mit dieser Bezeichnung gilt der folgende Satz:

Die Restklassen der Modulformen 1. *und* 2. *Gattung des Grades* $-n$ *modulo den integrablen Modulformen auf der einen Seite und die* 1-*Cohomologieklassen von* $\Gamma_0(F)$ *in* M^{n-2} *auf der anderen entsprechen sich in beiden Richtungen eindeutig.*

Der Beweis wurde für gerades n durch Abzählung der Rangzahlen der Restklassen von Modulformen und der 1-Cohomologieklassen geführt; er läßt sich vermutlich auf den Fall eines ungeraden n übertragen. Andererseits könnte man eine Funktion $\Phi(\tau)$, welche (11) mit einem vorgegebenen Periodensystem $\Omega_\varepsilon(\tau)$ erfüllt, auch direkt mit Hilfe von gewissen, den Poincaréschen nachgebildeten Reihen konstruieren (s. hierzu Nr. 6). Dieses Verfahren ist auch für ungerades n durchführbar. Der genannte Satz wird allerdings im Folgenden keine Rolle spielen.

5. Für zwei Modulformen $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$ 1. oder 2. Gattung vom Grade $-n$ führt man ein Skalarprodukt durch

$$(13) \qquad I(\varphi,\psi) = \text{Summe der Residuen von } \Phi(\tau)\psi(\tau)$$

ein, wo $\Phi(\tau)$ das Integral (9) von $\varphi(\tau)$ ist. Man zeigt leicht, daß $I(\varphi,\psi)$ von der willkürlichen Integrationskonstanten von $\Phi(\tau)$ nicht abhängt, und daß

$$(14) \qquad I(\varphi,\psi) = (-1)^{n-1}I(\psi,\varphi)$$

gilt. $I(\varphi,\psi)$ verschwindet, wenn φ und ψ beide von 1. Gattung sind, oder wenn φ oder ψ integrable ist.

Man kann ferner $I(\varphi,\psi)$ als eine bilineare Relation in den Koeffizienten der Perioden $\Omega_\varepsilon(\tau)$, $\Omega_\varepsilon'(\tau)$ von φ, ψ für alle ε aus einem Erzeugendensystem der Gruppe $\Gamma_0(F)$ ausdrücken. Doch werden wir hiervon keinen Gebrauch machen.

6. Bei der nun folgenden Konstruktion des *Normalintegranden* 3. *Gattung* weichen wir von [6] ab, da die dortigen Überlegungen nicht auf den Fall eines ungeraden n übertragbar scheinen. Ein ähnliches Konstruktionsverfahren wie wir hier führt H. Petersson in [16] durch. Der Normalintegrand 3. Gattung ist eine Funktion $K(\tau, \sigma)$ in zwei Variablen mit den folgenden Eigenschaften:

1) Für $n > 2$ ist $K(\tau, \sigma)$ eine Modulform des Grades $-n$ in τ; für $n = 2$ gilt dieses für $K(\tau, \sigma) - K(\tau, \sigma_0)$ mit einer beliebigen Konstanten σ_0.

2) $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial\sigma^{n-1}} K(\tau, \sigma) = (-1)^n \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial\tau^{n-1}} K(\sigma, \tau)$.

3) $K(\tau, \sigma) = \dfrac{1}{\sigma-\tau} + K'(\tau, \sigma)$ mit einer in τ und σ überall holomorphen Funktion $K'(\tau, \sigma)$.

4) Für jede Modulform $\varphi(\sigma)$ 1. Gattung ist die Residuensumme von $K(\tau, \sigma)\varphi(\sigma)$ bezüglich σ in jedem Fundamentalbereich gleich $\varphi(\tau)$.

5) $K(\tau, \sigma) = (-1)^{n-1} \sum\limits_i \varphi_i(\tau)\Psi_i(\sigma) + K_3(\tau, \sigma)$

wo die $\varphi_i(\tau)$ eine Basis der Modulformen 1. Gattung bilden und die $\Psi_i(\tau)$ Integrale 2. Gattung mit

$$(15) \qquad I(\varphi_i, \psi_k) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = k, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq k \end{cases}$$

sind, und wo $K_3(\tau, \sigma)$ eine Modulform $(n-2)$-ten Grades in σ ist.

Wir führen den Beweis unter der Voraussetzung $n > 2$, da der Fall $n = 2$ schon in [6] behandelt wurde.

Man bildet zunächst die formale Reihe

$$(16) \qquad K_1(\tau, \sigma) = \sum_\varepsilon \frac{1}{\dfrac{a\tau+b}{c\tau+d} - \sigma} \cdot \frac{\chi(d)}{(c\tau+d)^n}, \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \epsilon\, \Gamma_0'(F)$$

welche aber nicht gleichmäßig konvergiert. Sind c, d mit $c \equiv 0 \bmod F$, $(d, F) = 1$ gegeben, so kann man a, b auf unendlich viele Weisen so bestimmen, daß $ad - bc = 1$ ist. Es gibt genau eine Lösung a_0, b_0 dieser diophantischen Gleichung mit $|b_0| \leqslant |\tfrac{1}{2}d|$, $|b_0 - 1| < |\tfrac{1}{2}d|$. Alle übrigen sind dann $a = a_0 + mc$, $b = b_0 + md$ mit $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Faßt man in (16) die Glieder mit entgegengesetzt gleichen m zusammen, so entsteht die für $n \geqslant 3$ absolut konvergente Reihe

$$(16') \quad K_1(\tau, \sigma) = \sum_{c,d} \left[\frac{1}{\dfrac{a_0\tau+b_0}{c\tau+d} - \sigma} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\dfrac{a_0\tau+b_0}{c\tau+d} - \sigma}{\left(\dfrac{a_0\tau+b_0}{c\tau+d} - \sigma\right)^2 - m^2} \right] \frac{\chi(d)}{(c\tau+d)^n}.$$

Um zu zeigen, daß $K_1(\tau, \sigma)$ eine Modulform in τ ist, muß man einen Kunstgriff von Hecke anwenden. Man bildet für ein reelles $t > 0$ die Reihe

$$(16'') \qquad K_1(\tau, \sigma; t) = \sum_\varepsilon \frac{1}{\left(\dfrac{a_0\tau+b_0}{c\tau+d} + m - \sigma\right) \left|\dfrac{a_0\tau+b_0}{c\tau+d} + m - \sigma\right|^t} \cdot \frac{\chi(d)}{(c\tau+d)^n},$$

welche für τ und σ in einem beschränkten Gebiet absolut und gleichmäßig konvergiert. Bei Ausübung von Substitutionen aus $\Gamma_0(F)$ auf τ verhält sie sich wie eine Modulform vom Grade $-n$. Bei Annäherung von t an 0 geht $K_1(\tau, \sigma; t)$ stetig in die Funktion (16′) über. Damit ist nachgewiesen, daß $K_1(\tau, \sigma)$ die Eigenschaften 1) und 3) hat.

Eine elementare Rechnung, bei der dieser Kunstgriff noch einmal Anwendung findet, zeigt ferner, daß

$$(17) \qquad K_1\left(\tau, \frac{a\sigma+b}{c\sigma+d}\right)(c\sigma+d)^{n-2} - \chi(\varepsilon) K_1(\sigma, \tau) = \Omega_\varepsilon(\tau, \sigma), \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit der Abkürzung $\chi(\varepsilon) = \chi(d)$ für jedes $\varepsilon \epsilon \Gamma_0(F)$ holomorph in τ und ein Polynom $(n-2)$-ten Grades in σ ist. Daher ist die $(n-1)$-te Ableitung nach σ von $K_1(\tau, \sigma)$ auch in σ eine Modulform des Grades $-n$. Die Differenz

$$M(\tau, \sigma) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial\sigma^{n-1}} K_1(\tau, \sigma) - (-1)^n \frac{\partial^{n-1}}{\partial\tau^{n-1}} K_1(\sigma, \tau)$$

ist überall holomorph und daher durch eine Basis $\varphi_i(\tau)$ der Modulformen 1. Gattung darstellbar:

$$M(\tau, \sigma) = \sum c_{ik} \varphi_i(\tau) \varphi_k(\sigma).$$

Dabei ist offenbar $c_{ik} = -(-1)^n c_{ki}$. Die Funktion

$$(18) \qquad K(\tau, \sigma) = K_1(\tau, \sigma) - \tfrac{1}{2} \sum c_{ik} \varphi_i(\tau) \Phi_k(\sigma)$$

hat dann neben 1) und 3) auch die Eigenschaft 2).

$K(\tau, \sigma)$ ist wegen (17) hinsichtlich der Variablen σ ein Integral 2. Gattung. Daher ist die in 4) genannte Residuensumme eindeutig erklärt und hat den dort behaupteten Wert zufolge 3).

Wegen (17) erfüllt $\Omega_\varepsilon(\tau,\sigma)$ die Gleichungen (12); ferner verifiziert man leicht

$$\Omega_\varepsilon(\tau,\sigma)=0 \quad \text{für alle} \quad \varepsilon=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{19}$$

Wegen (12) und (19) hängt $\Omega_\varepsilon(\tau,\sigma)$ nur von der zweiten Zeile von ε ab, sodaß man schreiben kann:

$$\Omega_\varepsilon(\tau,\sigma)=\Omega_{(c,d)}(\tau,\sigma).$$

Man bilde jetzt die Reihe

$$L(\tau,\sigma)=\sum_{c\equiv 0 \bmod F}\chi(d)\frac{\Omega_{(c,d)}(\tau,\sigma)}{(c\sigma+d)^{n+n_1}} \tag{20}$$

welche für $n_1>2$ absolut und gleichmäßig für alle σ in einem beschränkten Bereich konvergiert. Unter Benutzung von (12) verifiziert man leicht, daß für alle $\varepsilon\epsilon\Gamma_0(F)$

$$L(\tau,\sigma)\circ[\varepsilon]_\sigma^{-n_1-2}=\chi(\varepsilon)L(\tau,\sigma)+\Omega_\varepsilon(\tau,\sigma)\psi(\sigma)$$

gilt mit der Eisensteinreihe

$$\psi(\sigma)=\sum_{c\equiv 0 \bmod F}\frac{\chi(d)}{(c\tau+d)^{n+n_1}},$$

die nicht identisch Null ist, wenn man $n+n_1$ als gerade voraussetzt. Also ist

$$K_2(\tau,\sigma)=\frac{L(\tau,\sigma)}{\psi(\sigma)}$$

eine Funktion, welche denselben Funktionalgleichungen (17) genügt wie $K(\tau,\sigma)$. Daher ist die Differenz $K_3=K-K_2$ eine Modulform $(n-2)$-ten Grades in σ.

Wir halten

$$K(\tau,\sigma)=K_2(\tau,\sigma)+K_3(\tau,\sigma) \tag{21}$$

fest. K_2 ist konstruktionsgemäß eine Modulform 1. Gattung in τ; wir stellen sie durch eine Basis dar

$$K_2(\tau,\sigma)=(-1)^{n-1}\sum_i\varphi_i(\tau)\Psi_i(\sigma) \tag{22}$$

mit gewissen Funktionen $\Psi_i(\sigma)$, von denen wir schon soviel aussagen können, daß es Integrale 2. Gattung sind. Für eine beliebige der Modulformen $\varphi_i(\sigma)$ ist nun die Residuensumme in σ von $K(\tau,\sigma)\varphi_i(\sigma)$ wegen der Eigenschaft 3) einerseits gleich $\varphi_i(\tau)$. Andererseits ist die Residuensumme von $K_3(\tau,\sigma)\varphi_i(\sigma)$ nach Nr. 5 gleich 0, und die Residuensumme von $K_2(\tau,\sigma)\varphi_i(\sigma)$ wegen (14) gleich

$$\varphi_i(\sigma)=\sum\varphi_k(\tau)I(\varphi_i,\psi_k).$$

Das ergibt die Eigenschaft 5).

7. Obwohl es für die späteren Anwendungen nicht mehr benötigt wird, möchte ich noch der Vollständigkeit halber skizzieren, wie man von der Existenz des Normalintegranden 3. Gattung aus den Riemann-Rochschen Satz nebst einer Erweiterung erhalten kann, die A. Weil den inhomogenen Riemann-Rochschen Satz nannte [21], s. hierzu auch Petersson [16]. Zunächst erkennt man, daß jede Modulform $\varphi(\tau)$ in eindeutiger Weise in der Form

$$\varphi(\tau)=\varphi_0(\tau)+\varphi_1(\tau)+\sum_i\Big(c_{i,1}K(\tau,\sigma_i)+\ldots+c_{i,n-1}\frac{\partial^{n-2}}{\partial\sigma_i^{n-2}}K(\tau,\sigma_i)\Big) \tag{23}$$

geschrieben werden kann, wo $\varphi_0(\tau)$ eine Form 1. Gattung und $\varphi_1(\tau)$ eine integrable Form ist. Aus (23) kann man aber den Riemannschen Teil des Riemann-Rochschen Satzes fast unmittelbar entnehmen, und zwar für jedes n.

Der inhomogene Satz von Riemann-Roch kann so ausgesprochen werden: eine im Sinne der Metrik (13) auf allen Modulformen 1. Gattung senkrechte Modulform 1. oder 2. Gattung ist die Summe einer integrablen Modulform und einer Modulform 1. Gattung. Zum Beweise benutzen wir das Symbol $\partial^r/\partial\sigma^r$ auch für negative r, wo es die r-fache unbestimmte Integration mit geeigneten Integrationskonstanten bedeute. Aus der Symmetrieeigenschaft 2) folgt nun mit einer integrablen Modulform χ in τ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\nu}{\partial\sigma^\nu}K(\tau,\sigma)&=(-1)^n\frac{\partial^{\nu-n+1}\partial^{n-1}}{\partial\sigma^{\nu-n+1}\partial\tau^{n-1}}K(\sigma,\tau)\\&=(-1)^n\sum_i\Big(\frac{\partial^{\nu-n+1}}{\partial\sigma^{\nu-n+1}}\varphi_i(\sigma)\Big)\psi_i(\tau)+\chi(\sigma,\tau);\end{aligned}$$

was in (23) eingesetzt sofort die Behauptung ergibt.

Endlich folgt hieraus: die zu einer Basis $\varphi_i(\tau)$ der Modulformen 1. Gattung „komplementären" Modulformen $\psi_i(\tau)$ 2. Gattung bilden zusammen mit den ersteren eines Basis des Moduls der Restklassen der Modulformen 1. und 2. Gattung modulo den integrablen Modulformen.

§ 2. Die Modularkorrespondenzen

1. Die Modularkorrespondenzen T_m für natürliche Zahlen m stellen sich als lineare Operatoren $R_\chi^n(T_m)$ im Raume der Modulformen 1. Gattung vom Grade $-n$ dar. Die in gleicher Weise zu definierende Darstellung der T_m im Raume aller Modulformen 1. und 2. Gattung wird nicht direkt vorkommen. Unter Benutzung der Abkürzung (10) wird gesetzt:

$$(24)\qquad \varphi(\tau)\circ T_m = R_\chi^n(T_m)\varphi(\tau) = \sum \chi(u)\varphi(\tau)\circ\left[\begin{pmatrix} u & v\\ 0 & w\end{pmatrix}\right]^{-n}$$

$$= \sum \chi(u)\varphi\left(\frac{u\tau+v}{w}\right)\left(\frac{u}{w}\right)^{n/2},$$

summiert über ein System von natürlichen Zahlen u, v, w mit

$$(25)\qquad (u, F) = 1,\quad u>0,\quad uw = m,\quad 0\leqslant v< w.$$

Hecke fügt rechts in (24) noch den Faktor $m^{n/2-1}$ hinzu, was für die Anwendung auf Koeffizientenprobleme von Modulformen bequem ist. Wir müssen hier im Unterschied zu Hecke zwischen einer Korrespondenz T im klassischen Sinne (an den ich gerade in diesem Zusammenhang in [7] erinnerte) und einer Darstellung $R(T)$ unterscheiden.

Wenn $m = r^2$ eine zur Stufe F teilerfremde Quadratzahl ist, so enthält T_m den Summanden T_1, die Einheitskorrespondenz:

$$(26)\qquad T_{r^2} = T_{r^2}^* + T_1,$$

wo $T_{r^2}^*$ dadurch definiert ist, daß in (25) das Tripel $u = w = r$, $v = 0$ auszulassen ist. $T_{r^2}^*$ und T_m für $m\neq r^2$ führen bis auf endlich viele Ausnahmen jeden Punkt der Riemannschen Fläche von $K(F)$ in einen verschiedenen über; kurz, sie besitzen nur endlich viele Fixpunkte. Dieser Umstand wird im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

T_m kann auch als linearer Operator im Raume der Abelschen Integrale durch

$$\Phi(\tau)\circ T_m = \sum \chi(u)\Phi(\tau)\circ\left[\begin{pmatrix} u & v\\ 0 & w\end{pmatrix}\right]^{n-2} + \Theta(\tau)$$

erklärt werden, wobei $\Theta(\tau)$ eine willkürliche „Integrationskonstante" ist. Es zeigt sich, daß die Anwendung von T_m und die Integralbildung (9) vertauschbare Operationen sind. Das führt endlich zu einer Darstellung von T_m im Raume der Cohomologieklassen von $\Gamma_0(F)$ in M^{n-2}, welche sich als die Summe von 2 mit $R_\chi^n(T_m)$ äquivalenten Darstellungen erweist ([6], S. 288; [7], S. 201).

Wichtig für das Folgende sind besonders die Formeln von Hecke, in denen p eine Primzahl bedeutet:

$$(27)\qquad \begin{cases} T_{m_1}\cdot T_{m_2} = T_{m_1m_2}, & (m_1, m_2) = 1,\\ T_{p^{s_1}}\cdot T_{p^{s_2}} = \displaystyle\sum_{\sigma=0}^{\min(s_1,s_2)} \chi(p^\sigma)p^\sigma T_{p^{s_1+s_2-2\sigma}}, & p\nmid F,\\ T_{p^{s_1}}\cdot T_{p^{s_2}} = T_{p^{s_1+s_2}}, & p\mid F.\end{cases}$$

2. Die algebraischen Grundlagen des Berechnung der Spuren von $R_\chi^n(T_m)$, an die ich im folgenden kurz erinnere, finden sich in [6]. Diese Spur ist offenbar

$$(28)\qquad \mathrm{Sp}\big(R_\chi^n(T_m)\big) = (-1)^{n-1}\sum_i I(\varphi_i\circ T_m, \psi_i),$$

wo $\varphi_i(\tau)$ eine Basis der Modulformen 1. Gattung und $\psi_i(\tau)$ die hierzu „komplementäre" Basis der Modulformen 2. Gattung ist, wie sie in dem Normalintegranden $K(\tau,\sigma)$ 3. Gattung auftreten. Man wendet nun $T_m = T_m(\tau)$ hinsichtlich der Variablen τ auch auf den Summanden $K_3(\tau,\sigma)$ von $K(\tau,\sigma)$ an und setzt danach $\sigma = \tau$. Wenn man die Voraussetzung macht, daß T_m nur endlich viele Fixpunkte hat, so entsteht auf diese Weise wegen der Eigenschaft 5) eine Modulform des Grades -2 in τ. Deren Residuensumme ist bekanntlich 0. Nunmehr folgt aus (28)

$$(29)\qquad \mathrm{Sp}\big(R_\chi^n(T_m)\big) = \text{Summe der Residuen von } [K(\tau,\sigma)\circ T_m(\tau)]_{\sigma=\tau},$$

sofern T_m nur endlich viele Fixpunkte hat, d. h. nach Nr. 1, wenn m nicht das Quadrat einer zur Stufe teilerfremden Zahl ist. In diesem Ausnahmefalle zerlegt man T_m gemäß (26) und berechnet die Spur von T_m^* nach (29). Die Spur von $R_\chi^n(T_1)$ muß sein:

$$(30)\qquad \mathrm{Sp}\big(R_\chi^n(T_1)\big) = \begin{cases} G_n & \text{für}\quad \chi = 1,\\ G_n'-G_n & \text{für}\quad \chi\neq 1,\end{cases}$$

d. h. je nachdem der Charakter $\chi(a)$ der Hauptcharakter ist oder nicht. Die Pole von $[K(\tau,\sigma)\circ T_m(\tau)]_{\sigma=\tau}$ sind die Fixpunkte der Korrespondenz, nämlich die Punkte τ_0, für die ein $\varepsilon\in\Gamma_0(F)$ mit

$$\nu\tau_0 = \varepsilon\tau_0,\qquad \nu = \begin{pmatrix} u & v\\ 0 & w\end{pmatrix}\ \text{gemäß (25)}$$

existiert. Hierzu gehören auch die parabolischen Spitzen. Die Fixpunkte werden nach den arithmetischen Invarianten der Matrix $\varepsilon^{-1}\nu$, nämlich ihrer Spur s und dem Führer f der durch sie über dem Ring der ganzen Rationalen Zahlen erzeugten Ordnung, klassifiziert. Es ist nun entscheidend, die Anzahl der verschiedenen Fixpunkte mit gleichen Invarianten s, f zu berechnen, und dieses gelingt durch Anwendung der Arithmetik der Quaternionen-Algebren; s. [4] und [5]. Früher (durch Kronecker, Hurwitz u. a.) wurde diese Aufgabe mit Hilfe der Theorie der binären quadratischen Formen behandelt. Im Hinblick auf mögliche Erweiterungen (s. § 4, Nr. 6) ist die Benutzung der Algebrentheorie vorzuziehen.

In der Berechnung der Spur von $R_\chi^n(T_m)$ habe ich mich auf den Fall einer quadratfreien Stufe F beschränkt, der kaum größere Schwierigkeiten zeigt als der Fall $F = 1$. Sobald Primzahlen die Stufe jedoch in einer Potenz $h > 1$ teilen, wächst die Kompliziertheit der Ergebnisse mit h, wie Untersuchungen von F. Sohn [20] zeigen.

Obgleich die Untersuchungen in [5], [6] nur für Modulformen vom Hauptcharakter $\chi = 1$ durchgeführt wurden, gebe ich in Nr 3. die Resultate allgemeiner an. Was an tieferen Überlegungen zur Erzielung dieser größeren Allgemeinheit notwendig war, ist alles in der Konstruktion des Normalintegranden 3. Gattung enthalten.

3. Es wird fortan vorausgesetzt, daß die Stufe F das Produkt von $\varkappa$ verschiedenen Primzahlen ist. Der Charakter χ sei reell, er nimmt dann nur die Werte ± 1 an. Der genaue Führer von χ heiße F_χ, er ist ein Teiler von F. Für $\chi \neq 1$ ist

(31) $$\chi(a) = \prod_{p|F_\chi} \left(\frac{a}{p}\right).$$

In der Spurformel werden die folgenden Abkürzungen benutzt:

(32) $\varkappa =$ Anzahl der Primteiler von F.

(33) $$\left\{\frac{\Delta}{p}\right\} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \Delta p^{-2} \equiv 0 \text{ oder } 1 \bmod 4, \\ \left(\frac{\Delta}{p}\right), & \text{das Legendresymbol, sonst.} \end{cases}$$

Es sei

(34) $$x^2 - 2sx + m \equiv 0 \bmod F$$

lösbar. Man setzt

(35) $$\chi(s, m) = 2^{-\varkappa} \sum_{x \bmod F} \chi(x),$$

die Summe erstreckt über ein volles Lösungssytem von (34) mod F. Man hat hier $\chi(x) = 0$ zu nehmen für $(x, F) > 1$, insbesondere auch dann, wenn F nicht der genaue Führer von χ ist. Dies gilt sinngemäß im Falle des Hauptcharacters $\chi = 1$. Für $s^2 < 4m$ sei

(36) $$\varrho(s, m) = \tfrac{1}{2}(s + \sqrt{s^2 - 4m}), \qquad \varrho^*(s, m) = \tfrac{1}{2}(s - \sqrt{s^2 - 4m}).$$

Wenn $\Delta \equiv 0$ oder $1 \bmod 4$, so gibt es genau eine Ordnung der Diskriminante Δ in dem quadratischen Zahlkörper $k(\sqrt{\Delta})$. Es sei

(37) $h(\Delta) =$ Idealklassenzahl, $e(\Delta) =$ halbe Einheitenanzahl dieser Ordnung.

Ebensogut könnte man $h(\Delta)$ als die Anzahl der primitiven Klassen quadratischer Formen mit der Diskriminante Δ bezeichnen.

In der folgenden Spurformel durchlaufen nun s und f alle ganzen Zahlen mit

(38) $$-2\sqrt{m} < s < 2\sqrt{m}, \quad 0 < f < \sqrt{m}, \quad (s^2 - 4m) f^{-2} \equiv 0 \text{ oder } \equiv 1 \bmod 4.$$

Ferner durchläuft t alle Teiler von F, und für jedes t durchläuft u_t alle Teiler von m mit den Eigenschaften

(39) $$u_t | m, \quad 0 < u_t < \sqrt{m}, \quad (u_t, t) = (m u_t^{-1}, F t^{-1}) = 1.$$

Mit diesen Abkürzungen schreibt sich nun die Spurformel:

(40) $$\mathrm{Sp}\left(R_\chi^n(T_m)\right) =$$
$$= m^{1-n/2} \Bigg[-\frac{1}{2} \sum_{s,f} \prod_{p|F} \left(1 + \left\{\frac{(s^2-4m)f^{-2}}{p}\right\}\right) \chi(s, m) \frac{h\left((s^2-4m)f^{-2}\right)}{e\left((s^2-4m)f^{-2}\right)} \times$$
$$\times \frac{\varrho(s, m)^{n-1} - \varrho^*(s, m)^{n-1}}{\varrho(s, m) - \varrho^*(s, m)} - \sum_{t|F} \sum_{u_t} \prod_{p|t} \left(\frac{u_t}{p}\right)^\varepsilon \prod_{p|Ft^{-1}} \left(\frac{m u_t^{-1}}{p}\right)^\varepsilon u_t^{n-1} +$$
$$+ \sigma_\chi^n(m) + \gamma_\chi^n(m) + \delta_\chi^n(m) + \varkappa_\chi^n(m) \Bigg],$$

wo $\varepsilon = 0$ für $\chi = 1$ und $\varepsilon = 1$ für $\chi \neq 1$,

(40a) $$\sigma_\chi^n(m) = \begin{cases} -2^\varkappa \chi(u) \dfrac{u^{n-1}(u-1)}{2} & \text{für} \quad m = u^2,\ (u, F) = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

(40b) $$\gamma_\chi^n(m) = \left.\begin{cases} W & \text{für } n = 2 \text{ und } \chi = 1 \\ 0 & \text{für } n > 2 \text{ oder } \chi \neq 1 \end{cases}\right\} \text{wenn } m = \prod_p p^{h_p},$$

wo

$$W = \tfrac{1}{2}\left(\prod_{p|F} (2p^{h_p - 1} + p^{h_p}) + \prod_{p|F} p^{h_p}\right) \prod_{p\nmid F} (1 + p + \ldots + p^{h_p}),$$

(40c) $$\delta_\chi^n(m) = \begin{cases} -u & \text{für} \quad n = 2,\ \chi = 1,\ m = u^2,\ (u, F) = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

(40d) $$\varkappa_\chi^n(m) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} G_n & \text{für} \quad \chi = 1 \\ G_n' - G_n & \text{für} \quad \chi \neq 1 \end{array}\right\} & m = u^2,\ (u, F) = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wo G_n, G_n' durch (7), (7'), (8), (8') gegeben sind. In (40b) hat man für $2p^{h_p - 1} + p^{h_p}$ in den Fällen $h_p = 0$ und 1 einzusetzen: 1 und p. (40b) bedeutet die halb genommene Summe der beiden Grade der Korrespondenz T_m. Ein Spezialfall ($F = 1$) dieser Spurformel findet sich bei A. Selberg ([19], S. 85).

§ 3. Quadratische Formen

1. Es sei $Q(x) = \frac{1}{2} \sum q_{ik} x_i x_k$ eine definite quadratische Form mit ganzen rationalen Koeffizienten q_{ik} und $\frac{1}{2} q_{ii}$. Unter der *Stufe* von $Q(x)$ versteht man die kleinste natürliche Zahl F der Art, daß die Matrix

$F(q_{ik})^{-1}$ Koeffizienten der gleichen Beschaffenheit hat. Die Variablenzahl soll stets als gerade vorausgesetzt und mit $2n$ bezeichnet werden. Die Zahl $D = -(1)^n|q_{ik}|$ heißt die *Diskriminante* von $Q(x)$; sie ist stets $\equiv 0$ oder 1 mod 4.

Die Thetafunktion

$$\vartheta(\tau) = \sum_x e^{2\pi i\tau Q(x)} \tag{41}$$

ist eine Modulform des Grades $-n$ zur Gruppe $\Gamma_0(F)$:

$$\vartheta(\tau)\circ\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right]^{-n} = \chi(a)\vartheta(\tau), \qquad \chi(a) = \left(\frac{D}{a}\right). \tag{42}$$

$\chi(a)$ ist ein Charakter mit dem Führer $F_\chi = F$.

Ist $R(x)$ eine homogene Laplacesche Kugelfunktion r-ten Grades in den x_i, und ist S eine lineare Substitution, welche der Gleichung $S^TS = Q = (q_{ik})$ genügt, so ist

$$\varphi(\tau) = \sum_x R(Sx)e^{2\pi i\tau Q(x)} \tag{43}$$

eine Modulform von gleicher Stufe und Charakter, aber vom Grade $-(n+r)$, s. [18]. Die Reihen (43) mit ungeradem r verschwinden identisch.

2. Wir wenden uns hier speziell den quaternären quadratischen Formen $Q(x)$ mit quadratischer Diskriminante zu. Diese sind Normen von Idealen aus Quaternionen-Algebren. In diesem Abschnitt soll kurz an die Grundzüge der Arithmetik dieser Algebren erinnert werden (s. [4], [7], [17]).

Es sei A eine definite Quaternionen-Algebra und F_1^2 ihre Diskriminante. F_1 ist dann das Produkt einer ungeraden Anzahl verschiedener Primzahlen. Wir betrachten im Folgenden solche ganz speziellen Ordnungen I in A, deren p-adische Erweiterungen I_p maximale Ordnungen für fast alle p sind; nur für eine endliche Menge von Primzahlen p, welche nicht in F_1 aufgehen, sei I_p isomorph mit der Ordnung aller zweireihigen Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ mit p-adisch ganzen Koeffizienten und mit $c \equiv 0 \bmod p$. Das Produkt aller dieser Ausnahmeprimzahlen nennen wir F_2 und setzen endlich $F = F_1F_2$.

Sei I eine solche Ordnung. Man gebe für jede Primzahl p einen Nichtnullteiler $\mu_p \in A_p$ vor, welcher bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen sogar eine Einheit von I_p sein soll. Der Durchschnitt

$$M = \bigcap_p I_p\mu_p \quad \text{bzw.} \quad M = \bigcap_p \mu_p I_p$$

ist dann ein I-Linksideal bzw. I-Rechtsideal. M heißt ganz, wenn $M \subseteq I$. Zwei I-Linksideale M_1 und M_2 heißen linksäquivalent, wenn $M_2 = M_1\mu$

mit $\mu \in A$. Die Anzahl h der Klassen linksäquivalenter I-Linksideale ist endlich und hängt von I nicht ab.

Einer I-Linksklasse, vertreten durch ein I-Linksideal M_1, kann in folgender Weise eine quadratische Form $Q(x)$ zugeordnet werden. Durchläuft μ alle Elemente $\neq 0$ aus dem inversen Ideal M_1^{-1}, so durchläuft $M = M_1\mu$ die Gesamtheit aller mit M_1 linksäquivalenten ganzen I-Linksideale. Stellt man nun μ durch eine Basis ϱ_i von M_1^{-1} dar: $\mu = \sum \varrho_i x_i$, so wird die Norm von M: $N(M) = N(M_1)N(\mu) = Q(x)$ eine quadratische Form der in Nr. 1 betrachteten Art mit dem Führer $F = F_1F_2$.

Man halte $I = I_1$ fest. $M_1, \ldots, M_h$ sei ein Repräsentantensystem der I_1-Linksklassen. Diese M_i sind nun gleichzeitig Rechtsideale für gewisse andere Ordnungen I_i von p-adisch gleicher Beschaffenheit. Ferner bilden die Quotienten $M_j^{-1}M_i$, $i = 1, \ldots, h$, ein Repräsentantensystem der I_j-Linksklassen.

Man ordnet nun jeder natürlichen Zahl m die sogenannte ***Anzahlmatrix***

$$P_0(m) = (\pi_{ik}(m))$$

zu, wobei $\pi_{ik}(m)$ die Anzahl der ganzen mit $M_i^{-1}M_k$ linksäquivalenten Ideale der Norm m ist. Definiert man noch

$$P_0(m) = \begin{pmatrix} e_1^{-1} & \ldots & e_h^{-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ e_1^{-1} & \ldots & e_h^{-1}\end{pmatrix},$$

wo e_i die Anzahl der Einheiten von I_i ist, so ist

$$f_0(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} P_0(m)e^{2\pi i\tau m} \tag{44}$$

eine h-reihige Matrix, deren Koeffizienten bis auf gemeinsame Faktoren e_i^{-1} Thetareihen der Form (41) sind mit denjenigen quadratischen Formen $Q(x)$ der Stufe F, welche wir soeben den einzelnen Idealklassen zuordneten.

3. Die Anzahlmatrizen $P_0(m)$ können nun noch so verallgemeinert werden [7], daß die (44) entsprechende Reihe auf verallgemeinerte Thetareihen (43) führt. Es sei

$$\alpha \to d_1'(\alpha) = \begin{pmatrix} a_\alpha & b_\alpha \\ c_\alpha & d_\alpha\end{pmatrix}$$

eine Matrixdarstellung 2. Grades von A in einem beliebigen Zerfällungskörper. Unter $d_r(\alpha)$ verstehen wir das r-fache symmetrische Tensorprodukt der zu $d_1'(a)$ spiegelbildlichen Darstellung mit sich selber. Diese ist dann eine reziproke Darstellung der Multiplikationsgruppe von A:

$$d_r(\alpha\beta) = d_r(\beta)\, d_r(\alpha).$$

Ihre Koeffizienten sind homogene Funktionen $k(a_a, \ldots, d_a)$ r-ten Grades. Wir behaupten nun: in Bezug auf die Norm $N(\alpha) = a_a d_a - b_a c_a$ sind diese Funktionen Kugelfunktionen, d. h. transformiert man die $a_a, \ldots$ linear in 4 neue Variable ξ_i, sodaß $N(\alpha) = \sum \xi_i^2$ wird, so gehen die $k(a_a, \ldots, d_a)$ in Kugelfunktionen in den ξ_i über. Zum Beweise genügt es zu verifizieren, daß

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a_a \partial d_a} - \frac{\partial^2}{\partial b_a \partial c_a}\right) k(a_a, \ldots, d_a) = 0 \tag{45}$$

ist. Man führt zwei Unbestimmte η_1, η_2 ein und bekommt dann die Koeffizienten $k(a_a, \ldots, d_a)$ aus den Koeffizienten der Polynome $(a_a\eta_1 + c_a\eta_2)^{r_1} \times \times (b_a\eta_1 + d_a\eta_2)^{r_2}$, $r_1 + r_2 = r$. Diese Polynome genügen aber der Differentialgleichung (45).

Die verallgemeinerten Anzahlmatrizen sind nun h-reihige Matrizen

$$P_r(m) = (S_{ik}) \qquad (i, k = 1, \ldots, h) \tag{46}$$

deren Elemente S_{ik} selber Matrizen sind und folgendermaßen gebildet werden. Es seien $L_{i,\nu} = M_i^{-1} M_k \varrho_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, \pi_{ik}(m))$ alle ganzen I_i-Linksideale, die mit $M_i^{-1} M_k$ linksäquivalent sind und die Norm m haben. Dann ist

$$S_{ik} = \frac{1}{e_k} \sum_{\mu=1}^{e_k} \sum_{\nu=1}^{\pi_{ik}(m)} d_r(\varepsilon_\mu^{(k)} \varrho_\nu), \tag{47}$$

wobei die $\varepsilon_\mu^{(k)}$ alle Einheiten der Ordnung I_k durchlaufen mögen.

Die $P_r(m)$ erzeugen einen halbeinfachen Ring. Sie genügen den folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} & P_r(m_1) P_r(m_2) = P_r(m_1 m_2), \qquad (m_1, m_2) = 1, \\ & P_r(p^{s_1}) P_r(p^{s_2}) = \sum_{\sigma=0}^{\min(s_1, s_2)} p^{(r+1)\sigma} P_r(p^{s_1+s_2-2\sigma}), \qquad p \mid F, \\ & P_r(p^{s_1}) P_r(p^{s_2}) = P_r(p^{s_1} p^{s_2}), \qquad p \mid F_1, \end{aligned} \tag{48}$$

die für das Folgende entscheidend sind.

Setzt man $P_r(0) = 0$ für $r > 0$, so sind die Reihen

$$f_r(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} P_r(m)\, e^{2\pi i \tau m} \tag{49}$$

Matrizen, die aus lauter verallgemeinerten Thetareihen (43) bestehen.

4. Die Spuren der $P_r(m)$ berechnen sich aus den Spuren der S_{ii}:

$$\mathrm{Sp}(P_r(m)) = \sum_{i=1}^{h} \mathrm{Sp}(S_{ii}) = \sum_{i=1}^{h} \frac{1}{e_i} \sum_{\mu=1}^{e_i} \sum_{\nu=1}^{\pi_{ii}(m)} \mathrm{Sp}\left(d_r(\varepsilon_\mu^{(i)} \varrho_\nu)\right).$$

Bei der Ausrechnung kommt es also auf die ganzen Elemente $\varepsilon_\mu^{(i)} \varrho_\nu = \varrho \in I_i$ der Norm m an. Diese werden gemäß ihrer Spur s und des Führers f der durch sie über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen erzeugten Ordnung in Klassen unterteilt und abgezählt [4]. Die in [4] ermittelten Anzahlen müßen hier noch mit den Gewichten $\mathrm{Sp}(d_r(\varrho))$ versehen werden. Die Elemente ϱ sind durch ihre Spur s und Norm m abstrakt festgelegt. Bezeichnet wie in § 2 $\varrho(s, m)$ eine imaginärquadratische Größe mit dieser Spur und Norm, so ist die Matrix $d_r(\varrho)$ auf die Diagonalform $(\varrho^r, |\varrho|^2 \varrho^{r-2}, \ldots, |\varrho|^{2r} \varrho^{-r})$ reduzierbar. Also ist

$$\mathrm{Sp}(d_r(\varrho)) = \frac{\varrho(s, m)^{r+1} - \varrho^*(s, m)^{r+1}}{\varrho(s, m) - \varrho^*(s, m)},$$

wo ϱ^* die zu ϱ konjugiert komplexe Größe bezeichnet.

Wenn im übrigen dieselben Abkürzungen wie in § 2, Nr. 3 benutzt werden, so schreibt sich die Spur:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}(P_r(m)) = \\ = \frac{1}{2} \sum_{s,f} \prod_{p \mid F_1} \left(1 - \left\{\frac{(s^2 - 4m) f^{-2}}{p}\right\}\right) \prod_{p \mid F_2} \left(1 + \left\{\frac{(s^2 - 4m) f^{-2}}{p}\right\}\right) \frac{h((s^2 - 4m) f^{-2})}{e((s^2 - 4m) f^{-2})} \times \\ \times \frac{\varrho(s, m)^{r-1} - \varrho^*(s, m)^{r-1}}{\varrho(s, m) - \varrho^*(s, m)} + c_p(m) \end{aligned} \tag{50}$$

mit

$$c_r(m) = \begin{cases} 0, & \sqrt{m} \not\equiv 0 \bmod 1, \\ \dfrac{r+1}{12} \prod_{p \mid F_1} (p-1) \prod_{p \mid F_2} (p+1)\, m^{r/2}, & \sqrt{m} \equiv 0 \bmod 1. \end{cases} \tag{50a}$$

Im Falle $r = 0$ ist bekanntlich in dem von den $P_0(m)$ erzeugten Ring ein einreihiger Summand ausreduzierbar:

$$P_{00}(m) = \sum_{\substack{t \mid m \\ (t, F) = 1}} t \tag{51}$$

welcher die Anzahl aller ganzen I-Linksideale der Norm m angibt.

5. Ein Vergleich der Formeln (40) und (50) führt zu interessanten Schlussfolgerungen. Zunächst besteht für die Matrizen

$$R_1^n(m) = m^{n/2-1} R_1^n(T_m) \tag{52}$$

wegen (27) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} R_1^n(m_1)R_1^n(m_2) &= R_1^n(m_1 m_2), & (m_1, m_2) &= 1, \\ R_1^n(p^{s_1})R_1^n(p^{s_2}) &= \sum_{\sigma=0}^{\min(s_1,s_2)} p^{(n-1)\sigma} R_1^n(p^{s_1+s_2-2\sigma}), & p &\nmid F, \\ R_1^n(p^{s_1})R_1^n(p^{s_2}) &= R_1^n(p^{s_1+s_2}), & p &| F. \end{aligned} \tag{53}$$

Es sind dieselben Gleichungen wie (48), wenn man $r = n-2$ nimmt und $p \nmid F_2$ voraussetzt (für $p|F_2$ macht (48) keine Aussage).

Da sowohl die $P_{n-2}(m)$ wie die $R_1^n(m)$ halbeinfache Ringe erzeugen, sind diese Matrizen äquivalent, sobald ihre Spuren übereinstimmen. Dieses kann aber in einer Anzahl von Fällen bestätigt werden. Hierbei schreiben wir $P_{n-2}(m) = P_{n-2}(m; F_1, F_2)$, um die Abhängigkeit von der zu Grunde gelegten Quaternionen-Algebra und deren Ordnungen zum Ausdruck zu bringen; ferner $R_1^n(m) = R_1^n(m; F)$. Ist nun $F = p_1 \ldots p_\varkappa$ das Produkt aus verschiedenen Primzahlen, so bestätigt man unter Benutzung von (40) und (50), unter der Voraussetzung $(m, F) = 1$:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}\big(R_1^n(m; F)\big) = 2^\varkappa \mathrm{Sp}\big(R_1^n(m; 1) + \\ &+ \mathrm{Sp}\big(P_{n-2}(m; p_1, p_2 \ldots p_\varkappa) + 2P_{n-2}(m; p_2, p_3 \ldots p_\varkappa) + \ldots + 2^{\varkappa-1} P_{n-2}(m; p_\varkappa, 1)\big) \\ &- \mathrm{Sp}\big(P_{00}(m; p_1, p_2 \ldots p_\varkappa) + 2P_{00}(m; p_2, p_3 \ldots p_\varkappa) + \ldots + 2^{\varkappa-1} P_{00}(m; p_\varkappa, 1)\big), \end{aligned} \tag{54}$$

wobei die P_{00} enthaltenden Glieder für $n > 2$ zu streichen sind.

Ist $\varkappa = 1$, d. h. ist die Stufe F selber eine Primzahl, so kann man aus (54) mit $(m, F) = 1$ folgern, daß (54) auch für $(m, F) > 1$ gilt (s. [5]).

Man weiss nun einerseits aus den Arbeiten Heckes, daß alle Modulformen 1. Gattung vom Grade $-n$ und Charakter χ aus den Koeffizienten der Matrixreihe

$$g^n(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} R_\chi^n(m) e^{2\pi i m\tau} \tag{55}$$

linear kombinierbar sind. Andererseits liefern die entsprechenden Reihen (49) die verallgemeinerten Thetareihen (43). Daher folgt aus (54):

Alle Modulformen 1. Gattung von einem geraden Grade $-n$, vom Charakter $\chi = 1$ und einer quadratfreien Stufe F lassen sich durch verallgemeinerte quaternäre Thetareihen (43) und durch Modulformen der Stufe 1 linear kombinieren, wenn man in den Fourierreihen lediglich die Glieder $c_m e^{2\pi i m\tau}$ berücksichtigt, für die m zur Stufe F teilerfremd ist.

Im Falle einer Primzahlstufe ist die letzte Einschränkung entbehrlich, man muß dann aber zu den Modulformen $\varphi(\tau)$ der Stufe 1 die Formen $\varphi(-1/F\tau)(F\tau)^{-n}$ hinzufügen. Auf den Beweis dieser letzteren Behauptung für allgemeines n möchte ich hier nicht eingehen. Für $n = 2$ wurde sie im Jahre 1936 von Hecke als Vermutung aufgestellt, für den Beweis s. [5]. Der Versuch, Heckes Vermutung auf zusammengesetzte Stufen auszudehnen, begegnet Schwierigkeiten, die in der Behandlung der $P_r(m)$ für $(m, F_2) > 1$ beruhen.

§ 4. Offene Probleme

1. Zur Stufe 1 und zum Grad $n = -12$ gibt es genau eine einzige Modulform 1. Gattung, nämlich die Diskriminante

$$\Delta(\tau) = e^{2\pi i\tau} \prod_{m=1}^{\infty} (1 + e^{2\pi i m\tau})^{24}.$$

Die entsprechende Darstellung $R_1^{12}(T_m) = m^{-5}\tau(m)$ ist einreihig. Ramanujan vermutete, daß für eine Primzahl p: $|\tau(p)| < 2p^{11/2}$ ist. Allgemeiner darf man vermuten, daß sämtliche Eigenwerte der Matrizen $R_\chi^n(T_p)$ absolut genommen $<$ const$\cdot\sqrt{p}$ sind. Im Falle $n = 2$ konnte ich dieses unter Benutzung der Riemannschen Vermutung für die Kongruenzzetafunktion bewiesen [3]. Diese Abschätzung der Eigenwerte der $R_\chi^n(T_p)$ würde zu der bestmögliche Abschätzung $|\gamma_m| < m^{(n-1)/2+\varepsilon}$ der Koeffizienten der Modulformen 1. Gattung $\sum \chi_m e^{2\pi i m\tau}$ führen. Für eine Übersicht über die bisherigen Bemühungen zum Beweis der Ramanujanschen Vermutung s. [1].

2. Die Lösung des Ramanujanschen Problems scheint mir mit weiteren Korrespondenzen des Körpers $K(F)$ zusammenzuhängen, welche in Heckes Theorie auftreten. In ihrer Wirkung auf die (gewöhnlichen) Abelschen Integranden erzeugen die uns bekannten Korrespondenzen einen Ring (den sog. Multiplikatorenring), der einen größeren Rang hat als das Geschlecht und der daher nicht mehr kommutativ ist. Damit gehören diese Funktionenkörper zusammen mit den singulären elliptischen Körpern zu den am höchsten singulären und daher algebraisch und arithmetisch am interessantesten Funktionenkörpern. Es wäre wichtig, die Struktur der Ringe der Darstellungen R_χ^n der Korrespondenzen für alle n und χ zu ermitteln und untereinander zu vergleichen. Jedenfalls lassen sich die Spuren aller Korrespondenzen nach dem in § 2 ermittelten Verfahren bestimmen.

Gleichzeitig sollte man die gleichen Untersuchungen für andere Untergruppen der Modulgruppe durchführen, insbesondere für die sogenannte Hauptkongruezuntergruppe, definiert durch die Kongruenz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod F.$$

3. Man hätte ferner zu fragen, wie sich die hier nicht diskutierten weiteren Korrespondenzen als Beziehungen zwischen den quadratischen Formen darstellen, deren Thetareihen Modulformen des Körpers $K(F)$ liefern. Man wird diese weitere Frage zweckmäßigerweise im Zusammenhang mit der Hauptkongruenzuntergruppe betrachten. Zu dieser engeren Gruppe gehören weitere Thetareihen $\sum e^{2\pi i \tau Q(x)}$, wobei der Vektor x alle Lösungen der Kongruenz $x \equiv a \bmod 1$ durchläuft mit einem Vektor a, dessen Komponenten die Stufe der Form als Hauptnenner haben. Eng zusammengehörig hiermit is die Frage, nach den Darstellungen der Modulargruppe, die in Heckes Arbeiten eine so hervorragende Rolle spielt. S. hierzu die Arbeiten [13], [14], [15].

4. Weitgehend ungeklärt ist die Frage, welche Modulformen eines Charakters $\chi \neq 1$ durch Thetareihen darstellbar sind. Die zugehörigen quadratischen Formen haben jetzt nicht mehr eine quadratische Diskriminante D. Die Theorie der Anzahlmatrizen $P(m)$ konnte auf solche quadratischen Formen übertragen werden [2], wenn man voraussetzte, daß für jeden Primteiler $p|m$, welcher m in ungerader Vielfachheit teilt, D ein quadratischer Rest ist. Bei ungerader Variablenzahl mußte sogar vorausgesetzt werden, daß m eine Quadratzahl ist. Man weiss ferner, daß in diesen Fällen die Matrix $m^{n/2-1}R_\chi^n(m)$ ausreduziert einen mit $P(m)$ äquivalenten Bestandteil hat (s. [2], S. 148). Es dürfte möglich sein, die Spuren dieser Anzahlmatrizen für ternäre und quaternäre Formen zu berechnen. Dabei müßte man die Cliffordschen Algebren der Formen heranziehen. Wie ich vermute, werden hierbei (Teile von) Klassenzahlen von imaginär-quadratischen Erweiterungen des reell-quadratischen Körpers $k(\sqrt{D})$ auftreten.

Ferner müßte man versuchen, die Bedeutung der Korrespondenzen T_m für solche m, zu denen es kein $P(m)$ gibt, für die quadratischen Formen herauszustellen.

5. Die Resultate dieser Arbeit dürften sich auf definite quadratische Formen in total reellen Zahlkörpern übertragen. Ebenso bleiben die genannten offenen Probleme bestehen. Bei den Integralen (9) handelt es sich jetzt um mehrfache Integrale

$$\Phi(\tau_1, \ldots, \tau_h) = \int_{\tau_{10}}^{\tau_1} d\sigma_1 \ldots \int_{\tau_{h0}}^{\tau_h} d\sigma_h \big((\tau_1-\sigma_1)\ldots(\tau_h-\sigma_h)\big)^{n-2} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_h),$$

und bei dem Normalintegranden 3. Gattung um eine Funktion mit dem Hauptteil der Singularität $\big((\tau_1-\sigma_1)\ldots(\tau_h-\sigma_h)\big)^{-1}$. Der Existenzbeweis mittels Poincaréscher Reihen in § 1 läßt sich vielleicht übertragen. Einmal im Besitz des Normalintegranden 3. Gattung wird man auch die Spurformel (40) bekommen. Hierbei ist $n > 2$ vorauszusetzen.

Wie sich die Untersuchungen im Falle $n = 2$ gestalten lassen, wage ich nicht vorauszusagen. Zweifellos wären sie besonders interessant, da die Spurformel jetzt mit der sogenannten Verallgemeinerung des Riemann-Rochschen Satzes der mehrdimensionalen algebraischen Geometrie [12] zusammenhängt, in welche sie sogar übergehen muß, wenn man die identische Korrespondenz einsetzt.

6. Die Modulgruppe $\Gamma_0(1)$ hat viele Eigenschaften mit den Gruppen E der folgenden Art gemeinsam, unter denen sie im Prinzip als ein Spezialfall vorkommt. Es sei q ganz rational. Die Matrizen

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ q\beta & \alpha' \end{pmatrix}$$

bilden einen Integritätsbereich I in einer Quaternionen-Algebra, wenn α, β ganze Zahlen aus einem reell-quadratischen Zahlkörper $k(\sqrt{d})$ sind und α', β' ihre algebraisch konjugierten. Die ε der Determinante 1 bilden die Gruppe E, die Einheitengruppe von I. Wenn $q = 1$, so ist E mit einer gewissen Untergruppe von $\Gamma_0(1)$ äquivalent. Diese Gruppen E sind in der Literatur als die „reproduzierenden Gruppen" indefiniter ternärer quadratischer Formen bekannt ([8], [10]).

Für die automorphen Formen zu diesen Gruppen lassen sich Modularkorrespondenzen definieren ([7], [10]). Die Berechnung ihrer Spuren bereitet keine größeren Schwierigkeiten als hier in § 2 und führt stets auf ganze rationale Werte. Die automorphen Funktionen zu solchen Gruppen E bilden demnach algebraische Funktionenkörper von stark singulärem Charakter, und man muß vermuten, daß sie sich in der Weise $k(x, y)$ mit einer Gleichung $f(x, y) = 0$ abstrakt definieren lassen, wobei $f(x, y)$ algebraische, vielleicht sogar rationale Koeffizienten hat. Die Schwierigkeit dieses Nachweises besteht darin, daß der Fundamentalbereich von E i. a. keine parabolischen Spitzen hat, und daß daher für die automorphen Formen und Funktionen keine Fourierentwicklungen existieren.

Automorphe Funktionen $\varphi(\tau)$ zu der Gruppe E entstehen übrigens, wie man ganz leicht verifiziert, aus den Hilbertschen Modulfunktionen $\varphi(\tau_1, \tau_2)$ zu dem quadratischen Zahlkörper $k(\sqrt{d})$, indem man $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = 1/q\tau$ setzt.

7. Zum Schluß muß noch auf die Möglichkeit einer anderen Deutung der Spurformel (40) hingewiesen werden. Die Korrespondenzen T_m definieren Endomorphismen $R_n(T_m)$ in den Bettischen Gruppen der Dimensionen $n = 0, 1, 2$ der Riemannschen Fläche, und es ist

$$\mathrm{Sp}\big(R_1(T_m)\big) = 2\mathrm{Sp}\big(R_1^2(T_m)\big),$$

während $\mathrm{Sp}\big(R_0(T_m)\big)$, $\mathrm{Sp}\big(R_2(T_m)\big)$ gleich den beiden Graden der Korrespondenz T_m ist. Beachtet man dies, so erkennt man, daß (40) im Falle $n = 2$ mit dem Lefschetzschen Fixpunktsatze äquivalent ist, welcher besagt, daß die Anzahl der Fixpunkte bei geeigneter Zählung der Vielfachheiten gleich der Wechselsumme $\sum_n (-1)^n \mathrm{Sp}\big(R_n(T_m)\big)$ ist; vgl. hierzu auch [7].

Hiermit stellen sich sofort zwei Fragen: läßt sich (40) auch für $n > 2$ ein topologischer Sinn unterlegen? Oder kann man für (40) einen Beweis angeben, der im Bereich der Cohomologietheorie verlaufend eine Ersetzung von dieser durch die Homologietheorie gestattet?

Literaturverzeichnis

[1] F. Van der Blij, *The function $\tau(n)$ of Ramanujan*, The Mathematics Student (new series), vol. XVIII, Nos. 3 and 4, 1951.

[2] M. Eichler, *Quadratische Formen und orthogonale Gruppen*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

[3] — *Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion*, Arch. d. Math. 5 (1954), S. 355-366.

[4] — *Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren*, Journ. reine angew. Math. 195 (1956), S. 127-151.

[5] — *Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen*, ibid. S. 156-171.

[6] — *Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale*, Math. Zeitschr. 67 (1957), S. 267-298.

[7] — *Modular correspondences and their representations*, Journ. Indian Math. Soc. 20 (1956), S. 163-206.

[8] R. Fricke, F. Klein, *Automorphe Funktionen*, Bd. I, Leipzig 1897.

[9] E. Hecke, *Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen*, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, Math.-fys. Medd. XVII, 12, Kobenhavn 1940.

[10] K. Heegner, *Transformierbare automorphe Funktionen und quadratische Formen*, Math. Zeitschr. 43 (1938), S. 161-204, ibid. S. 321-352; Math. Zeitschr. 44 (1939), S. 555-567.

[11] O. Hermann, *Über Hilbertsche Modulfunktionen und die Dirichletschen Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung*, Math. Annalen 127 (1954), S. 351-400.

[12] F. Hirzebruch, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebn. d. Math., Neue Folge, Heft 9, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.

[13] H. D. Kloosterman. *The behaviour of general theta functions under the modular group and the characters of binary modular congruence groups*, Ann. of Math. 47 (1946), S. 317-447.

[14] — *On the characters of binary modular congruence groups*, Proc. International Congress of Mathematicians I, Cambridge (Mass.) 1950, S. 257-280.

[15] J. Van der Mark, *On the characters of binary congruence modular groups*, Diss. Leyden etwa 1950.

[16] H. Petersson, *Über automorphe Formen mit Singularitäten im Diskontinuitätsbereich*, Math. Annalen 129 (1955), S. 370-390.

[17] B. Schoeneberg. *Über die Quaternionen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, Journ. reine angew. Math. 193 (1954), S. 84-93.

[18] — *Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen*, Math. Annalen 116 (1939), S. 511-523.

[19] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, Journ. Indian Math. Soc. 20 (1956), S. 47-87.

[20] F. Sohn, *Beiträge zur Zahlentheorie der ternären quadratischen Formen und der Quaternionenalgebren*, Diss. Münster 1957.

[21] A. Weil, *Généralization des fonctions Abéliennes*, Journ. de Math. pure et appl. 17 (1938), S. 47-87.

MATHEMATISCHES INSTITUT der UNIVERSITÄT MARBURG a. d. LAHN

Reçu par la Rédaction le 25. 9. 1957