Über die Wirksamkeit einiger Abschätzungen triognometrischer Summen

von

A. Walfisz (Tiflis)

Inhaltsverzeichnis

§ 1. Bezeichnungen

Im folgenden bezeichnen die Buchstaben a, b, c, h, j, l, m ganze Zahlen; $d, k, n, q, r, M, U, V, \nu$ positive ganze Zahlen (in den §§ 8 und 9 bedeutet auch Q eine positive ganze Zahl); p Primzahlen; $s, v, C, D, E, N, H, \varrho$ positive Zahlen; $y, X, Y, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu, \sigma, \theta$ reelle Zahlen; S, z, w komplexe Zahlen.

Der Buchstabe A, mit oder ohne Indizes, bezeichnet positive absolute Konstanten. Im allgemeinen werden die A unterschiedslos benutzt und können verschiedene Werte bezeichnen. x bezeichnet positive Zahlen, und zwar wird, ohne daß dies besonders gesagt wird, $x > A$ angenommen, wobei A an jeder Stelle geeignet gewählt wird. Weiter werde

$$\log x = t, \qquad \log\log x = u$$

gesetzt. Wegen $x > A$ ist nötigenfalls $t > A$ und $u > A$.

Es ist $0 < \varepsilon < 1$. Mit B werden unterschiedslos Zahlen bezeichnet, für die $|B| < A$ ist; kommt jedoch ε in der betreffenden Formel vor, so darf die B-Schranke auch von ε abhängen, und bei Behandlung de

Ellipsoidproblems in § 6 (von Formel (150) ab) darf sie von der dortigen Zahl N abhängen, die ihrerseits von der quadratischen Form Q abhängt. Daneben werden an einigen Stellen die Landauschen Zeichen O and o benutzt.

Falls untere Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins. Die fetten Zahlen geben Nummern von Formeln an, die an den betreffenden Stellen benutzt werden, sind also als Hinweise zu verstehen.

$\varphi(n)$ und $\mu(n)$ sind die üblichen Funktionen von Euler und Möbius, $\zeta(z) = \zeta(\sigma+iy)$ die Riemannsche Zetafunktion,

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1$$

die Anzahl der Primzahlen bis x;

$$\Phi(x) = \sum_{n \leqslant x} \varphi(n) - \frac{3}{\pi^2} x^2, \tag{1}$$

$$\Pi(x) = \pi(x) - \int_2^x \frac{dy}{\log y}, \tag{2}$$

$$\psi(y) = y - [y] - \tfrac{1}{2}; \tag{3}$$

$Q = Q(y_1, y_2, y_3, y_4)$ sei eine positiv definite quaternäre quadratische Form mit rationalen Koeffizienten; D ihre Determinante; $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte (m_1, m_2, m_3, m_4), die dem Ellipsoid $Q \leqslant x$ angehören; $P_Q(x)$ der entsprechende Gitterrest, d. h. $A_Q(x)$ weniger das Volumen $\pi^2 x^2 / 2\sqrt{D}$ des Ellipsoids.

Um komplizierte Exponenten zu vermeiden, setze ich

$$e^{2\pi i y} = e(y), \qquad e^y = \exp(y), \qquad s^y = (s; y).$$

Weitere Bezeichnungen werden noch eingeführt.

§ 2. Sätze über trigonometrische Summen

Satz 1 ([13], Satz (A)). *Es sei* $r \geqslant 9$, m *beliebig*, $M_1 \leqslant M$,

$$f(y) = \theta y^{r+1} + \theta_1 y^r + \ldots + \theta_r, \tag{4}$$

$$0 < 2(r+1)|\theta| M \leqslant 1, \tag{5}$$

$$S = \sum_{m < h \leqslant m+M_1} e\{f(h)\}. \tag{6}$$

Für geeignetes A *ist dann*

$$S = Br^{A} M \{|\theta|; (Ar^4 \log r)^{-1}\} \log^2 |\theta| + B(|\theta|; -1/r). \tag{7}$$

Bemerkungen. 1. In [13] treten statt (5) die beiden Bedingungen

$$0 < 8(r+1)|\theta| < 1, \tag{8}$$

$$\left(|\theta|;\, -\frac{1}{r+1}\right) \leqslant M \leqslant \{2(r+1)|\theta|\}^{-1} \tag{9}$$

auf. Wird aber $M > 4$ angenommen, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit geschehen darf, so ist (8) eine Folge von (9). Die linke Hälfte von (9) ist auch unnötig, denn für $M < \{|\theta|;\, -(r+1)^{-1}\}$ ist

$$(|\theta|;\, -1/r) = \left\{\left(|\theta|;\, -\frac{1}{r+1}\right);\, \frac{r+1}{r}\right\} \geqslant \left(M;\, \frac{r+1}{r}\right),$$

also die Abschätzung (7) trivial. Es bleibt also nur (5) zurück. Es würde auch nichts ausmachen, wollte man Satz 1 nur für $M_1 = M$ aussprechen. Gilt nämlich die Ungleichung (5) für M, so gilt sie auch für jedes $M_1 \leqslant M$.

2. Der Beweis von Satz 1 ist nicht veröffentlicht worden; an der Richtigkeit des Satzes darf aber nicht gezweifelt werden, denn er ergibt sich aus dem folgenden Satz 2.

Satz 2 ([5], S. 172, Hilfssatz). *Es sei $r > 3$, $f(y)$ bezeichne das Polynom* (4), *die Bedingung* (5) *sei erfüllt. Für die Summe*

$$S = \sum_{h=1}^{M} e\{f(h)\} \tag{10}$$

gilt dann die Abschätzung

$$S = Br^3\{M;\, 1-(6r^3\log r)^{-1}\} + B(|\theta|;\, -1/r). \tag{11}$$

Bemerkungen. 1. An der angegebenen Stelle werden statt (11) die beiden Abschätzungen

$$S = Br^2\{M;\, 1-A(r^3\log r)^{-1}\} + B(|\theta|;\, -1/r), \tag{12}$$

$$S = Br^2\{M;\, 1-k^{-3}(\log k+1{,}1\log\log k^2)^{-1}\} + B(|\theta|;\, -1/r) \quad \text{für} \quad k = r+1 \geqslant 14 \tag{13}$$

formuliert. Indessen hat Hua, worauf ich schon in [18], S. 4, hinwies, in der Formel S. 57, Zeile 13, den Faktor $k^{\frac{1}{4}k(k-1)}$ (in seiner Bezeichnungsweise) weggelassen, und das führt letzten Endes dazu, daß in den Hauptgliedern von (12) und (13) noch ein Faktor r angebracht werden muß. Es kommen bei Hua auch andere Flüchtigkeitsfehler vor, die aber auf das Endergebnis keinen Einfluß haben. Eine ausführliche Darstellung seines Beweises findet man in dem Buch [19], Kapitel II, § 7. Satz 2 ist der dortige Hilfssatz 5. Für die in der vorliegenden Arbeit gegebenen Anwendungen ist es gleichgültig, welche r-Potenz im Hauptglied steht, wenn sie nur die Gestalt r^A hat; auch spielt es keine Rolle, welchen Wert man für die Konstante A in (12) annehmen kann.

2. Satz 1 folgt aus Satz 2. Mehr noch, auf diese Weise ergibt sich der folgende

Satz 1a. *Es sei $r > 3$; im übrigen mögen die Voraussetzungen von Satz 1 gelten. Dann ist*

$$S = Br^3M\{|\theta|;\, (6r^4\log r)^{-1}\} + B(|\theta|;\, -1/r). \tag{14}$$

Beweis. Erstens sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $m = 0$; sonst ersetze man $f(y)$ durch $f(y+m)$, wobei zu beachten ist, daß auch $f(y+m)$ die Gestalt (4), mit demselben Wert von θ, hat. Zweitens kann, wie schon oben bemerkt worden ist, $M_1 = M$ angenommen werden. Für $m = 0$, $M_1 = M$ geht die Summe (6) in die Summe (10) über.

Drittens kann

$$|\theta| \geqslant M^{-r} \tag{15}$$

vorausgesetzt werden; sonst ist $(|\theta|;\, -1/r) \geqslant M$, also (14) klar. Aus (15) folgt

$$\{|\theta|;\, (6r^4\log r)^{-1}\} \geqslant \{M;\, -(6r^3\log r)^{-1}\}.$$

In Verbindung mit (11), ergibt dies die Behauptung (14).

3. Das Buch [5] von Hua ist 1947 herausgegeben; die Handschrift wurde indessen vom Verfasser schon 1941 eingereicht, konnte aber infolge der damaligen Verhältnisse erst nach Kriegsende veröffentlicht werden; vgl. die Angaben in [5], S. 5, Fußnote.

Satz 3 ([23], Satz 1, a). *Im Intervall $m \leqslant y \leqslant m+M$ möge die reelle Funktion $f(y)$ eine stetige $(r+1)$-te Ableitung $f^{(r+1)}(y)$ besitzen. Es sei*

$$r \geqslant 11, \quad D \geqslant 1, \quad M_1 \leqslant M, \quad M \leqslant C \leqslant HM^2, \tag{16}$$

$$\frac{1}{C} \leqslant \left|\frac{f^{(r+1)}(y)}{(r+1)!}\right| \leqslant \frac{D}{C} \quad \text{für} \quad m \leqslant y \leqslant m+M, \tag{17}$$

$$S = \sum_{m \leqslant h < m+M_1} e\{f(h)\}, \tag{18}$$

$$\varrho = (3r^2\log 120r)^{-1}. \tag{19}$$

Dann ist

$$|S| < \exp\{\tfrac{1}{2}r(\log 120r - 1{,}7)\log 8r\}\, DH^{\varrho/3}M^{1-\varrho}. \tag{20}$$

Satz 4 ([4], Satz B). *Im Intervall $m+1 \leqslant y \leqslant m+M_1$ möge die reelle Funktion $f(y)$ eine stetige $(r+1)$-te Ableitung $f^{(r+1)}(y)$ besitzen. Es sei*

$$r \geqslant 7, \quad M_1 \leqslant M, \quad C^{1/4} \leqslant M \leqslant C, \tag{21}$$

$$\frac{1}{C} \leqslant \left|\frac{f^{(r+1)}(y)}{(r+1)!}\right| \leqslant \frac{2}{C} \quad \text{für} \quad m+1 \leqslant y \leqslant m+M_1. \tag{22}$$

Für die Summe (6) gilt dann die Abschätzung

$$S = B\exp(18r\log^2 r)\{M; 1-(50r^2\log r)^{-1}\}\log 2M. \tag{23}$$

Bemerkungen. 1. Flett beweist die Abschätzung (23) nicht für die Summe (6), sondern für

$$S' = \max_{M' \leqslant M_1}\Big|\sum_{m<h\leqslant m+M'} e\{f(h)\}\Big|.$$

Das besagt aber nicht mehr als (23), da die Voraussetzungen des Satzes auch für $M_1 = M'$ erfüllt sind.

2. Eine Variante von Satz 4 findet sich im VI Kapitel von [14] als Hilfssatz 6.12. Dort wird für den Spezialfall $M_1 = M$ der Summe (6) die Abschätzung

$$S = B\exp(32r\log^2 r)\{M; 1-(56r^2\log r)^{-1}\}\log M \tag{24}$$

bewiesen. (24) leistet für die Anwendungen dasselbe wie (23). Die Bedingung $\lambda > 1$ in [14], (6.12.1) (d. h. $C < 1$ in unserer Schreibweise) ist wegzulassen.

Satz 5 ([12], (15)). *Es bezeichne $f(y)$ das Polynom (4), S die Summe (10); die Bedingung (5) sei erfüllt. Für $r > A$ ist dann*

$$|S| \leqslant 2\exp(10r\log^2 r)\{M; 1-(6r^2\log r)^{-1}\}\log M + 2(|\theta|; -1/r). \tag{25}$$

Satz 6 ([12], Hilfssatz 1). *Unter den Voraussetzungen von Satz 5 ist*

$$|S| \leqslant 2\exp(60\log^3 r)(M; 1-r^{-3})\log M + 2(|\theta|; -1/r). \tag{26}$$

Wie in [12], S. 98, gezeigt wird, folgt (26) unmittelbar aus (25).

Satz 7 ([8], Satz 1). *Im Intervall $m \leqslant y \leqslant m+M-1$ möge die reelle Funktion $f(y)$ eine stetige $(r+2)$-te Ableitung besitzen. Es sei $r \geqslant 11$,*

$$\frac{1}{M^r} \leqslant \left|\frac{f^{(r+1)}(m)}{(r+1)!}\right| \leqslant \frac{1}{2M}, \tag{27}$$

$$\left|\frac{f^{(r+2)}(y)}{(r+2)!}\right| \leqslant \frac{(8r)^{3r}}{M^{r+2,1}} \quad \text{für} \quad m \leqslant y \leqslant m+M-1, \tag{28}$$

$$S = \sum_{m \leqslant h < m+M} e\{f(h)\}. \tag{29}$$

Dann ist

$$|S| < \exp(3r\log^2 r)\{M; 1-(9{,}3r^2\log r)^{-1}\}. \tag{30}$$

Bemerkungen 1. Die in [8] gestellte Forderung $M \geqslant 2$ kann weggelassen werden, da für $M = 1$ die Bedingung (27) nicht erfüllt werden kann.

2. Satz 7 wird in [8] aus dem folgenden Satz Winogradoffs hergeleitet (Spezialfall $m = 1$, $r = n+1$, $\tau = 1$ des Satzes in [22]):

Es sei $r \geqslant 12$, $f(y)$ das Polynom (4), S die Summe (10),

$$|\theta - a/q| \leqslant 1/q^2; \quad (a, q) = 1, \quad M < q \leqslant M^r; \quad R = \log\{12r(r+1)\}. \tag{31}$$

Dann ist

$$|S| < \exp(\tfrac{1}{2}rR\log 8r)\{M; 1-(3r^2R)^{-1}\}. \tag{32}$$

Alle Sätze dieses Paragraphen werden mit Winogradoffschen Methoden bewiesen, die von Hua [5], [6] vereinfacht worden sind. Mehr noch, sie stellen Umarbeitungen älterer Winogradoffscher Sätze dar, in denen die Abhängigkeit der S-Schranke von r nicht ausdrücklich angegeben ist, also r als konstant ($r = A$) angenommen wird. Die Entwicklung vollzog sich hier merkwürdigerweise im rückläufigen Sinn: die aus dem Zeitraum 1951-53 stammenden Sätze 3-7 liefern nicht so scharfe Ergebnisse, wie die Sätze 1-2 von 1938-41.

Im folgenden wird es, um Rechnungen zusammenzufassen, bequem sein, für die Sätze 2, 5 und 6 eine gemeinsame Formulierung zu finden. Dies leistet der folgende Satz 8:

Satz 8. *Es bezeichne $f(y)$ das Polynom (4), S die Summe (10); die Bedingung (5) sei erfüllt. Für $r \geqslant A_1 > 1$ ist dann*

$$S = B\exp(A_2 r^{\alpha}\log^{\beta} r)\{M; 1-(A_3 r^{\gamma}\log^{\delta} r)^{-1}\}\log^{X} M + B(|\theta|; -1/r). \tag{33}$$

Hierbei bedeuten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, X$ geeignete absolute Konstanten, die den folgenden Bedingungen genügen:

$$\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \beta \geqslant 1 \quad \text{für} \quad \alpha = 0,\ \gamma \geqslant 1,\ \delta \geqslant 0,\ X \geqslant 0. \tag{34}$$

Außerdem sei $A_3 \geqslant 1$.

Bemerkung. Nach Satz 2 gilt Satz 8 für

$$\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = 3,\ \delta = 1. \tag{35}$$

Nach Satz 5 gilt er für

$$\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = 2,\ \delta = 1. \tag{36}$$

Nach Satz 6 gilt er für

$$\alpha = 0,\ \beta = 3,\ \gamma = 3,\ \delta = 0. \tag{37}$$

§ 3. Problemstellung

Um die Wirksamkeit der obigen Sätze miteinander zu vergleichen, werden sie auf die folgenden vier Probleme angewandt:

I. *Abschätzung von* $\zeta(1+ix)$.
II. *Abschätzung von* $\Pi(x)$.
III. *Abschätzung von* $P_Q(x)$.
IV. *Abschätzung von* $\Phi(x)$.

Bei I und II werden die Sätze 1-7 zur Abschätzung der Summe

$$\sum_{m=M}^{M'} m^{-ix}, \tag{38}$$

unter gewissen Bedingungen für M und M', benutzt. Die Probleme I und II treten in der Literatur auch in allgemeinerer Gestalt auf, indem statt der Riemannschen Zetafunktion Dirichletsche L-Funktionen, statt Primzahlen überhaupt Primzahlen in Restklassen betrachtet werden. Diese Verallgemeinerungen sind analytisch keineswegs naheliegend, aber für unsere Fragestellung ergeben sie so gut wie nichts; man hat nur nötig, statt der Summen (38) die analogen Summen

$$\sum_{m=M}^{M'} (m+s)^{-ix}$$

zu betrachten, wobei $0 < s \leqslant 1$, s konstant ist. Der zusätzliche Parameter s stört aber nicht, wie der Leser an der analog gebauten Summe

$$\sum_{m=M}^{M'} e\big(x/(m+s)\big) \tag{39}$$

feststellen kann, die bei III benutzt wird. Für IV genügt der Spezialfall $s=1$ von (39), der auch für den in [19] behandelten typischen Fall der vierdimensionalen Kugel ausreicht.

In der Literatur hat die Anwendung der Sätze 1-7 auf die Probleme I-IV bisher folgendes ergeben (die oben erwähnten Verallgemeinerungen von I und II habe ich nicht besonders hervor):

Tchudakoff [13] skizziert, unter Benutzung seines Satzes 1, einen Beweis von

$$\Pi(x) = Bx\exp(-At^{4/7-\varepsilon}). \tag{40}$$

Hua ([5], S. 174) erwähnt ohne Beweis, daß sein Satz 2 die Abschätzungen

$$\zeta(1+ix) = Bt^{3/4+\varepsilon}, \tag{41}$$

$$P_Q(x) = Bxt^{3/4+\varepsilon} \tag{42}$$

und die Abschätzung (40) ergibt.

Flett [3] beweist, mit Hilfe von Satz 1,

$$\zeta(1+ix) = Bt^{3/4}u^{1/2+\varepsilon}. \tag{43}$$

Titchmarsh [14], S. 113, beweist, mit Hilfe seiner Variante von Satz 4,

$$\zeta(1+ix) = Bt^{3/4}u^{3/4}. \tag{44}$$

Tatuzawa [12] beweist, mit Hilfe seines Satzes 6,

$$\Pi(x) = Bx\exp(-At^{4/7}u^{-3/7}). \tag{45}$$

Klimoff [8] behandelt zwar die Probleme I und II nicht direkt; er bekommt aber, mit Hilfe seines Satzes 7, Abschätzungen, aus denen man leicht (44) und (45) erhalten kann (vgl. darüber § 5 weiter unten).

Für den Fall der vierdimensionalen Kugel erhielt ich in [19] (Kapitel II, § 8, (27)), mit Hilfe von Satz 2,

$$P_Q(x) = Bxt^{3/4}u^{1/2}. \tag{46}$$

In [18] habe ich, unter Benutzung des Huaschen Satzes 2 (mit A statt 6 in (11))

$$\Phi(x) = Bxt^{3/4}u^{2} \tag{47}$$

bewiesen. Hier wurde aber der Exponent 2 von u nur der einfacheren Formulierung wegen gewählt. Ersetzt man nämlich in [18], S. 30, das Glied $Bt^{3/4}(u\log u)^{3/2}$ nicht durch $Bt^{3/4}u^2$, sondern läßt es stehen, so bekommt man statt (47)

$$\Phi(x) = Bxt^{3/4}(u\log u)^{3/2}. \tag{48}$$

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt: Mit Hilfe von Satz 1 oder von Satz 2 ergeben sich die Abschätzungen (46) und

$$\zeta(1+ix) = Bt^{3/4}u^{1/2}, \tag{49}$$

$$\Pi(x) = Bx\exp(-At^{4/7}u^{-2/7}), \tag{50}$$

$$\Phi(x) = Bxt^{3/4}u^{3/2}. \tag{51}$$

Mit Hilfe der Sätze 3-7 ergeben sich die schwächeren Abschätzungen (44), (45),

$$P_Q(x) = Bxt^{3/4}u^{3/4}. \tag{52}$$

$$\Phi(x) = Bxt^{3/4}u^{7/4}. \tag{53}$$

Sieht man von Satz 1 ab, der eine von den übrigen abweichende Gestalt hat, so kann man folgende Überlegung anstellen.

In den Hauptgliedern der durch die Sätze 2-7 gelieferten Abschätzungen kommt das Produkt

$$\exp\{f(r)\}\{M;1-(g(r))^{-1}\}$$

vor, wobei $f(r)$ und $g(r)$ gewisse Funktionen sind, die mit r ins Unendliche wachsen. Damit die betreffende Abschätzung nicht trivial, also nutzlos ist, muß dies Produkt $\leqslant M$ sein, d. h. man hat die notwendige Bedingung

$$\exp\{f(r)g(r)\} \leqslant M,$$

$$f(r)g(r) \leqslant \log M.$$

Da aber M dem Intervall (60) angehört, hat $\log M$ die Größenordnung t/r, d. h. es ist eine Ungleichung der Gestalt

$$rf(r)g(r) \leqslant At \tag{54}$$

zu erfüllen. Bezeichnet r_0 das größte r, wofür sie besteht, so kann der betreffende Satz für $r > r_0$ nicht mehr benutzt werden. In Satz 2 hat man für die linke Seite von (54) die Größenordnung $r^4\log^2 r$, in den Sätzen 3-7 die Größenordnung $r^4\log^3 r$. Das kommt darauf hinaus, daß man im ersten Falle nicht mehr als

$$r_0 = [At^{1/4}u^{-1/2}] \tag{55}$$

und im zweiten nicht mehr als

$$r_0 = [At^{1/4}u^{-3/4}] \tag{56}$$

erwarten darf. Bei der Zetafunktion bedeutet dies, daß man $\zeta(1+ix)$ bestenfalls durch die Summe

$$\sum_{n\leqslant(x;A/r_0)} n^{-1-ix}$$

wird ersetzen können, für die eine triviale Abschätzung Bt/r_0 ergibt. Setzt man hier die Werte (55) und (56) ein, so bekommt man (49) und (44). Es wird sich schon im nächsten Paragraphen zeigen, daß diese Werte von r_0 tatsächlich erreicht werden, daß also aus den obigen Sätzen alles herausgeholt worden ist, was man herausholen konnte.

Bevor man noch die Probleme I-III mit Sätzen von der Winogradoffschen Art behandelt hat (die hier aufgezählten Sätze 1-7 sind nicht die einzigen ihrer Art; es gibt noch einige ältere, minder scharfe Sätze von Tchudakoff und Titchmarsh), wandte man auf sie die bekannten Weylschen Sätze an, die schon längst zum klassischen Bestand der

Zahlentheorie gehören (vgl. die Darstellung in [10], S. 250-260). Es ergaben sich auf diese Weise die Abschätzungen

$$\zeta(1+ix) = Bt/u, \tag{57}$$

$$\Pi(x) = Bx\exp(-At^{1/2}u^{1/2}), \tag{58}$$

$$P_Q(x) = Bxt/u, \tag{59}$$

die wesentlich schwächer als (40)-(46), (49)-(50) und (52) sind; (57) ist von Weyl, (58) von Littlewood bewiesen worden; vgl. die Darstellung in [11], S. 31-47. Die Abschätzung (59) findet man in [16], für die vierdimensionale Kugel schon in [15].

Es wäre indessen ein Irrtum, wollte man von den Sätzen der Winogradoffschen Art annehmen, sie seien schärfer als die Weylschen, da sie bessere Ergebnisse liefern. Zunächst einmal lassen sich die Abschätzungen (57)-(59) mit den Weylschen Sätzen allein beweisen, während jede der Abschätzungen (40)-(53) nur durch gleichzeitige Anwendung eines der Sätze 1-7 und eines Weylschen Satzes erhalten werden konnte. Man sieht es schon dem Wortlaut der Sätze 1-7 an, daß sie für zu kleine r nicht anwendbar sind; für diese r müssen die Weylschen Sätze hinzukommen. Andererseits muß bei Weyl $r \leqslant Au$, d. h. $r_0 = [Au]$ ant genommen werden. Für größere r hat man von einem der Sätze Winogradoffscher Art Gebrauch zu machen; in der vorliegenden Arbeiwerden sie schon für $r > A$ benutzt.

Ein weiterer Fortschritt wird erst möglich sein, wenn es gelingt einen Satz zu beweisen, bei dem r_0 die Größenordnung (55) übertrifft. Man wird einen solchen Satz schon in der näheren Zukunft erwarten dürfen, da die Abschätzung

$$\zeta(1+ix) = Bt^{3/4}u^{1/4}$$

vor einigen Monaten bei einer Tagung angekündigt worden ist.

Auf die Beweise der Sätze 2-7 wird im folgenden nicht eingegangen; sie sind an den genannten Stellen zu finden. Im übrigen wird die Kenntnis der Arbeiten [2], [3], [5], [6], [12], [13], [17], [20] und [21] nicht vorausgesetzt. Auch die Kenntnis von [18] wird nicht vorausgesetzt, obwohl man durch Hinweise auf diese Arbeit die Behandlung des IV Problems wesentlich abkürzen könnte. Da aber die Beweise von (51) und (53) schon an sich sehr umständlich sind, konnte ich mich dazu nicht entschließen.

§ 4. Behandlung des I und II Problems mit Hilfe der Sätze 2, 5 und 6

Bei Behandlung der Probleme I und II werden Sätze der Winogradoffschen Art nur zum Beweise des folgenden Hilfssatzes benötigt. In diesem Paragraphen soll Satz 8 als richtig vorausgesetzt werden; die Zahlen α, β, γ, δ und X mögen demgemäß die Bedingungen (34) erfüllen.

Hilfssatz 4.1. *Es sei* $r \geqslant \mathrm{Max}(A_1, 36)$, $M \leqslant M' \leqslant 2M$,

$$(x;\, 11/10r) \leqslant M \leqslant (x;\, 9/5r)\,, \tag{60}$$

$$S = \sum_{m=M}^{M'} m^{-ix}\,. \tag{61}$$

Dann ist

$$S = B\exp(A_2 r^{\alpha}\log^{\beta} r)\{M;\, 1-(19A_3 r^{\gamma}\log^{\delta} r)^{-1}\}\log^{X} 2M\,. \tag{62}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $M \geqslant 36$. Ich setze

$$n = \left[M\left(x;\, -\frac{1}{r+2}\right)\right], \qquad l = \left[\frac{M'-M}{n}\right]. \tag{63}$$

Dann ist

$$M\left(x;\, -\frac{1}{r+2}\right) \geqslant \left(M;\, 1-\frac{r}{r+2}\right) \geqslant 1 \qquad \textbf{(60)},$$

also $n > 0$, wie es sich gehört. Es sei $l \geqslant 2$; für $l \leqslant 1$ ist nämlich $M'-M < 2n$, also

$$|S| \leqslant M'-M+1 \leqslant 2n \leqslant 2M\left(x;\, -\frac{1}{r+2}\right) \leqslant 2\left(M;\, 1-\frac{5r}{9(r+2)}\right) \leqslant 2M^{1/2},$$

d. h. (62) erfüllt. Der Buchstabe a bedeute eine der Zahlen $0, 1, \ldots, l-1$. Ferner sei

$$X_a = M + an\,. \tag{64}$$

Aus (60), (63) und (64) ergibt sich erstens

$$\frac{n}{X_a} \leqslant \frac{n}{M} \leqslant \left(x;\, -\frac{1}{r+2}\right) \leqslant \left(M;\, -\frac{5r}{9r+18}\right) \leqslant M^{-1/2} \leqslant \frac{1}{6}, \tag{65}$$

zweitens

$$X_{l-1}+n = M+ln > M+\left(\frac{M'-M}{n}-1\right)n, \qquad X_{l-1}+n \leqslant M+\frac{M'-M}{n}\,n,$$

$$M'-n < X_{l-1}+n \leqslant M'\,, \tag{66}$$

also

$$S = \sum_{a=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{n-1}(X_a+m)^{-ix} + Bn\,. \tag{67}$$

Nunmehr sei für $|y| < X_a$

$$\log\left(1+\frac{y}{X_a}\right) = P(y) + y^{r+2}T(y)\,, \tag{68}$$

$$P(y) = \sum_{c=1}^{r+1}\frac{(-1)^{c+1}}{c}\left(\frac{y}{X_a}\right)^{c}, \tag{69}$$

$$T(y) = (-1)^{r+1}X_a^{-r-2}\sum_{c=0}^{\infty}\frac{(-1)^{c}}{c+r+2}\left(\frac{y}{X_a}\right)^{c},$$

$$e\left\{-\frac{x}{2\pi}\,y^{r+2}T(y)\right\} = \sum_{h=0}^{\infty} w_h y^h\,. \tag{70}$$

Es wird dann

$$\sum_{h=0}^{\infty} w_h y^h = e\left\{-\frac{x}{2\pi}\,y^{r+2}(-1)^{r+1}X_a^{-r-2}\sum_{c=0}^{\infty}\frac{(-1)^{c}}{c+r+2}\left(\frac{y}{X_a}\right)^{c}\right\}.$$

Hieraus folgt nach (63)-(65), mit dem üblichen Majorantenkunstgriff,

$$\sum_{h=0}^{\infty}|w_h| n^h \leqslant \exp\left(xn^{r+2}M^{-r-2}r^{-1}\sum_{c=0}^{\infty}6^{-c}\right)$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{6x}{5r}M^{r+2}x^{-1}M^{-r-2}\right) \leqslant e\,. \tag{71}$$

Andererseits bekommt man für die m-Summe in (67)

$$\sum_{m=0}^{n-1}(X_a+m)^{-ix} = X_a^{-ix}\sum_{m=0}^{n-1}\left(1+\frac{m}{X_a}\right)^{-ix}, \tag{72}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1}\left(1+\frac{m}{X_a}\right)^{-ix} = \sum_{m=0}^{n-1}\exp\left\{-ix\log\left(1+\frac{m}{X_a}\right)\right\}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} e\left\{-\frac{x}{2\pi}\left(P(m)+m^{r+2}T(m)\right)\right\} \qquad \textbf{(68)}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} e\left\{-\frac{x}{2\pi}P(m)\right\}\sum_{h=0}^{\infty} w_h m^h \qquad \textbf{(70)}$$

$$= B\sum_{h=0}^{\infty}|w_h|\left|\sum_{m=0}^{n-1} e\left\{\frac{xP(m)}{2\pi}\right\} m^h\right|.$$

Wendet man hier auf die m-Summe das Abelsche Lemma ([10], S. 88, Satz 140) an, so folgt wegen (71) und (72)

$$\sum_{m=0}^{n-1}(X_a+m)^{-ix} = B\sum_{h=0}^{\infty}|u_h|n^h\cdot\operatorname*{Max}_{M''\leqslant n}\left|\sum_{m=1}^{M''}e\left\{\frac{xP(m)}{2\pi}\right\}\right|$$

$$= B\operatorname*{Max}_{M''\leqslant n}\left|\sum_{m=1}^{M''}e\{xP(m)/2\pi\}\right|. \tag{73}$$

Hierin ist nach (69)

$$xP(m)/2\pi = \theta m^{r+1}+\theta_1 m^r+\ldots+\theta_r,$$

$$\theta = (-1)^r x/2\pi(r+1)X_a^{r+1}. \tag{74}$$

Aus (74), (64), (63) und (60) folgt

$$0 < 2(r+1)|\theta|M'' \leqslant \frac{2(r+1)xn}{2\pi(r+1)X_a^{r+1}} \leqslant \frac{xM}{M^{r+1}} \leqslant 1. \tag{75}$$

Auf die m-Summe in (73) darf daher Satz 8 mit $M = M''$ und dem Wert (74) von θ angewendet werden. Es folgt, wegen $M''\leqslant n$, wenn zur Abkürzung $A_3 r^\gamma\log^\delta r = R$ gesetzt wird,

$$\sum_{m=0}^{n-1}(X_a+m)^{-ix} = B\exp(A_2 r^\alpha\log^\beta r)(n;1-R^{-1})\log^X 2n+$$
$$+B\left(x;-\frac{1}{r}\right)\left(X_a;\frac{r+1}{r}\right),$$

und daraus, nach (67), (64) und (66),

$$S = B\exp(A_2 r^\alpha\log^\beta r)\,l(n;1-R^{-1})\log^X 2n+$$
$$+Bl\left(x;-\frac{1}{r}\right)\left(M;\frac{r+1}{r}\right)+Bn.$$

Hierbei ist nach (60) und (63)

$$l(n;1-R^{-1}) = BM(n;-R^{-1})$$
$$= B\left(M;1-\frac{1}{R}\right)\left(x;\frac{1}{(r+2)R}\right) = B\left(M;1-\frac{1}{R}+\frac{10r}{11(r+2)R}\right)$$
$$= B\left(M;1-\frac{r+22}{11(r+2)R}\right) = B\left(M;1-\frac{1}{11R}\right),$$

$$l\left(x;-\frac{1}{r}\right)\left(M;\frac{r+1}{r}\right) = BMn^{-1}\left(x;-\frac{1}{r}\right)\left(M;\frac{r+1}{r}\right)$$
$$= B\left(M;1+\frac{1}{r}\right)\left(x;-\frac{2}{(r+2)r}\right)$$
$$= B\left(M;1+\frac{1}{r}-\frac{10r}{9(r+2)r}\right)$$
$$= B\left(M;1-\frac{r-18}{9(r+2)r}\right).$$

Wegen $r\geqslant 36$, $R\geqslant A_3 r\geqslant r$ ist ferner

$$\frac{r-18}{9(r+2)r}\geqslant\frac{1}{19r}\geqslant\frac{1}{19R},$$

d. h. man hat

$$l\left(x;-\frac{1}{r}\right)\left(M;\frac{r+1}{r}\right) = B\left(M;1-\frac{1}{19R}\right).$$

Aus (65) folgt schließlich $n\leqslant M^{1/2}$. Damit ist die Behauptung (62) bewiesen.

Es soll jetzt gezeigt werden, daß aus Hilfssatz 4.1 die Abschätzungen

$$\zeta(1+ix) = B\left(t;\frac{\alpha+\gamma}{1+\alpha+\gamma}\right)\left(u;\frac{\beta+\delta}{1+\alpha+\gamma}\right), \tag{76}$$

$$\Pi(x) = Bx\exp\left\{-A\left(t;\frac{1+\alpha+\gamma}{1+2\alpha+2\gamma}\right)\left(u;-\frac{\beta+\delta}{1+2\alpha+2\gamma}\right)\right\} \tag{77}$$

folgen. Dabei ist es, mit Rücksicht auf die Anwendung im nächsten Paragraphen, wichtig festzustellen, daß *die Richtigkeit von Hilfssatz* 4.1 *für irgendwelche Werte der Parameter* A_1, A_2, A_3, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,X$ *vorausgesetzt wird, die an die einzige Bedingung* (34) *geknüpft sind.* Es brauchen nicht diejenigen Werte zu sein, die in Satz 8 auftreten.

Von den folgenden vier Hilfssätzen enthält der erste wohlbekannte Formeln aus der Theorie der Zetafunktion.

Hilfssatz 4.2. *Für* $\sigma\geqslant 1$ *ist*

$$\zeta(\sigma+ix) = Bt. \tag{78}$$

Für $6\leqslant m\leqslant u$, $1-2^{1-m}\leqslant\sigma\leqslant 1$ *ist*

$$\sum_{(x;2/m)<n\leqslant x^2} n^{-\sigma-ix} = B. \tag{79}$$

Für $1-2^{-5}\leqslant\sigma\leqslant 1$ *ist*

$$\zeta(\sigma+ix) = \sum_{n\leqslant x^2} n^{-\sigma-ix}+B. \tag{80}$$

Bemerkungen. 1. Die Beweise von (78)-(80) findet man in [11], Satz 371, Satz 392 mit $w=1$. Satz 393 mit $w=1$. Dort wird in (79) und (80) $\sigma<1$ angenommen; die Richtigkeit dieser Formeln für $\sigma=1$ folgt durch Grenzübergang $\sigma\to 1$.

2. Die Abschätzung (79) wird mit der Weylschen Methode bewiesen. Aus (79) mit $\sigma=1$, $m=[u]$ und (80) mit $\sigma=1$ folgt

$$\begin{aligned}\zeta(1+ix) &= \sum_{n\leqslant(x;2[u]^{-1})} n^{-1-ix}+\sum_{(x;2[u]^{-1})<n\leqslant x^2} n^{-1-ix}+B\\ &= Btu^{-1}+B+B = Btu^{-1},\end{aligned}$$

also die Weylsche Abschätzung (57).

Die folgenden drei Hilfssätze bilden zusammengenommen eine naheliegende, aber nützliche Verallgemeinerung einer Landauschen Methode, bei der aus einer Abschätzung von $\zeta(\sigma+ix)$ in einem Gebiet in der Nähe der Geraden $\sigma=1$ eine Abschätzung von $\Pi(x)$ hergeleitet wird; vgl. [11], S. 9-28. Die Hilfssätze 4.3 und 4.4 werden nur zum Beweise von Hilfssatz 4.5 benötigt.

Hilfssatz 4.3 ([14], S. 50, Satz 3.10). *Im Gebiete*

$$1-g(y)\leqslant\sigma\leqslant 2,\quad y\geqslant 0 \tag{81}$$

sei

$$\zeta(\sigma+iy) = O(\exp\{f(y)\})\quad (y\to\infty). \tag{82}$$

Dabei seien die Funktionen $f(y)$ *und* $1/g(y)$ *für* $y\geqslant 0$ *positiv zunehmend;* $g(y)\leqslant 1$, $f(y)\to\infty$,

$$f(y)/g(y) = o(\exp\{f(y)\}). \tag{83}$$

Für eine geeignete Konstante C *ist dann*

$$\zeta(\sigma+iy)\neq 0 \tag{84}$$

im Gebiete

$$\sigma\geqslant 1-Cg(2y+1)/f(2y+1),\quad y\geqslant 0. \tag{85}$$

Hilfssatz 4.4 ([7], S. 63, Satz 22 mit $a=\frac{1}{2}$). *Die Ungleichung* (84) *sei im Gebiet*

$$\sigma>1-\eta(y),\quad y\geqslant 0 \tag{86}$$

erfüllt, wobei die Funktion $\eta(y)$ *für* $y\geqslant 0$ *positiv abnehmend ist, eine stetige Ableitung* $\eta'(y)$ *besitzt und die folgenden Bedingungen erfüllt:*

$$0<\eta(y)\leqslant\tfrac{1}{2}; \tag{87}$$

$$\eta'(y)\to 0\quad \text{für}\quad y\to\infty; \tag{88}$$

$$1/\eta(y) = O(\log y)\quad \text{für}\quad y\to\infty; \tag{89}$$

$$\eta(y)t+\log y\geqslant 4\omega(x)\quad \text{für}\quad y\geqslant 1. \tag{90}$$

Dann ist

$$\Pi(x) = O(x\exp\{-\omega(x)\}). \tag{91}$$

Hilfssatz 4.5. *Es seien* $\gamma,\delta,\lambda,\mu$ *absolute Konstanten,*

$$0\leqslant\gamma<1,\quad \delta\geqslant 1\quad \text{für}\quad \gamma=0,\quad 0<\lambda<1-\gamma. \tag{92}$$

Im Gebiet

$$\sigma\geqslant 1-A_4t^{-\lambda}u^{\mu} \tag{93}$$

sei

$$\zeta(\sigma+ix) = B\exp(A_5t^{\gamma}u^{\delta}). \tag{94}$$

Dann ist

$$\Pi(x) = Bx\exp\left\{-A\left(t;\frac{1}{1+\gamma+\lambda}\right)\left(u;\frac{\mu-\delta}{1+\gamma+\lambda}\right)\right\}. \tag{95}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $A_5\geqslant 1$. Für ein geeignetes A_6 genügen die Funktionen

$$f(y) = 2A_5\log^{\gamma}(\tfrac{1}{2}(y-1)+A_6)\{\log\log(\tfrac{1}{2}(y-1)+A_6)\}^{\delta},$$

$$g(y) = \tfrac{1}{2}A_4\log^{-\lambda}(\tfrac{1}{2}(y-1)+A_6)\{\log\log(\tfrac{1}{2}(y-1)+A_6)\}^{\mu}$$

den Bedingungen von Hilfssatz 4.3. Daher gilt die Ungleichung (84) im Gebiet (86), wenn

$$\eta(y) = A_7\log^{-\gamma-\lambda}(y+A_6)\{\log\log(y+A_6)\}^{\mu-\delta}$$

gesetzt wird. Dabei sei A_7 so klein, daß die Ungleichung (87) erfüllt ist. Die Funktion $\eta(y)$ genügt dann den Bedingungen (87)-(89) von Hilfssatz 4.4. Es werde

$$\gamma+\lambda = a,\quad \mu-\delta = \beta \tag{96}$$

gesetzt. Nach (92) ist dann $0 < \alpha < 1$, und die Funktion $\eta(y)$ nimmt die Gestalt

$$\eta(y) = A_7 \log^{-\alpha}(y+A_6)\{\log\log(y+A_6)\}^{\beta} \tag{97}$$

an. Es soll gezeigt werden, daß die Bedingung (90) für die Funktion

$$\omega(x) = A\left(t; \frac{1}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right) \tag{98}$$

erfüllt ist, wenn man A geeignet wählt. Zunächst ist

$$\eta(y)t + \log y \geqslant A_8\left(t; \frac{1}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right) \quad \text{für} \quad 1 \leqslant y \leqslant 3.$$

Sei jetzt $y \geqslant 3$, also

$$\log(y+A_6) \leqslant A_9 \log y.$$

Für

$$\log y \geqslant \left(t; \frac{1}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right) \tag{99}$$

ist

$$\eta(y)t + \log y \geqslant \left(t; \frac{1}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right).$$

Ist aber die Bedingung (99) nicht erfüllt, so hat man

$$\frac{1}{A_9}\log(y+A_6) \leqslant \log y < \left(t; \frac{1}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right),$$

$$\log(y+A_6) \leqslant A_9\left(t; \frac{1}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right) = F(t).$$

Da die Funktion (97) für $y \geqslant 3$ abnimmt (sogar für $y \geqslant 0$), so bekommt man eine untere Schranke für sie, wenn man $\log(y+A_6)$ durch $F(t)$ und $\log\log(y+A_6)$ durch $\log F(t)$ ersetzt. Dabei ist für $t \to \infty$

$$\log F(t) \sim \frac{1}{1+\alpha} u.$$

Also ist

$$\eta(y) \geqslant A_{10}\left\{\left(t; \frac{1}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right)\right\}^{-\alpha} u^{\beta} = A_{10}\left(t; -\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right),$$

$$\eta(y)t + \log y \geqslant A_{10}\left(t; \frac{1}{1+\alpha}\right)\left(u; \frac{\beta}{1+\alpha}\right).$$

Setzt man daher

$$A = \tfrac{1}{4}\mathrm{Min}(1, A_8, A_{10}),$$

so ist die Bedingung (90) von Hilfssatz 4.4 für die Funktion (98) erfüllt. Die Abschätzung (95) folgt jetzt aus (91), (98) und (96).

B e w e i s v o n (76). Aus (61) und (62) folgt durch partielle Summation für $r \geqslant \mathrm{Max}(A_1, 36)$

$$\sum_{m=M}^{M'} m^{-1-ix} = B\exp(A_2 r^{\alpha}\log^{\beta} r)\{M; -(19R)^{-1}\}\log^{X} 2M, \tag{100}$$

wobei $R = A_3 r^{\gamma}\log^{\delta} r$ ist. Wegen

$$9/5(r+1) \geqslant 11/10r$$

ist das Intervall

$$(x; 9/5(r+1)) < M \leqslant (x; 9/5r) \tag{101}$$

im Intervall (60) enthalten. Das Intervall (101) zerfällt in Bt Intervalle der Gestalt $M \leqslant m \leqslant M'$. Somit ist

$$\sum_{\left(x; \frac{9}{5(r+1)}\right) < n \leqslant \left(x; \frac{9}{5r}\right)} n^{-1-ix} = B\exp(A_2 r^{\alpha}\log^{\beta} r)\exp\left(-\frac{9t}{5\cdot 19(r+1)R}\right)t^{X+1}$$

$$= B\exp\left\{A_2 r^{\alpha}\log^{\beta} r - \frac{t}{11rR} + (X+1)u\right\}. \tag{102}$$

Es werde jetzt A_{11} so gewählt, daß

$$Y = A_2 A_{11}^{\alpha} - (22 A_3 A_{11}^{1+\gamma})^{-1} \leqslant -(X+2). \tag{103}$$

Das ist möglich, denn für $A_{11} \to 0$ strebt Y gegen $-\infty$. (Für den Beweis von (76) würde 11 statt 22 in (103) genügen; die 22 steht mit Rücksicht auf die Anwendung beim Beweise von (77).) Ferner werde gesetzt

$$a = \mathrm{Max}([A_1]+1, 4), \qquad \lambda = \frac{1}{1+\alpha+\gamma}, \qquad \mu = -\frac{\beta+\delta}{1+\alpha+\gamma}, \tag{104}$$

$$r_0 = [A_{11} t^{\lambda} u^{\mu}], \qquad R_0 = A_3 r_0^{\gamma}\log^{\delta} r_0. \tag{105}$$

Ich benutze die Abschätzung (102) für $r = 9a, 9a+1, \ldots, r_0$ und erhalte wegen $r_0 \leqslant t$

$$\sum_{(x; 9/5(r_0+1)) < n \leqslant (x; 1/5a)} n^{-1-ix} = B r_0 \exp\left\{A_2 r_0^{\alpha}\log^{\beta} r_0 - \frac{t}{11 r_0 R_0} + (X+1)u\right\}$$

$$= B\exp\{A_2 A_{11}^{\alpha} t^{\alpha\lambda} u^{\alpha\mu+\beta} - (11 A_3 A_{11}^{1+\gamma})^{-1} t^{1-(1+\gamma)\lambda} u^{-(1+\gamma)\mu-\delta} + (X+2)u\} \tag{106}$$

$$= B\exp\left\{Y\left(t; \frac{\alpha}{1+\alpha+\gamma}\right)\left(u; \frac{\beta(1+\gamma)-\alpha\delta}{1+\alpha+\gamma}\right) + (X+2)u\right\} \tag{107}$$

$$= B\exp(0) = B;$$

der in exp stehende Ausdruck ist nämlich für $a>0$ negativ und für $a=0$ ist er wegen $\beta\geqslant 1$ (34)

$$\leqslant -(X+2)u^{\beta}-(X+2)u\leqslant 0.$$

Ferner ergibt eine triviale Abschätzung

$$\sum_{n\leqslant(x;\,9/5(r_0+1))} n^{-1-ix}=B\frac{t}{r_0}=B\left(t;\frac{a+\gamma}{1+a+\gamma}\right)\left(u;\frac{\beta+\delta}{1+a+\gamma}\right), \tag{108}$$

und aus (79) mit $m=10a$, $\sigma=1$ folgt

$$\sum_{(x;\,1/5a)<n\leqslant x^2} n^{-1-ix}=B. \tag{109}$$

(76) ergibt sich aus (107)-(109) und (80) mit $\sigma=1$.

Beweis von (77). Es mögen die bisherigen Bezeichnungen gelten und es sei

$$1-1/40R_0\leqslant\sigma<1. \tag{110}$$

Für $r\geqslant\operatorname{Max}(A_1,36)$ ist

$$\sum_{m=M}^{M'} m^{-\sigma-ix}=B\exp(A_2r^a\log^\beta r)\,M^{1-\sigma}\{M;-(19R)^{-1}\}\log^X 2M \qquad (\mathbf{61},\mathbf{62}).$$

Diese Abschätzung unterscheidet sich von (100) nur durch den zusätzlichen Faktor $M^{1-\sigma}$, wobei für $r\leqslant r_0$ nach (60)

$$M^{1-\sigma}\leqslant\left(x;\frac{9(1-\sigma)}{5r}\right)\leqslant\exp\left(\frac{9t}{200rR_0}\right)\leqslant\exp\left(\frac{t}{22rR}\right).$$

Für die Summe

$$\sum_{(x;\,9/5(r+1))<n\leqslant(x;\,9/5r)} n^{-\sigma-ix}$$

gilt daher die Abschätzung (102), wenn man in ihr 11 durch 22 ersetzt. Für die Summe

$$\sum_{(x;\,9/5(r_0+1))<n\leqslant(x;\,1/5a)} n^{-\sigma-ix}$$

bekommt man die Abschätzung (106), in der auch 11 durch 22 zu ersetzen ist. Nach (103) bleibt also (107) in Kraft, d. h. es ist

$$\sum_{(x;\,9/5(r_0+1))<n\leqslant(x;\,1/5a)} n^{-\sigma-ix}=B. \tag{111}$$

Für $1-2^{1-10a}\leqslant\sigma\leqslant 1$, also erst recht unter der Bedingung (110), ist

$$\sum_{(x;\,1/5a)<n\leqslant x^2} n^{-\sigma-ix}=B \qquad (\mathbf{79}). \tag{112}$$

Ferner ist

$$\sum_{n\leqslant(x;\,9/5(r_0+1))} n^{-\sigma-ix}=B\left(x;\frac{2}{r_0}(1-\sigma)\right)\sum_{n\leqslant x} n^{-1}=B\exp\left(\frac{t}{20r_0R_0}+u\right) \qquad (\mathbf{110}),$$

$$20r_0R_0\geqslant At^{(1+\gamma)\lambda}u^{(1+\gamma)\mu+\delta}=A\left(t;\frac{1+\gamma}{1+a+\gamma}\right)\left(u;\frac{a\delta-\beta(1+\gamma)}{1+a+\gamma}\right) \qquad (\mathbf{104},\mathbf{105}),$$

$$\sum_{n\leqslant(x;\,9/5(r_0+1))} n^{-\sigma-ix}=B\exp\left\{A\left(t;\frac{a}{1+a+\gamma}\right)\left(u;\frac{\beta(1+\gamma)-a\delta}{1+a+\gamma}\right)\right\} \qquad (\mathbf{34}), \tag{113}$$

$$\zeta(\sigma+ix)=B\exp\left\{A\left(t;\frac{a}{1+a+\gamma}\right)\left(u;\frac{\beta(1+\gamma)-a\delta}{1+a+\gamma}\right)\right\} \qquad (\mathbf{111\text{-}113},\mathbf{80}). \tag{114}$$

Für $\sigma\geqslant 1$ ist die Abschätzung (114), nach (78) und (34), auch richtig. Wegen

$$40R_0\leqslant At^{\gamma\lambda}u^{\gamma\mu+\delta}=A\left(t;\frac{\gamma}{1+a+\gamma}\right)\left(u;\frac{(1+a)\delta-\beta\gamma}{1+a+\gamma}\right) \qquad (\mathbf{104},\mathbf{105})$$

gilt sie also für

$$\sigma\geqslant 1-A\left(t;-\frac{\gamma}{1+a+\gamma}\right)\left(u;\frac{\beta\gamma-(1+a)\delta}{1+a+\gamma}\right). \tag{115}$$

Aus (114), (115) und (34) ergibt sich, daß die Bedingungen von Hilfssatz 4.5 erfüllt sind, wenn man dort $\gamma,\delta,\lambda,\mu$ durch

$$\frac{a}{1+a+\gamma},\quad\frac{\beta(1+\gamma)-a\delta}{1+a+\gamma},\quad\frac{\gamma}{1+a+\gamma},\quad\frac{\beta\gamma-(1+a)\delta}{1+a+\gamma}$$

ersetzt. Dabei gehen $1+\gamma+\lambda$ und $\mu-\delta$ über in

$$\frac{1+2a+2\gamma}{1+a+\gamma},\quad -\frac{\beta+\delta}{1+a+\gamma},$$

und aus (95) folgt die Abschätzung (77).

Nach Satz 2 gilt Satz 8 für die Werte (35). Trägt man diese Werte in (76) und (77) ein, so ergeben sich die Abschätzungen (49) und (50).

Nach Satz 5 gilt Satz 8 für die Werte (36), nach Satz 6 gilt er für die Werte (37). Setzt man diese beiden Wertsysteme in (76) und (77) ein, so ergeben sich die Abschätzungen (44) und (45).

§ 5. Behandlung des I und II Problems mit Hilfe der Sätze 1, 3, 4 und 7

Anwendung von Satz 1. Es sei $r \geqslant 36$, M gehöre dem Intervall (60) an, S bedeute die Summe (61). Ich beginne wie beim Beweise von Hilfssatz **4.1** und gehe bis zu (75) einschließlich. Auf die m-Summe in (73) werde dann Satz 1 mit $M = M''$ angewandt. Für den Wert (74) von θ ist nach (64), (66) und (60)

$$|\theta| \leqslant x/M^{r+1} \leqslant (M;\ -r/11),$$

$$|\theta| \geqslant \frac{x}{2\pi(r+1)(2M)^{r+1}} \geqslant \frac{(M;\ 5r/9-r-1)}{2\cdot 2^2\cdot 2^r\cdot 2^{r+1}}$$

$$\geqslant (M;\ -4r/9-1)\,2^{-3r} \geqslant M^{-r/2}2^{-3r},$$

(116) $$M^{r/11} \leqslant 1/|\theta| \leqslant M^{r/2}2^{3r}, \qquad 0 \leqslant \log(1/|\theta|) \leqslant Ar\log 2M.$$

Die Abschätzung (7) nimmt wegen (116) die Gestalt

(117) $$S = Br^{A+2}\{M;\ 1-(11Ar^3\log r)^{-1}\}\log^2 M + BM^{1/2}$$

an. Damit ist Hilfssatz 4.1 mit geeigneten Werten von A_1, A_2, A_3, den Werten (35) von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und dem Wert 2 von X bewiesen. Die Bedingungen (34) sind dabei erfüllt. Es ergeben sich also die Spezialfälle (35) von (76) und (77), d. h. die Abschätzungen (49) und (50).

Anwendung von Satz 4. Es sei $r \geqslant 36$,

(118) $$n = r,\ r-1,\ \ldots,\ r-k; \qquad k = [\tfrac{1}{2}r],$$

(119) $$(x;\ 1/n) \leqslant M \leqslant (x;\ 1/(n-1)),$$

(120) $$M < M' \leqslant (2;\ 1/(r+1))\,M;$$

(121) $$f(y) = -(x\log y)/2\pi \qquad (y \geqslant 1),$$

also

(122) $$f^{(n+1)}(y) = (-1)^{n+1}n!\,x/2\pi y^{n+1};$$

(123) $$C = 4\pi(n+1)\,M^{n+1}/x.$$

Die Ungleichung (22) ist dann mit $r = n$ im Intervall $M \leqslant y \leqslant M'$ erfüllt. Ferner ist $n \geqslant 7$,

(124) $$C \geqslant M^{n+1}x^{-1} \geqslant M$$

und

(125) $$C = \frac{4\pi(n+1)\,M^{n-3}}{x}M^4 \leqslant 4\pi(n+1)\left(x;\ -\frac{2}{n-1}\right)M^4 \leqslant M^4,$$

wenn

$$\{4\pi(n+1)\}^{(n-1)/2} \leqslant x,$$

also erst recht, wenn

$$\{4\pi(r+1)\}^{(r-1)/2} \leqslant x, \qquad Ar\log r \leqslant t,$$

(126) $$r \leqslant A_{12}tu^{-1}.$$

Wird die Ungleichung (126) vorausgesetzt, so sind also wegen (124) und (125) alle Bedingungen von Satz 4 erfüllt, wenn $r = n$, $m = M$, $M_1 = M' - M$ gesetzt wird. Für die Summe (61) ergibt sich daher wegen $n \leqslant r$ die Abschätzung (23). Bildet man die Summe der Intervalle (119) für alle Werte (118), so bekommt man das Intervall

(127) $$\left(x;\ \frac{1}{r}\right) \leqslant M \leqslant \left(x;\ \frac{1}{r-k-1}\right).$$

Wegen

$$\frac{1}{r-k-1} \geqslant (r-r/2)^{-1} = \frac{2}{r}$$

ist das Intervall

(128) $$(x;\ 11/10r) \leqslant M \leqslant 2\,(x;\ 9/5r)$$

im Intervall (127) enthalten, sobald $(x;\ 2/r) \geqslant 2(x;\ 9/5r)$, also erst recht, sobald $(x;\ 1/5r) \geqslant e$, d. h. $r \leqslant \frac{1}{5}t$. Insbesondere ist das Intervall (128) in (127) enthalten, wenn die Ungleichung (126) erfüllt ist.

Jedes Intervall $M \leqslant y \leqslant M'$, wobei M in (60) liegt und $M \leqslant M' \leqslant 2M$ ist, zerfällt in Br Intervalle derselben Gestalt mit (120), wobei M jedesmal dem Intervall (128) angehört. Verzichtet man also auf die Bedingung (120) zugunsten von $M \leqslant M' \leqslant 2M$, so gilt für die Summe (61), unter der Annahme (60), immer noch die Abschätzung (23), wenn man die rechte Seite mit r multipliziert, d. h. man hat

(129) $$S = B\exp(19r\log^2 r)\{M;\ 1-(50r^2\log r)^{-1}\}\log 2M.$$

Die Bedingung (126) kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit weggelassen werden; die Abschätzung (129) wird nämlich trivial, sobald r die Zahl (56), bei geeignetem A, übertrifft. Damit ist Hilfssatz 4.1 für die Werte (36) bewiesen. Also gelten die Abschätzungen (76), (77) für die Werte (36), d. h. man bekommt die Abschätzungen (44) und (45).

Anwendung von Satz 3. Der Beweis von (44) und (45) verläuft ähnlich, wie bei der Anwendung von Satz 4, ist aber etwas einfacher. Es sei $r \geqslant 36$, n eine der Zahlen (118), M gehöre dem Intervall (119) an.

Die Bedingung (120) ersetze man durch $M < M' \leqslant 2M$. Die Funktion (121) werde beibehalten, also auch (122), während (123) durch

$$C = 2\pi(n+1)(2M)^{n+1}/x, \qquad D = 2^{n+1}, \qquad H = M^2 \tag{130}$$

ersetzt wird. Ungleichung (17) ist dann mit $r = n$ im Intervall $M \leqslant y \leqslant M'$ erfüllt. Ferner ist $n \geqslant 11$. Die Ungleichung (124) bleibt bestehen; (125) bis (126) werden ersetzt durch: Es ist

$$C = \frac{2^{n+2}\pi(n+1)M^{n-3}}{x} M^4 \leqslant 2^{n+2}\pi(n+1)\left(x; -\frac{2}{n-1}\right) M^4 \leqslant M^4, \tag{131}$$

wenn

$$\{2^{n+2}\pi(n+1)\}^{(n-1)/2} \leqslant x,$$

also erst recht, wenn

$$\{2^{r+2}\pi(r+1)\}^{(r-1)/2} \leqslant x, \qquad 2^{r^2} \leqslant x,$$

$$r \leqslant t^{1/2}. \tag{132}$$

Gilt diese Ungleichung, so sind wegen (124) und (131) alle Voraussetzungen von Satz 3 mit $r = n$, $M_1 = M' - M$ und den Werten (130) erfüllt. Da $n \leqslant r$ und das Intervall (60) in der Summe (127) der Intervalle (119) enthalten ist, so folgt aus (20) für die Summe (61), unter der Annahme (60),

$$\begin{aligned} S &= B\exp\{\tfrac{1}{2}r(\log 120r - 1{,}7)\log 8r\} 2^r M^{1-\varrho/3} \\ &= B\exp(\tfrac{1}{2}r\log 120r \cdot \log 8r) M^{1-\varrho/3} \\ &= B\exp(\tfrac{1}{2}r\log r^{2,4}\log r^{1,6}) M^{1-\varrho/3} \\ &= B\exp(2r\log^2 r) M^{1-\varrho/3}. \end{aligned}$$

Nach (19) ist ferner

$$\tfrac{1}{3}\varrho = (9r^2\log 120r)^{-1} \geqslant (9r^2\log r^{2,4})^{-1} \geqslant (22r^2\log r)^{-1}.$$

Somit ist

$$S = B\exp(2r\log^2 r)\{M; 1-(22r^2\log r)^{-1}\}. \tag{133}$$

Diese Abschätzung gilt offenbar auch für $M' = M$, und die Bedingung (132) kann aus demselben Grunde weggelassen werden, wie vorhin die Bedingung (126). Hilfssatz 4.1 gilt also für die Werte (36), und man bekommt wiederum die Abschätzungen (44) und (45).

Anwendung von Satz 7. Hier zeigte Klimoff (Spezialfall $w = 0$ von [8], Satz 2), mit Hilfe seines Satzes 7:

Für

$$\sigma \geqslant 1 - t^{-1/2}, \tag{134}$$

$$k = [\exp(2{,}2t^{3/4}u^{3/4})] \tag{135}$$

ist

$$\Bigl|\sum_{k<n\leqslant x^{2/15}} n^{-\sigma-ix}\Bigr| < \exp(-\tfrac{1}{20}t^{1/4}u^{5/4}). \tag{136}$$

Aus (136) in der weniger scharfen Form

$$\sum_{k<n\leqslant x^{2/15}} n^{-\sigma-ix} = B \tag{137}$$

ergibt sich wie folgt rasch, daß die Abschätzungen (44) und (45) gelten. Nach (135), (137) mit $\sigma = 1$, (79) mit $m = 15$, $\sigma = 1$ und (80) mit $\sigma = 1$ ist

$$\zeta(1+ix) = B\sum_{n=1}^{k} n^{-1} + B = B\log k = Bt^{3/4}u^{3/4},$$

d. h. (44) ist erfüllt. Nach (135), (137), (79) mit $m = 15$ und (80) ist für die σ mit (134)

$$\zeta(\sigma+ix) = Bk^{1-\sigma}\sum_{n=1}^{k} n^{-1} + B = B\exp(t^{-1/2}\log k + \log\log k) = B\exp(At^{1/4}u^{3/4}).$$

Man kann also Hilfssatz 4.5 mit $\gamma = \frac{1}{4}$, $\delta = \frac{3}{4}$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $\mu = 0$ anwenden und bekommt (45).

§ 6. Behandlung des III Problems mit Hilfe der Sätze 2, 5 und 6

Bei Behandlung des III Problems werden Sätze der Winogradoffschen Art nur zum Beweise des folgenden Hilfssatzes benötigt, der dem Hilfssatz 4.1 entspricht. In diesem Paragraphen soll Satz 8 als richtig vorausgesetzt werden; die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und X mögen demgemäß die Bedingungen (34) erfüllen.

Hilfssatz 6.1. *Es sei* $0 < s \leqslant 1$, $r \geqslant \operatorname{Max}(A_1, 72)$, $M \leqslant M' \leqslant 2M$. *Es gehöre* M *dem Intervall* (60) *an,* S *sei die Summe*

$$S = \sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{x}{m+s}\right). \tag{138}$$

Dann ist

$$S = B\exp(A_2 r^{\alpha}\log^{\beta} r)\{M; 1-(19A_3 r^{\gamma}\log^{\delta} r)^{-1}\}\log^X 2M. \tag{139}$$

Beweis. Der Beweis von Hilfssatz **6.1** ist dem von Hilfssatz **4.1** analog. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $M \geqslant 2(r+1)$, denn für $M < 2(r+1)$ ist (139) wegen (34) klar. Ich setze diesmal

$$n = \left[\left(M; \frac{r+3}{r+2}\right)\left(x; -\frac{1}{r+2}\right)\right], \qquad l = \left[\frac{M'-M}{n}\right]. \tag{140}$$

Das jetzige n ist nicht kleiner als der Wert (63), also auch positiv. Es sei $l \geqslant 2$; denn für $l \leqslant 1$ ist $M'-M < 2n$, also

$$|S| \leqslant 2n \leqslant 2\left(M; \frac{r+3}{r+2} - \frac{5r}{9(r+2)}\right) = 2\left(M; 1 - \frac{5r-9}{9r+18}\right) \leqslant 2M^{1/2},$$

d. h. (139) erfüllt. a bedeute eine der Zahlen $0, 1, \dots, l-1$. Ferner sei

$$X_a = M+s+an. \tag{141}$$

Aus (60), (140) und (141) ergibt sich erstens

$$\frac{n}{X_a} \leqslant \frac{n}{M} \leqslant \left(\frac{M}{x}; \frac{1}{r+2}\right) \leqslant \left(M; -\frac{5r-9}{9(r+2)}\right) \leqslant M^{-1/2} \leqslant \frac{1}{6}, \tag{142}$$

zweitens

$$X_{l-1}+n = M+s+ln > M + \left(\frac{M'-M}{n} - 1\right)n,$$

$$X_{l-1}+n \leqslant M+1+\frac{M'-M}{n}n,$$

$$M'-n < X_{l-1}+n \leqslant M'+1, \tag{143}$$

also

$$S = \sum_{a=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{x}{X_a+m}\right) + Bn. \tag{144}$$

Nunmehr sei für $|y| < X_a$

$$\frac{1}{X_a+y} = \frac{1}{X_a}\{P(y) + y^{r+2}T(y)\},$$

$$P(y) = \sum_{c=0}^{r+1} (-1)^c (y/X_a)^c, \tag{145}$$

$$T(y) = (-1)^r X_a^{-r-2} \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c (y/X_a)^c,$$

$$e\left\{\frac{x}{X_a} y^{r+2} T(y)\right\} = \sum_{h=0}^{\infty} w_h y^h. \tag{146}$$

Es wird dann

$$\sum_{h=0}^{\infty} w_h y^h = e\left\{(-1)^r x X_a^{-r-3} y^{r+2} \sum_{c=0}^{\infty} (-1)^c (y/X_a)^c\right\},$$

$$\sum_{h=0}^{\infty} |w_h| n^h \leqslant \exp\left\{\frac{2\pi x n^{r+2}}{M^{r+3}} \sum_{c=0}^{\infty} \left(\frac{n}{M}\right)^c\right\} \leqslant \exp\left(\frac{12\pi x M^{r+3}}{5x M^{r+3}}\right) = B \qquad \textbf{(140-142)}.$$

Daher ergibt sich für die m-Summe in (144)

$$\sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{x}{X_a+m}\right) = \sum_{m=0}^{n-1} e\left\{\frac{xP(m)}{X_a}\right\} \sum_{h=0}^{\infty} w_h m^h \tag{146}$$

$$= B \sum_{h=0}^{\infty} |w_h| \left| \sum_{m=0}^{n-1} e\left\{\frac{xP(m)}{X_a}\right\} m^h \right|$$

$$= B \sum_{h=0}^{\infty} |w_h| n^h \cdot \operatorname*{Max}_{M'' \leqslant n} \left| \sum_{m=1}^{M''} e\left\{\frac{xP(m)}{X_a}\right\} \right|$$

$$= B \operatorname*{Max}_{M'' \leqslant n} \sum_{m=1}^{M''} e\left\{\frac{xP(m)}{X_a}\right\}. \tag{147}$$

Hierin ist nach (145)

$$xP(m)/X_a = \theta m^{r+1} + \theta_1 m^r + \dots + \theta_r,$$

$$\theta = (-1)^{r+1} x / X_a^{r+2}. \tag{148}$$

Da $M \geqslant 2(r+1)$, so folgt aus (148), (141), (140) und (60)

$$0 < 2(r+1)|\theta| M'' \leqslant \frac{2(r+1)xn}{M^{r+2}} \leqslant 2(r+1)\left(M; \frac{r+3}{r+2} - r - 2\right)\left(x; \frac{r+1}{r+2}\right)$$

$$\leqslant \left(M; \frac{r+3}{r+2} - r - 1 + \frac{r(r+1)}{r+2}\right) = \left(M; -\frac{r-1}{r+2}\right) \leqslant 1. \tag{149}$$

Auf die m-Summe in (147) darf daher Satz 8 mit $M = M''$ und dem Wert (148) von θ angewandt werden. Es folgt wegen $M'' \leqslant n$, wenn zur Abkürzung $A_3 r^{\gamma} \log^{\delta} r = R$ gesetzt wird,

$$\sum_{m=0}^{n-1} e\left(\frac{x}{X_a+m}\right)$$

$$= B \exp(A_2 r^{\alpha} \log^{\beta} r)(n; 1-R^{-1}) \log^{\chi} 2n + B\left(x; -\frac{1}{r}\right)\left(X_a; \frac{r+2}{r}\right),$$

und daraus nach (144), (141) und (143)

$$S = B\exp(A_2 r^{\alpha}\log^{\beta} r)\, l(n;\, 1-R^{-1})\log^{X} 2n + Bl\left(x;\, -\frac{1}{r}\right)\left(M;\, \frac{r+2}{r}\right) + Bn.$$

Hierbei ist nach (60), (140) und wegen $r \geqslant 72$, $R \geqslant A_3 r \geqslant r$

$$l\left(n; 1-\frac{1}{R}\right) = BM\left(n;\, -\frac{1}{R}\right) = B\left(M;\, 1-\frac{r+3}{(r+2)R}\right)\left(x;\, \frac{1}{(r+2)R}\right)$$

$$= B\left(M;\, 1-\frac{r+3}{(r+2)R} + \frac{10r}{11(r+2)R}\right) = B\left(M;\, 1-\frac{1}{11R}\right),$$

$$l\left(x;\, -\frac{1}{r}\right)\left(M;\, \frac{r+2}{r}\right) = BMn^{-1}\left(x;\, -\frac{1}{r}\right)\left(M;\, \frac{r+2}{r}\right)$$

$$= B\left(M;\, 1+\frac{r+4}{(r+2)r}\right)\left(x;\, -\frac{2}{(r+2)r}\right)$$

$$= B\left(M;\, 1+\frac{r+4}{(r+2)r} - \frac{10r}{9(r+2)r}\right)$$

$$= B\left(M;\, 1-\frac{r-36}{9(r+2)r}\right) = B\left(M;\, 1-\frac{1}{19R}\right).$$

Aus (142) folgt schließlich $n \leqslant M^{1/2}$. Damit ist die Behauptung (139) bewiesen, die formell mit (62) übereinstimmt.

Im weiteren Verlauf dieses Paragraphen sei N eine natürliche Zahl, die später in Abhängigkeit von der quadratischen Form Q der Determinante D gebracht wird. Die B-Schranken dürfen von Q, insbesondere von N, abhängen. a liege oberhalb solcher Schranken; a und b seien natürliche Zahlen $\leqslant N$. In Summen, die nach m oder nach n laufen, soll $\sum'$ andeuten, daß m neben anderen Bedingungen die Kongruenz $m \equiv a \pmod{N}$ oder, daß n neben anderen Bedingungen die Kongruenz $n \equiv b \pmod{N}$ zu erfüllen hat; $\psi(y)$ sei die Funktion (3). Es soll gezeigt werden, daß aus Hilfssatz 6.1 die Abschätzung

(150) $$P_Q(x) = Bx\left(t;\, \frac{\alpha+\gamma}{1+\alpha+\gamma}\right)\left(u;\, \frac{\beta+\delta}{1+\alpha+\gamma}\right)$$

folgt. Dabei soll (wie bei Hilfssatz 4.1 in § 4) nur vorausgesetzt werden, daß *Hilfssatz 9.1 für irgendwelche Werte der Parameter richtig ist, die an die einzige Bedingung* (34) *geknüpft sind.*

Aus der Richtigkeit von (150) für Formen Q mit ganzzahligen Koeffizienten folgt diese Abschätzung, durch einen trivialen Übergang, auch für Formen mit rationalen Koeffizienten. Daher sollen die Koeffizienten von Q, mit Rücksicht auf die aus [16] heranzuholenden Resultate, als ganzzahlig vorausgesetzt werden. Dem Beweise von (150) schicke ich zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 6.2. *Es sei* $r \geqslant \mathrm{Max}(A_1, 72)$, $R = A_3 r^{\gamma}\log^{\delta} r$,

(151) $$S_1 = \sideset{}{'}\sum_{N(x;3/2r) < m \leqslant N(x;3/2(r-1))} \frac{1}{m}\,\psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right).$$

Dann ist

(152) $$S_1 = B\exp\{A_2 r^{\alpha}\log^{\beta} r - t/13rR + (X+2)u\} + B.$$

Beweis. Wegen

$$S_1 = B\sum_{m \leqslant N(x;3/2(r-1))} m^{-1} = Bt/r + B$$

ist $S_1 = B$ für $x < (3N)^{5r}$. Mithin sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

(153) $$x \geqslant (3N)^{5r}.$$

Für $Y \geqslant 3$ ergibt nach (3) eine Fourierentwicklung

(154) $$Y\int_0^{\pm 1/Y} \psi(y+\theta)\, d\theta = \sum_{c=-\infty}^{\infty} w_c e(cy),$$

wobei

$$w_0 = 0; \qquad w_c = -\frac{Y}{2\pi i c}\int_0^{\pm 1/Y} e(c\theta)\, d\theta \qquad (c \neq 0),$$

also

(155) $$w_0 = 0; \qquad |w_c| \leqslant \mathrm{Min}(1/|c|,\, Y/c^2) \qquad (c \neq 0).$$

Es sei

(156) $$N(x;\, 3/2r) \leqslant M \leqslant N(x;\, 3/2(r-1)), \qquad M \leqslant M' \leqslant 2M,$$

(157) $$C = NM^{10r/11}x^{-1}.$$

Aus (154) und (155) folgt

(158) $$Y\left|\sideset{}{'}\sum_{m=NM}^{NM'} \int_0^{\pm 1/Y} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + \theta\right) d\theta\right| \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sideset{}{'}\sum_{m=NM}^{NM'} e\left(\frac{nx}{m}\right)\right| \mathrm{Min}\left(\frac{1}{n},\, \frac{Y}{n^2}\right)$$

(159) $$= 2\sum_{n \leqslant C} + 2\sum_{n > C} = 2S_2 + 2S_3,$$

zur Abkürzung. In S_2 nehme man

$$nx/N = H. \tag{160}$$

Dann ist mit $s = a/N$ (also $0 < s \leqslant 1$)

$$\left|\sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{nx}{m}\right)\right| = \left|\sum_{\substack{m=NM\\ m\equiv a(\mathrm{mod} N)}}^{NM'} e\left(\frac{nx}{m}\right)\right| \leqslant \left|\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{nx}{Nm+a}\right)\right| + 2,$$

d. h.

$$\left|\sum_{m=NM}^{NM'}{}' e\left(\frac{nx}{m}\right)\right| \leqslant \left|\sum_{m=M}^{M'} e\left(\frac{H}{m+s}\right)\right| + 2. \tag{161}$$

Weiter ist

$$M^{10r/11} = Cx/N \geqslant nx/N = H \qquad (157, 159, 160),$$

$$(H; 9/5r) = \left(\frac{nx}{N}; \frac{9}{5r}\right) \geqslant \left(\frac{x}{N}; \frac{9}{5r}\right) \geqslant \left(x; \left(1-\frac{1}{5r}\right)\frac{9}{5r}\right) \qquad (153)$$

$$\geqslant \left(x; \frac{1}{5r} + \frac{3}{2(r-1)}\right) \geqslant N\left(x; \frac{3}{2(r-1)}\right) \geqslant M \qquad (156).$$

Auf die rechts in (161) stehende Summe darf daher Hilfssatz 6.1, mit H statt x, angewandt werden, und es folgt

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' e(nx/m) = B \exp(A_2 r^a \log^\beta r)\{M; 1-(19R)^{-1}\} \log^X 2M.$$

Ferner ist

$$\sum_{n\leqslant C} \mathrm{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{Y}{n^2}\right) = B \sum_{n\leqslant Y} \frac{1}{n} + BY \sum_{n>Y} \frac{1}{n^2} = B \log Y.$$

Nach (158) und (159) ist mithin

$$S_2 = B \exp(A_2 r^a \log^\beta r)\{M; 1-(19R)^{-1}\} \log^X 2M \log Y.$$

In S_3 benutze ich für die m-Summe die triviale Abschätzung BM und erhalte wegen (157)

$$S_3 = BMY \sum_{n>C} n^{-2} = BMYC^{-1} = B(M; 1-\tfrac{10}{11}r)Yx.$$

Wegen (158) und (159) bekommt man also

$$Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{\pm 1/Y} \psi(x/m - b/N + \theta)\,d\theta$$

$$= B\left\{\exp(A_2 r^a \log^\beta r)\{M; 1-(19R)^{-1}\} \log^X 2M + (M; 1-\tfrac{10}{11}r)Yx\right\} \log Y.$$

Da für jedes Zahlenpaar y_1 und $y_2 > y_1$ wegen (3) die Ungleichung

$$\psi(y_2) - \psi(y_1) \leqslant y_2 - y_1$$

besteht, ist

$$-\frac{M'-M+1}{2Y} + Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_0^{1/Y} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + \theta\right) d\theta \leqslant \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right)$$

$$\leqslant \frac{M'-M+1}{2Y} + Y \sum_{m=NM}^{NM'}{}' \int_{-1/Y}^{0} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N} + \theta\right) d\theta.$$

Wegen $0 < M' - M + 1 \leqslant 2M$ ist somit

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) = B\{\exp(A_2 r^a \log^\beta r)\{M; 1-(19R)^{-1}\} \log^X 2M +$$

$$+ (M; 1-\tfrac{10}{11}r)Yx + MY^{-1}\} \log Y,$$

also (partielle Summation)

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right)$$

$$= B\{\exp(A_2 r^a \log^\beta r)\{M; -(19R)^{-1}\} \log^X 2M + (M; -\tfrac{10}{11}r)Yx + Y^{-1}\} \log Y.$$

Wegen

$$\left(M; \frac{5r}{11}\right) x^{-1/2} \geqslant \left(x; \frac{5r}{11}\cdot\frac{3}{2r} - \frac{1}{2}\right) = x^{2/11} \geqslant 3 \qquad (156)$$

darf

$$Y \doteq M^{5r/11} x^{-1/2}$$

angenommen werden. Dann ist

$$\log Y = Bt, \quad \log M = Bt, \quad Y^{-1} = Bx^{-2/11},$$

$$(M: -(19R)^{-1}) = B(x; -(13rR)^{-1}),$$

$$(M; -10r/11)\, Yx = (M; -5r/11)x^{1/2} = Y^{-1} = Bx^{-2/11},$$

und es ergibt sich

$$\sum_{m=NM}^{NM'}{}' \frac{1}{m} \psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) \tag{162}$$

$$= B\{\exp(A_2 r^a \log^\beta r)\{x; -(13rR)^{-1}\} + x^{-2/11}\} t^{X+1}.$$

Da die Summe (151) in Bt Summen der Gestalt (162) zerfällt, so ist die Behauptung (152) des Hilfssatzes bewiesen.

Hilfssatz 6.3. *Für*

(163) $$S_4 = S_4(x; a, b, N) = \sum_{m\leqslant Nx}' \frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right)$$

ist

(164) $$S_4 = B\big(t; (a+\gamma)/(1+a+\gamma)\big)\big(u; (\beta+\delta)/(1+a+\gamma)\big).$$

Beweis. Statt durch (103), werde A_{11} so bestimmt, daß

$$y = A_2A_{11}^a - (13A_3A_{11}^{1+\gamma})^{-1} \leqslant -(X+3).$$

Die Bezeichnungen (104), (105) mögen nach wie vor gelten. Die Summe (163) werde jetzt wie folgt eingeteilt:

$$S_4 = \left\{ \sum_{m\leqslant N(x;3/2r_0)}' + \sum_{r=18a+1}^{r_0} \sum_{N(x;3/2r)<m\leqslant N(x;3/2(r-1))}' + \right.$$
$$\left. + \sum_{r=1}^{24a-4} \sum_{N(x;2/(r+4))<m\leqslant N(x;2/(r+3))}' + \sum_{Nx^{1/2}<m\leqslant Nx}' \right\} \frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right)$$
$$= S_5+S_6+S_7+S_8.$$

Für S_5 ergibt eine triviale Abschätzung

$$S_5 = B\frac{t}{r_0} = B\left(t; \frac{a+\gamma}{1+a+\gamma}\right)\left(u; \frac{\beta+\delta}{1+a+\gamma}\right) \qquad (\mathbf{104}, \mathbf{105}, 3).$$

Für S_6 benutze ich die Abschätzung (152) und erhalte wegen $r_0 \leqslant t$

$$S_6 = Br_0\exp\{A_2r_0^a\log^\beta r_0 - t/13r_0R_0 + (X+2)u\} + Br_0$$
$$= B\exp\{A_2A_{11}^a t^{a\lambda}u^{a\mu+\beta} - (13A_3A_{11}^{1+\gamma})^{-1}t^{1-(1+\gamma)\lambda}u^{-(1+\gamma)\mu-\delta} +$$
$$+ (X+3)u\} + Br_0$$
$$= B\exp\left\{y\left(t; \frac{a}{1+a+\gamma}\right)\left(u; \frac{\beta(1+\gamma)-a\delta}{1+a+\gamma}\right) + (X+3)u\right\} + Br_0$$
$$= B\exp(0) + Br_0 = B + Br_0$$
$$= B\left(t; \frac{a+\gamma}{1+a+\gamma}\right)\left(u; \frac{\beta+\delta}{1+a+\gamma}\right) \qquad (\mathbf{104}, \mathbf{105}, \mathbf{34}).$$

Auf S_7 wende ich den mit der Weylschen Methode bewiesenen Hilfssatz 7 von [16] an: *Für* $r \geqslant 1$ *ist*

$$\sum_{N(x;2/(r+4))<m\leqslant N(x;2/(r+3))}' \frac{1}{m}\psi\left(\frac{x}{m} - \frac{b}{N}\right) = B\exp\left(3u - \frac{t}{20r2^{r-1}}\right).$$

Dann folgt

$$S_7 = B\exp(3u - At) = B.$$

Endlich besagt Hilfssatz 4 von [16], daß

$$S_8 = B$$

ist. Damit ist die Abschätzung (164) bewiesen.

Bezeichnet $S(\ )$ die Teilerfunktion

$$S(x; a, b, N) = \sum_{mn\leqslant x}' n,$$

so ist nach den Formeln (9), (10), (14) und (33) von [16], mit gewissen reellen Konstanten $f(a, b)$ und einem gewissen $N = N(Q)$,

$$A_Q(x) = \sum_{a,b=1}^{N} f(a, b)S(Nx; a, b, N) + Bx,$$

$$S(Nx; a, b, N) = \tfrac{1}{2}Nx^2\sum_{m=1}^{\infty}' m^{-2} - NxS_4(x; a, b, N) + Bx,$$

also

(165) $$P_Q(x) = -Nx\sum_{a,b=1}^{N} f(a, b)S_4(x; a, b, N) + Bx.$$

Die zu beweisende Abschätzung (150) folgt aus (163)-(165).

Setzt man die Werte (35) (Satz 2) in (150) ein, so ergibt sich (46); setzt man (36) (Satz 5) oder (37) (Satz 6) ein, so ergibt sich (52).

§ 7. Behandlung des III Problems mit Hilfe der Sätze 1, 3, 4 und 7

Die Überlegungen verlaufen hier ähnlich, wie in § 5.

Anwendung von Satz 1. Es sei $0 < s \leqslant 1$, $r \geqslant 72$, M gehöre dem Intervall (60) an, S bedeute die Summe (138). Ich beginne wie beim Beweis von Hilfssatz 6.1 und gehe bis (149) einschließlich. Auf die m-Summe in (147) werde dann Satz 1 mit $M = M''$ angewandt. Für den Wert (148) von θ ist nach (141), (143) und (60)

$$|\theta| \leqslant \frac{x}{M^{r+2}} \leqslant M^{-r/11},$$

$$|\theta| \geqslant \frac{x}{(2M)^{r+2}} \geqslant \left(M; \frac{5r}{9} - r - 2\right)2^{-r-2} \geqslant M^{-r/2}2^{-2r},$$

d. h. (116) und (117) bleiben in Kraft. Damit ist Hilfssatz **6.1** im Spezialfall (35) und für $X = 2$ bewiesen. Aus (150) ergibt sich jetzt die Abschätzung (**46**).

Anwendung von Satz 4. Es sei $0 < s \leqslant 1$, $r \geqslant 72$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit werde

$$M \geqslant 4(r+2) \tag{166}$$

angenommen, da andernfalls die Abschätzung (139) wegen (34) klar ist. Die Bedingungen (118), (119) behalte ich bei und ersetze (120)-(123) durch

$$M < M' \leqslant \big(2;\, 1/2(r+2)\big)M, \tag{167}$$

$$f(y) = x(y+s)^{-1} \qquad (y \geqslant 1), \tag{168}$$

$$f^{(n+1)}(y) = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!\,x}{(y+s)^{n+2}}, \tag{169}$$

$$C = 2M^{n+2}x^{-1}. \tag{170}$$

Wegen

$$\left(2;\frac{1}{n+2}\right)M - \left(2;\frac{1}{2(n+2)}\right)M = \left\{\exp\left(\frac{\log 2}{n+2}\right) - \exp\left(\frac{\log 2}{2(n+2)}\right)\right\}M$$

$$\geqslant \frac{\log 2}{2(n+2)}M \geqslant \frac{M}{4(n+2)} \geqslant 1 \qquad (\mathbf{166},\ \mathbf{118})$$

ist dann nach (167)

$$M'+1 \leqslant \left(2;\frac{1}{2(n+2)}\right)M+1 \leqslant \left(2;\frac{1}{n+2}\right)M, \qquad (M'+1)^{n+2} \leqslant 2M^{n+2}.$$

Nach (169) und (170) ist daher die Ungleichung (22) mit $r = n$ im Intervall $M \leqslant y \leqslant M'$ erfüllt. Ferner ist $n \geqslant 7$, die Ungleichung (124) bleibt gültig und (125) ersetze man durch

$$C = 2M^{n-2}x^{-1}M^4 \leqslant 2\big(x;\, -(n-1)^{-1}\big)M^4 \leqslant M^4 \qquad (\mathbf{119}),$$

wenn $2^{n-1} \leqslant x$, also erst recht, wenn $e^r \leqslant x$,

$$r \leqslant t.$$

Diese Bedingung tritt an die Stelle von (126), und weiter geht es, wie in § 5, nur daß die Summe (61) durch die Summe (138) zu ersetzen ist. Es ergibt sich wiederum die Abschätzung (129), und man bekommt so den Spezialfall (36) von (150), d. h. die Abschätzung (52).

Anwendung von Satz 3. Es sei $0 < s \leqslant 1$, $r \geqslant 72$, n eine der Zahlen (118), M gehöre dem Intervall (119) an. Die Bedingung (166) lasse ich weg und ersetze (167) durch die Bedingung $M < M' \leqslant 2M$. Die Funktion (168) werde beibehalten, also auch (169), während (170) durch

$$C = (3M)^{n+2}x^{-1}, \qquad D = 3^{n+2}, \qquad H = M^2$$

ersetzt wird. Die Ungleichung (17) ist dann mit $r = n$ im Intervall $M \leqslant y \leqslant M'$ erfüllt. Ferner ist $n \geqslant 11$. Die Ungleichung (124) bleibt bestehen; (125) bis (126) ersetze man durch:

$$C = 3^{n+2}M^{n-2}x^{-1}M^4 \leqslant 3^{n+2}\big(x;\, -(n-1)^{-1}\big)M^4 \leqslant M^4,$$

wenn $3^{(n+2)(n-1)} \leqslant x$, also erst recht, wenn $3^{2r^2} \leqslant x$,

$$r \leqslant \tfrac{1}{2}t^{1/2}.$$

Diese Bedingung tritt an die Stelle von (132), und weiter geht es, wie in § 5. Es ergibt sich wiederum die Abschätzung (133) und man bekommt auch hier den Spezialfall (36) von (150), also die Abschätzung (52).

Anwendung von Satz 7. Die Überlegungen verlaufen hier ähnlich, wie in [8], S. 173-175. Es sei $0 < s \leqslant 1$,

$$1 < a \leqslant x^{1/10}, \tag{171}$$

$$a \leqslant b \leqslant 2a, \qquad a \leqslant a' \leqslant 2a, \tag{172}$$

$$r = [3t/2\log a], \tag{173}$$

$$M = [8(a^{r+2}/x)^{1/r}]. \tag{174}$$

$f(y)$ sei die Funktion (168). Wegen

$$r > 3t/2\log a - 1 \geqslant 3\cdot 10/2 - 1$$

ist die Bedingung $r \geqslant 11$ von Satz 7 erfüllt. Ferner ist

$$a^{r+1} > \exp\left(\log a\cdot\frac{3t}{2\log a}\right) = x^{3/2}, \tag{175}$$

$$\left|\frac{f^{(r+1)}(a')}{(r+1)!}\right| M^r = \frac{xM^r}{(a'+s)^{r+2}} \geqslant \frac{x4^r a^{r+2}}{(2a+1)^{r+2}x} \geqslant 1 \qquad (\mathbf{169},\ \mathbf{172},\ \mathbf{174}),$$

$$\left|\frac{f^{(r+1)}(a')}{(r+1)!}\right| 2M = \frac{2xM}{(a'+s)^{r+2}} \leqslant \frac{2xM}{a^{r+2}} \leqslant \frac{16xa}{a^{r+2}}\left(\frac{a^2}{x}\right)^{1/r}$$

$$\leqslant 16x^{-1/2} \leqslant 1 \qquad (\mathbf{171},\ \mathbf{175}).$$

Also ist die Bedingung (27) für $m = a'$ erfüllt. Ferner ist für $y \geqslant a$

$$(176)\qquad \left|\frac{f^{(r+2)}(y)}{(r+2)!}\right| (8r)^{-3r} M^{r+2,1} = \frac{xM^{r+2,1}}{(y+s)^{r+3}(8r)^{3r}} \qquad \mathbf{(168)}$$

$$\leqslant \frac{xM^{r+2,1}}{y^{r+3}(8r)^{3r}} \leqslant \frac{x}{a^{r+3}(8r)^{3r}} \left\{8\left(\frac{a^{r+2}}{x}\right)^{1/r}\right\}^{r+2,1} \qquad \mathbf{(174)}$$

$$\leqslant \frac{x}{a^{r+3}} \left(\frac{a^{r+2}}{x}\right)^{1+2,1/r} = a^{1,1}\left(\frac{a^2}{x}\right)^{2,1/r}.$$

Wird $a = x^z$ gesetzt, so ist nach (171) und (173)

$$0 < z \leqslant \tfrac{1}{10}, \qquad r = [\tfrac{3}{2}z^{-1}].$$

Die linke Seite von (176) ist also $\leqslant x^w$,

$$w = 1{,}1z - \frac{2{,}1}{r}(1-2z) \leqslant 1{,}1z - \frac{2{,}1\cdot 2z}{3}(1-2z)$$

$$= z\{1{,}1 - 1{,}4(1-2z)\} \leqslant z(1{,}1 - 1{,}4\cdot\tfrac{4}{5}) < 0.$$

Die linke Seite von (176) ist daher $\leqslant 1$, d. h. die Bedingung (28) ist für $y \geqslant a$ erfüllt. Satz 7 ist also mit $m = a'$ anwendbar und ergibt

$$(177)\qquad \sum_{a' \leqslant m < a'+M} e\big(x/(m+s)\big) = B\exp(3r\log^2 r)\{M; 1-(9{,}3r^2\log r)^{-1}\}.$$

Das Intervall $a \leqslant m < b$ kann in höchstens a/M Teilintervalle der Länge M und ein Intervall der Länge $\leqslant M$ so eingeteilt werden, daß die Intervalle der Länge M die Gestalt $a' \leqslant m < a'+M$ haben, wobei a' der Bedingung (172) genügt. Für die über ein solches Intervall erstreckte Summe gilt die Abschätzung (177). Die Restsumme über ein Intervall der Länge $\leqslant M$ ist, grob abgeschätzt, BM. Wird also zur Abkürzung

$$\varrho = (9{,}3r^2\log r)^{-1}, \qquad S_1 = \sum_{a \leqslant m \leqslant b} e\big(x/(m+s)\big)$$

gesetzt, so ist

$$S_1 = Ba\exp(3r\log^2 r)M^{-\varrho} + BM = B(a/M)^{\varrho}\exp(3r\log^2 r)\,a^{1-\varrho} + BM.$$

Wegen

$$M^3 \geqslant \left(\frac{a^{r+2}}{x}; \frac{3}{r}\right) \geqslant \left(\frac{a^{r+2/3}}{x}; \frac{3}{r}\right) = a\left(\frac{a^{2(r+1)/3}}{x}\right)^{3/2} \geqslant a \qquad \mathbf{(174,\ 175)}$$

ist

$$(a/M)^{\varrho} \leqslant a^{2\varrho/3}.$$

Ferner ist

$$M \leqslant 8a\left(\frac{a^2}{x}; \frac{1}{r}\right) \leqslant 8a\left(a^{2-10}; \frac{1}{r}\right) = 8\left(a; 1-\frac{8}{r}\right) \qquad \mathbf{(174,\ 171)}.$$

Alles in allem ist also

$$(178)\qquad S_1 = B\exp(3r\log^2 r)\,a^{1-2\varrho/3} = B\exp(3r\log^2 r)\{a; 1-(14r^2\log r)^{-1}\}.$$

Ich ändere jetzt in (178) die Bezeichnungsweise, nämlich setze $r = n$, $a = M$, $b = M'$, so daß $M \leqslant M' \leqslant 2M$ und S_1 die Summe (138) ist. M gehöre dem Intervall (60) an, wobei $r \geqslant 72$ sei. Es soll

$$(179)\qquad S = B\exp(5r\log^2 r)\{M; 1-(29r^2\log r)^{-1}\}$$

nachgewiesen werden. (178) lautet in den neuen Bezeichnungen

$$(180)\qquad S = B\exp(3n\log^2 n)\{M; 1-(14n^2\log n)^{-1}\},$$

wobei nach (171) und (173)

$$(181)\qquad 1 < M \leqslant x^{1/10}, \qquad n = [3t/2\log M].$$

Wegen $r \geqslant 72$ ist das Intervall (60) in dem Intervall (181) enthalten, sofern $(x; 11/10r) > 1$ ist. Dies kann aber ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, da sonst $(x; 11/10r) = 1$, $M = 1$ ist. Also gilt (180) für die M in (60), und es ist wegen (181) und (60)

$$n \leqslant \frac{3}{2}\cdot\frac{10r}{11} = \frac{15r}{11},$$

$$\log n \leqslant \log\frac{15r}{11} \leqslant \log r^{14/13} = \frac{14}{13}\log r,$$

$$3n\log^2 n \leqslant 3\cdot\frac{15}{11}\cdot\frac{196}{169}r\log^2 r < 5r\log^2 r,$$

$$14n^2\log n \leqslant 14\cdot\frac{225}{121}\cdot\frac{14}{13}r^2\log r < 29r^2\log r.$$

Damit ist (179), d. h. der Spezialfall (36) von Hilfssatz 6.1, bewiesen. Man bekommt also auch hier die Abschätzung (52).

§ 8. Behandlung des IV Problems mit Hilfe von Satz 2

In diesem Paragraphen soll, mit Hilfe von Satz 2, die Abschätzung (51) bewiesen werden; sein Inhalt fällt, von geringfügigen Einzelheiten abgesehen, mit der Arbeit [18] zusammen. Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, wie man durch geeignete Änderungen (51) mit Satz 1 und (53) mit einem der Sätze 3-7 beweisen kann. Da die quadratische Form Q von Problem III nicht mehr auftreten wird, ist der Buchstabe Q frei und soll von jetzt ab positive ganze Zahlen bezeichnen.

Neben den weiter unten ausdrücklich genannten Hilfsmitteln benutze ich zum Beweise von Hilfssatz 8.13 die bekannte Winogradoffsche Methode zur Abschätzung von trigonometrischen Summen mit Primzahlen ([20], S. 180-188; einfacher und wirkungsvoller in [21], S. 81-84). Die Herleitung von Hilfssatz 8.16 aus Hilfssatz 8.13 wird mittels der Methode von Davenport [2] durchgeführt.

Hilfssatz 8.1.

$$\Phi(x) = -x\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\psi\left(\frac{x}{n}\right)+Bx. \tag{182}$$

Beweis.

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]^2 = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\sum_{m,r\leqslant x/n}1 = \sum_{h,k\leqslant x}\sum_{n|(h,k)}\mu(n)$$

$$= \sum_{\substack{h,k\leqslant x\\(h,k)=1}}1 = 2\sum_{\substack{h\leqslant k\leqslant x\\(h,k)=1}}1-1 = 2\sum_{n\leqslant x}\varphi(n)-1,$$

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n) = \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]^2+\frac{1}{2} \tag{183}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left(\frac{x}{n}-\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \qquad (3)$$

$$= \frac{x^2}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^2}-x\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{2}\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}+Bx, \tag{184}$$

$$x^2\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n^2} = x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^2}+Bx^2\sum_{n>x}\frac{1}{n^2}$$

$$= \frac{x^2}{\zeta(2)}+Bx = \frac{6}{\pi^2}x^2+Bx, \tag{185}$$

$$x\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n} = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right]+Bx = \sum_{n\leqslant x}\mu(n)\sum_{m\leqslant x/n}1+Bx$$

$$= \sum_{r\leqslant x}\sum_{n|r}\mu(n)+Bx = 1+Bx = Bx. \tag{186}$$

Die Behauptung (182) folgt aus (1) und (184)-(186).

Bemerkung. Gleichung (183), wie auch die zwischen den Zeilen des Beweises stehenden Formeln

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n)\left[\frac{x}{n}\right] = 1, \qquad \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n} = B$$

sind wohlbekannt; vgl. z. B. [9], S. 578, 576, 582.

Hilfssatz 8.2 ([1], Satz 2). *Es seein $\alpha-\frac{1}{2}$ und $\beta-\frac{1}{2}$ ganz, $\alpha<\beta$, $f(y)$ eine im Intervall $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ reelle, zweimal differenzierbare Funktion. Weiter sei in diesem Intervall beständig $f''(y)\geqslant\varrho$ oder beständig $f''(y)\leqslant-\varrho$, wobei $0<\varrho\leqslant 1$ und ϱ nicht von y abhängt. Dann ist*

$$\Big|\sum_{\alpha<l<\beta}e\{f(l)\}\Big| < 4\big(|f'(\beta)-f'(\alpha)|+1\big)\varrho^{-1/2}. \tag{187}$$

Hilfssatz 8.3. *Für $Q\leqslant Q'\leqslant 2Q$, $z>0$ ist*

$$\sum_{q=Q}^{Q'}e(z/q) = B(z^{1/2}Q^{-1/2}+z^{-1/2}Q^{3/2}). \tag{188}$$

Beweis. Für $Q\leqslant z^{1/3}$ ist (188) klar, da dann $Q\leqslant z^{1/2}Q^{-1/2}$. Für $Q>z^{1/3}$ ist nach Hilfssatz 8.2

$$\sum_{q=Q}^{Q'}e(z/q) = B(zQ^{-2}+1)(zQ^{-3})^{-1/2},$$

also (188) ebenfalls erfüllt.

Hilfssatz 8.4 ([15], Hilfssatz 3; der Beweis wird mittels der Weylschen Methode erbracht). *Für $R=2^{r-1}$, $R_1=R(r+1)$,*

$$z\geqslant 2^{r+3}, \qquad (z;1/(r+2))\leqslant Q\leqslant Q'\leqslant 2Q\leqslant 2(z;2/(r+3)) \tag{189}$$

ist

$$\sum_{q=Q}^{Q'}e\left(\frac{z}{q}\right) = B\left(Q;1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)\left(z;\frac{1}{R_1}\right)\log z. \tag{190}$$

Hilfssatz 8.5. *Es sei $r\geqslant 72$, M dem Intervall (60) angehörig, $M\leqslant M'\leqslant 2M$. Dann ist*

$$\sum_{m=M}^{M'}e(x/m) = Br^3\{M;1-(114r^3\log r)^{-1}\}. \tag{191}$$

Beweis. Nach Satz 2 gilt Satz 8 für die Werte (35) von $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ und für $A_1=4$, $A_2=3$, $A_3=6$, $X=0$. Hilfssatz 8.5 folgt daher aus Hilfssatz 6.1, wenn man noch $s=1$ setzt.

Bemerkungen. 1. Die Abschätzung (191) gilt für beliebige $x>0$ und nicht erst für $x>A$. Für $x\leqslant A$ ist nämlich nach (60) auch $M\leqslant A$, also (191) klar. Dies wird bei den Anwendungen von Hilfssatz 8.5. weiter unten stillschweigend benutzt.

2. Es würde nichts ausmachen, stünde hier eine A-Konstante statt 114, wie in [18], Hilfssatz 2.2. Ich möchte jedoch die Anzahl der zum Beweise von (51) benötigten Parameter auf ein Mindestmaß zurückführen.

Es sei von jetzt ab

$$X=\left[\tfrac{1}{3400}t^{1/4}u^{-3/2}\right], \tag{192}$$

$$(x;\,X^{-1})<N\leqslant x\exp(-t^{1/2}). \tag{193}$$

Zu den Bezeichnungen $\log x=t$, $\log\log x=u$ tritt noch $\log N=s$ hinzu. Wegen $x>A$ ist auch $N>A$, $s>A$. Ferner sei

$$H=s^{33}. \tag{194}$$

Das Intervall (193) werde wie folgt in Teilintervalle gespalten:

$$x^{1/2}<N\leqslant x\exp(-t^{1/2}), \tag{195}$$

$$\left(x;\,\frac{1}{\nu+1}\right)<N\leqslant\left(x;\,\frac{1}{\nu}\right)\qquad(1<\nu\leqslant 98), \tag{196}$$

$$\left(x;\,\frac{1}{\nu+1}\right)<N\leqslant\left(x;\,\frac{1}{\nu}\right)\qquad(99\leqslant\nu<X). \tag{197}$$

Weiter sei

$$P=\prod_{p\leqslant N^{1/2}}p, \tag{198}$$

$$N_0=\exp(s/100\log s). \tag{199}$$

Es wird sich zunächst darum handeln, die Summe

$$S=\sum_{p\leqslant N}e\left(\frac{x}{p}\right) \tag{200}$$

abzuschätzen.

Es ist

$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\(n,P)=1}}e\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{n\leqslant N}e\left(\frac{x}{n}\right)\sum_{d|(n,P)}\mu(d)=\sum_{d|P}\mu(d)\sum_{\substack{n\leqslant N\\d|n}}e\left(\frac{x}{n}\right), \tag{201}$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\(n,P)=1}}e\left(\frac{x}{n}\right)=e(x)+\sum_{N^{1/2}<p\leqslant N}e\left(\frac{x}{p}\right)=S+BN^{1/2}\qquad(\mathbf{198},\mathbf{200}), \tag{202}$$

$$\sum_{\substack{n\leqslant N\\d|n}}e\left(\frac{x}{n}\right)=\sum_{m\leqslant Nd^{-1}}e\left(\frac{x}{dm}\right), \tag{203}$$

$$S=\sum_{d|P}\mu(d)\sum_{m\leqslant Nd^{-1}}e\left(\frac{x}{dm}\right)+BN^{1/2}\qquad(\mathbf{201}\text{-}\mathbf{203}). \tag{204}$$

Sei

$$S_0=\sum_{\substack{dm\leqslant N\\d|P,\,\mu(d)=1}}e\left(\frac{x}{dm}\right),\qquad S_1=\sum_{\substack{dm\leqslant N\\d|P,\,\mu(d)=-1}}e\left(\frac{x}{dm}\right). \tag{205}$$

Dann ist

$$S=S_0-S_1+BN^{1/2}\qquad(\mathbf{204},\mathbf{205}). \tag{206}$$

Im folgenden bezeichne j eine der Zahlen 0, 1, d. h. S_j eine der Summen (205). Das Summationsintervall für m in (205), nämlich $0<m\leqslant N$, werde in Bs Teilintervalle der Gestalt

$$M\leqslant m\leqslant M',\quad\text{wobei}\quad M\leqslant M'\leqslant 1{,}4M\leqslant 1{,}4N \tag{207}$$

gespalten. Die einem Intervall (207) entsprechende Teilsumme von S_j werde mit $S_j(M)$ bezeichnet, d. h. es sei

$$S_j=\sum_M S_j(M);\qquad S_j(M)=\sum_{\substack{d\leqslant NM^{-1}\\d|P,\,\mu(d)=(-1)^j}}\;\sum_{M\leqslant m\leqslant\mathrm{Min}(M',Nd^{-1})}e(x/dm). \tag{208}$$

Hilfssatz 8.6. *Für*

$$M\geqslant N^{200/401} \tag{209}$$

ist

$$S_j(M)=BNH^{-1}. \tag{210}$$

Beweis. 1) Es gehöre N dem Intervall (195) an. Auf die m-Summe in (208) wende ich Hilfssatz 8.4 mit

$$r = 2, \quad Q = M, \quad Q' = \mathrm{Min}(M', [Nd^{-1}]), \quad z = xd^{-1}$$

an. Wegen (207) folgt dann: Für

$$xd^{-1} \geqslant 32, \quad (xd^{-1})^{1/4} \leqslant M \leqslant (xd^{-1})^{2/5} \tag{211}$$

ist

$$\sum_m = Bx^{1/6}d^{-1/6}M^{1/3}s. \tag{212}$$

Wegen

$$xd^{-1} \geqslant x(NM^{-1})^{-1} \geqslant xN^{-1} \geqslant \exp(t^{1/2}) \geqslant 32 \qquad (\mathbf{208, 195})$$

ist die erste Ungleichung (211) erfüllt. Falls die linke Hälfte der zweiten Ungleichung (211) nicht erfüllt ist, so ist $xd^{-1} > M^4$, folglich

$$d < xM^{-4}. \tag{213}$$

Für diese d benutze ich die triviale Abschätzung

$$\sum_m = BM. \tag{214}$$

Ist weiter die rechte Hälfte der zweiten Ungleichung (211) nicht erfüllt, so hat man

$$M > x^{2/5}d^{-2/5}.$$

In diesem Fall wende ich auf die m-Summe in (208) Hilfssatz 8.3 an und erhalte

$$\sum_m = Bx^{1/2}d^{-1/2}M^{-1/2} + Bx^{-1/2}d^{1/2}M^{3/2} = Bx^{1/2}d^{-1/2}x^{-1/5}d^{1/5} + Bx^{-1/2}M^{3/2}d^{1/2}$$

$$= Bx^{3/10}d^{-3/10} + Bx^{-1/2}M^{3/2}d^{1/2}. \tag{215}$$

Aus (208), (212)-(215), (209), (195) und (194) folgt

$$\begin{aligned} S_j(M) &= Bx^{1/6}M^{1/3}s \sum_{d \leqslant NM^{-1}} d^{-1/6} + B \sum_{d < xM^{-4}} M + \\ &\quad + Bx^{3/10} \sum_{d \leqslant NM^{-1}} d^{-3/10} + Bx^{-1/2}M^{3/2} \sum_{d \leqslant NM^{-1}} d^{1/2} \\ &= Bx^{1/6}M^{1/3}N^{5/6}M^{-5/6}s + BxM^{-3} + Bx^{3/10}N^{7/10}M^{-7/10} + \\ &\quad + Bx^{-1/2}M^{3/2}N^{3/2}M^{-3/2} \\ &= Bx^{1/6}N^{5/6}M^{-1/2}s + BxM^{-3} + Bx^{3/10}N^{7/10}M^{-7/10} + Bx^{-1/2}N^{3/2} \\ &= B\left(N; \tfrac{1}{3} + \tfrac{5}{6} - \tfrac{100}{401}\right)s + B\left(N; 2 - \tfrac{600}{401}\right) + B\left(N; \tfrac{6}{10} + \tfrac{7}{10} - \tfrac{140}{401}\right) + \\ &\quad + B\left(N; -\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right)\exp\left(-\tfrac{1}{2}t^{1/2}\right) \\ &= BN\exp\left(-\tfrac{1}{2}t^{1/2}\right) = BNH^{-1}. \end{aligned}$$

2) Es gehöre N einem der Intervalle (196) an. Dann wird die m-Summe in (208) wie folgt abgeschätzt.

2.1) Für

$$d \leqslant xM^{-2\nu-2} \tag{216}$$

wende ich die triviale Abschätzung (214) an.

2.2) Für

$$xM^{-2\nu-2} < d \leqslant xM^{-2\nu-1/2} \tag{217}$$

wende ich Hilfssatz 8.4 mit

$$r = 2\nu, \quad Q = M, \quad Q' = \mathrm{Min}(M', [Nd^{-1}]), \quad z = xd^{-1}$$

an und erhalte: Für

$$xd^{-1} \geqslant 2^{2\nu+3}, \quad \left(xd^{-1}; \frac{1}{2\nu+2}\right) \leqslant M \leqslant \left(xd^{-1}; \frac{2}{2\nu+3}\right), \tag{218}$$

ist

$$\sum_m = B\left(x; \frac{1}{R_1}\right)\left(d; -\frac{1}{R_1}\right)\left(M; 1 - \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)s, \tag{219}$$

wobei

$$R = 2^{2\nu-1}, \quad R_1 = 2^{2\nu-1}(2\nu+1). \tag{220}$$

Wegen

$$xd^{-1} \geqslant x(NM^{-1})^{-1} \geqslant xN^{-1} \geqslant x^{1/2} \geqslant 2^{200} \geqslant 2^{2\nu+3} \qquad (\mathbf{208, 196}) \tag{221}$$

ist die erste Ungleichung (218) erfüllt. Die zweite Bedingung (218) läßt sich so ausdrücken:

$$xM^{-2\nu-2} \leqslant d \leqslant xM^{-\nu-3/2}.$$

Sie ist wegen (217) auch erfüllt. Daher kann im Falle (217) die Abschätzung (219) mit (220) benutzt werden.

2.3) Es sei

$$xM^{-2\nu-1/2} < d \leqslant xM^{-2}. \tag{222}$$

Für ein geeignetes k im Intervall $0 < k \leqslant 2\nu - 1$ ist dann

$$xM^{-k-3/2} < d \leqslant x\mathrm{Min}(M^{-k-1/2}, M^{-2}). \tag{223}$$

Dann werde auf die m-Summe Hilfssatz 8.4 mit $r = k$ und denselben Werten für Q, Q', z wie oben angewandt. Setzt man $K = 2^{k-1}$, $K_1 = K(k+1)$, so folgt: Für

$$xd^{-1} \geqslant 2^{k+3}, \quad xM^{-k-2} \leqslant d \leqslant xM^{-(k+3)/2} \tag{224}$$

ist

$$\sum_m = B\left(x; \frac{1}{K_1}\right)\left(d; -\frac{1}{K_1}\right)\left(M; 1 - \frac{1}{K} - \frac{1}{K_1}\right)s. \tag{225}$$

Auf Grund von (221) und (223) sind beide Bedingungen (224) erfüllt. Man kann daher (225) anwenden und bekommt wegen (223)

$$\sum_m = B\left(x;\frac{1}{K_1}\right)\left(xM^{-k-3/2};\,-\frac{1}{K_1}\right)\left(M;\,1-\frac{1}{K}-\frac{1}{K_1}\right)s$$

$$= B\left(M;\frac{1}{K}+\frac{1}{2K_1}+1-\frac{1}{K}-\frac{1}{K_1}\right)s = B\left(M;\,1-\frac{1}{2K_1}\right)s\,.$$

Hier ist

$$2K_1 = 2^k(k+1) \leqslant 2^{2\nu}\nu \leqslant A\,.$$

Für die d mit (222) ist daher

$$\sum_m = BM^{1-A}s\,. \tag{226}$$

Mit 2.1)-2.3) ist der Fall 2) erschöpft, da

$$NM \leqslant N^2 \leqslant x, \quad \text{also} \quad d \leqslant NM^{-1} \leqslant xM^{-2} \quad (\mathbf{207},\,\mathbf{196},\,\mathbf{208}).$$

Aus (208), (216), (214), (217), (219), (222), (226), (196), (209), (220) und (194) folgt

$$S_j(M) = B\sum_{d\leqslant xM^{-2\nu-2}} M + B\left(x;\frac{1}{R_1}\right)\left(M;\,1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)s\sum_{d\leqslant NM^{-1}}\left(d;\,-\frac{1}{R_1}\right)+$$

$$+BM^{1-A}s\sum_{d\leqslant NM^{-1}} 1$$

$$= BxM^{-2\nu-1}+B\left(x;\frac{1}{R_1}\right)\left(M;\,1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right)s\left(N;\,1-\frac{1}{R_1}\right)\times$$

$$\times\left(M;\,-1+\frac{1}{R_1}\right)+BNM^{-A}s$$

$$= B\left\{N;\,\nu+1-\frac{200}{401}(2\nu+1)\right\}+B\left\{N;\,1+\frac{\nu}{R_1}-\frac{200}{401}\cdot\frac{1}{R}\right\}s+BN^{1-A}s,$$

$$\nu+1-\frac{200}{401}(2\nu+1) = \frac{\nu+201}{401} \leqslant \frac{300}{400} = 1-A,$$

$$1+\frac{\nu}{R_1}-\frac{200}{401}\cdot\frac{1}{R} = 1+2^{1-2\nu}\left(\frac{\nu}{2\nu+1}-\frac{200}{401}\right) = 1-2^{1-2\nu}\frac{200-\nu}{401(2\nu+1)}$$

$$\leqslant 1-2^{1-200}\frac{100}{401\cdot 200} = 1-A,$$

$$S_j(M) = BN^{1-A}s = BNH^{-1}.$$

3) Es gehöre N einem der Intervalle (197) an. Dann wende ich auf die m-Summe in (208) zweimal Hilfssatz 8.5. an, und zwar mit $r = [9\nu/5]$ und $r = [27\nu/10]$, wobei beidemal $\mathrm{Min}(M', [Nd^{-1}])$ statt M' genommen wird. Wegen (197) und (207) folgt dann: Für

$$\left(xd^{-1};\,\frac{11}{10r}\right) \leqslant M \leqslant \left(xd^{-1};\,\frac{9}{5r}\right) \qquad \left(r = \left[\frac{9\nu}{5}\right],\left[\frac{27\nu}{10}\right]\right) \tag{227}$$

ist

$$\sum_m = B\nu^3(M;\,1-A/\nu^3\log\nu). \tag{228}$$

Die Bedingung (227) kann man so ausdrücken:

$$x\left(M;\,-\frac{10r}{11}\right) \leqslant d \leqslant x\left(M;\,-\frac{5r}{9}\right) \qquad \left(r = \left[\frac{9\nu}{5}\right],\left[\frac{27\nu}{10}\right]\right). \tag{229}$$

Für $r = [9\nu/5]$ ist

$$-\frac{5r}{9} \geqslant -\nu, \quad -\frac{10r}{11} \leqslant -\frac{10}{11}\left(\frac{9\nu}{5}-1\right) \leqslant -\frac{18\nu}{11}+1 \leqslant -\frac{18\nu}{12} = -\frac{3\nu}{2}.$$

Für $r = [27\nu/10]$ ist aber

$$-\frac{5r}{9} \geqslant -\frac{5}{9}\cdot\frac{27\nu}{10} = -\frac{3\nu}{2},$$

$$-\frac{10r}{11} \leqslant -\frac{10}{11}\left(\frac{27\nu}{10}-1\right) \leqslant -\frac{27\nu}{11}+1 \leqslant -\frac{27\nu}{12} = -\frac{9\nu}{4}.$$

Daher wird das Intervall

$$x(M;\,-9\nu/4) \leqslant d \leqslant xM^{-\nu} \tag{230}$$

von den Intervallen (229) bedeckt. Für die d mit (230) ist also die Abschätzung (228) erfüllt.

Die rechte Hälfte von (230) ist wegen

$$NM^{\nu-1} \leqslant N^{\nu} \leqslant x, \quad \text{d.h.} \quad d \leqslant NM^{-1} \leqslant xM^{-\nu} \quad (\mathbf{207},\,\mathbf{197},\,\mathbf{208})$$

erfüllt. Ist daher

$$d \geqslant x(M;\,-9\nu/4),$$

so kann (228) benutzt werden. Ist aber

$$d < x(M;\,-9\nu/4),$$

so werde die triviale Abschätzung (214) benutzt. Das gibt

$$S_j(M) = B\sum_{d<x(M;\,-9\nu/4)} M + B\nu^3\left(M; 1-\frac{A}{\nu^3\log\nu}\right)\sum_{d\leqslant NM^{-1}} 1$$

$$= Bx\left(M; 1-\frac{9\nu}{4}\right) + B\nu^3 N\left(M; -\frac{A}{\nu^3\log\nu}\right)$$

$$(231)\qquad = B\left\{N; \nu+1+\frac{200}{401}\left(1-\frac{9\nu}{4}\right)\right\} + BN\nu^3\left(N; -\frac{A}{\nu^3\log\nu}\right) \qquad (\mathbf{197}, \mathbf{209}).$$

In (231) ist

$$\nu+1+\frac{200}{401}\left(1-\frac{9\nu}{4}\right) = \frac{601-49\nu}{401} < 0 \qquad (\mathbf{197}),$$

$$\nu^3\left(N; -\frac{A}{\nu^3\log\nu}\right) = B\nu^3\left\{\left(x; \frac{1}{\nu+1}\right); -\frac{A}{\nu^3\log\nu}\right\} \qquad (\mathbf{197})$$

$$= B\nu^3\exp\left(-\frac{At}{\nu^4\log\nu}\right) = BX^3\exp\left(-\frac{At}{X^4\log X}\right) \qquad (\mathbf{197})$$

$$= Bt\exp\left(-\frac{Atu^6}{tu}\right) = B\exp(-u^2)$$

$$(232)\qquad = B\exp(-\log^2 s) = BH^{-1}. \qquad (\mathbf{192}, \mathbf{197}, \mathbf{193}, \mathbf{194}).$$

Von jetzt ab bis zum Schluß des Beweises von Hilfssatz 8.12 soll

$$(233)\qquad M \leqslant N^{200/401}$$

vorausgesetzt werden. Aus (208) ergibt sich

$$(234)\qquad S_j(M) = \sum_{M\leqslant m\leqslant M'}\ \sum_{\substack{d\leqslant Nm^{-1}\\ d|P,\ \mu(d)=(-1)^j}} e(x/dm).$$

Eine Zahl d in (234) heiße δ_h, wenn sie genau h Primteiler $p > N_0$ besitzt; ferner sei h_0 das größte h für $d \leqslant N$. Wegen $2^{h_0} \leqslant N$ ist dann

$$(235)\qquad h_0 = Bs.$$

Aus (234) folgt jetzt

$$(236)\qquad S_j(M) = \sum_{h=0}^{h_0} S_{hj}(M); \qquad S_{hj}(M) = \sum_{M\leqslant m\leqslant M'}\ \sum_{\delta_h\leqslant Nm^{-1}} e(x/\delta_h m).$$

Hilfssatz 8.7.

$$(237)\qquad S_{0j}(M) = BNH^{-1}s.$$

Beweis. Es sei $\delta_0 > NM^{-1}H^{-1}$. Die Anzahl der Primteiler von δ_0 heiße l. Da δ_0 keinen Primteiler $> N_0$ besitzt, so ist

$$N_0^l \geqslant \delta_0 > NM^{-1}H^{-1} \geqslant \left(N; 1-\tfrac{200}{401}\right)H^{-1} \geqslant N^{1/2} \qquad (\mathbf{233}, \mathbf{194}),$$

$$ls/100\log s \geqslant \tfrac{1}{2}s, \qquad l \geqslant 50\log s \qquad (\mathbf{199}).$$

Bezeichnet daher $d(n)$, wie üblich, die Teilerzahl von n, so ist

$$d(\delta_0) \geqslant 2^l \geqslant \exp(50\log 2\log s) \geqslant H \qquad (\mathbf{194}).$$

Daher ist

$$S_{0j}(M) = \sum_{M\leqslant m\leqslant M'}\ \sum_{\delta_0\leqslant Nm^{-1}} e(x/\delta_0 m) \qquad (\mathbf{236})$$

$$= B\sum_{M\leqslant m\leqslant M'} 1\left(\sum_{n\leqslant NM^{-1}H^{-1}} 1 + H^{-1}\sum_{n\leqslant NM^{-1}} d(n)\right)$$

$$= BM(NM^{-1}H^{-1} + NM^{-1}H^{-1}s) = BNH^{-1}s \qquad (\mathbf{207}).$$

Es sei jetzt $0 < h \leqslant h_0$. Ich setze

$$(238)\qquad T_{hj}(M) = \sum_{M\leqslant m\leqslant M'}\ \sum_{\substack{pq\leqslant Nm^{-1}\\ N_0<p\leqslant N^{1/2},\ q=\delta_{h-1},\ \mu(q)=(-1)^{j+1}}} e(x/pqm)$$

$$= T_{h1j}(M) + T_{h2j}(M);$$

hierbei enthalte $T_{h2j}(M)$ diejenigen Glieder von $T_{hj}(M)$, in denen $p|q$, und $T_{h1j}(M)$ enthalte alle anderen Glieder. Für $h=1$ ist dann die Summe T_{h2j} leer, was aber nicht stört. Jedenfalls ist

$$T_{h2j}(M) = B\sum_{M\leqslant m\leqslant M'}\ \sum_{N_0<p\leqslant N^{1/2}}\ \sum_{q\leqslant Nm^{-1}p^{-2}} 1$$

$$= BN\sum_{M\leqslant m<2M} m^{-1}\sum_{n>N_0} n^{-2} = BNMM^{-1}N_0^{-1} = BNH^{-1}$$

$$(\mathbf{207}, \mathbf{199}, \mathbf{194}).$$

Ferner ist

$$T_{h1j}(M) = hS_{hj}(M),$$

da die Summe $T_{h1j}(M)$ dieselben Glieder wie $S_{hj}(M)$ hat, wobei jedes Glied von $S_{hj}(M)$ genau h-mal auftritt. Es folgt also

$$S_{hj}(M) = h^{-1}T_{h1j}(M) = h^{-1}T_{hj}(M) - h^{-1}T_{h2j}(M)$$

$$(239)\qquad = h^{-1}T_{hj}(M) + Bh^{-1}NH^{-1}.$$

Zur Abschätzung von $T_{hj}(M)$ zerlege man das Summationsintervall nach p in (238), nämlich das Intervall $N_0 < p \leqslant N^{1/2}$, in Bs Teilintervalle der Gestalt

$$(240)\qquad U \leqslant p \leqslant U', \quad \text{wobei} \quad N_0 < U \leqslant U' \leqslant 1{,}4U \leqslant 1{,}4N^{1/2}.$$

Dann ist

$$(241)\qquad T_{hj}(M) = \sum_U T_{hj}(M, U),$$

wo $T_{hj}(M, U)$ diejenige Teilsumme von (238) bedeutet, in der p das Intervall (240) durchläuft, d. h.

$$(242)\qquad T_{hj}(M, U) = \sum_{\substack{M \leqslant m \leqslant M' \\ U \leqslant p \leqslant U'}} \sum_{\substack{q \leqslant Nm^{-1}p^{-1} \\ q = \delta_{h-1},\, \mu(q) = (-1)^{j+1}}} e(x/mpq).$$

Definition 8.1. *Es sei* $w = q_1^{-1} - q^{-1}$,

$$(243)\qquad T(M, U) = T(M, U, V) = MUs^3 \sum_{\substack{q_1 < q \leqslant NM^{-1}U^{-1} \\ N^{-1}MUH^{-1} \leqslant w \leqslant N^{-1}MUH}} \left| \sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) \right|.$$

Dabei sollen M, U *entweder den Bedingungen*

$$(244)\qquad M \leqslant N^{200/401}, \quad N_0 < U \leqslant N^{1/2},$$

oder den Bedingungen

$$(245)\qquad M = 1, \quad N_0 < U \leqslant NN_0^{-1}$$

genügen. Ferner sei

$$(246)\qquad MU \leqslant V = V(q, q_1) \leqslant V' = V'(q, q_1) \leqslant 2MU.$$

Hilfssatz 8.8.

$$(247)\qquad T_{hj}^2(M, U) = BT(M, U) + BN^2H^{-1}s^3.$$

Beweis. Es sei

$$d'(n) = \sum_{\substack{mp = n \\ M \leqslant m \leqslant M' \\ U \leqslant p \leqslant U'}} 1, \quad \text{d. h.} \quad 0 \leqslant d'(n) \leqslant d(n).$$

Dann ist nach (242)

$$T_{hj}(M, U) = \sum_{MU \leqslant n \leqslant M'U'} d'(n) \sum_{q \leqslant Nn^{-1}}' e(x/nq),$$

wobei in $\sum'$ (hier und später) q die zusätzlichen Bedingungen

$$q = \delta_{h-1}, \quad \mu(q) = (-1)^{j+1}$$

zu erfüllen hat. Daher ist

$$|T_{hj}(M, U)| \leqslant \sum_{MU \leqslant n \leqslant M'U'} d(n) \left| \sum_{q \leqslant Nn^{-1}}' e(x/nq) \right|,$$

$$|T_{hj}(M, U)|^2 \leqslant \sum_{MU \leqslant n \leqslant M'U'} d^2(n) \sum_{MU \leqslant n \leqslant M'U'} \left| \sum_{q \leqslant Nn^{-1}}' e(x/nq) \right|^2,$$

$$\sum_{MU \leqslant n \leqslant M'U'} d^2(n) \leqslant \sum_{n \leqslant 2MU} d^2(n) = BMUs^3 \qquad (\mathbf{207}, \mathbf{240}),$$

$$T_{hj}^2(M, U) = BMUs^3 \sum_{MU \leqslant n \leqslant M'U'} \left| \sum_{q \leqslant Nn^{-1}}' e(x/nq) \right|^2.$$

Durchläuft q_1 dieselben Zahlen wie q und wird zur Abkürzung $q_1^{-1} - q^{-1} = w$ gesetzt, so ist ferner

$$T_{hj}^2(M, U) = BMUs^3 \sum_{MU \leqslant n \leqslant M'U'} \sum_{q, q_1 \leqslant Nn^{-1}}' e(xw/n)$$

$$= BMUs^3 \sum_{q, q_1 \leqslant NM^{-1}U^{-1}}' \sum_{MU \leqslant n \leqslant \operatorname{Min}(M'U', Nq^{-1}, Nq_1^{-1})} e(xw/n)$$

$$(248)\qquad = BMUs^3 \sum_{q, q_1 \leqslant NM^{-1}U^{-1}} \left| \sum_{MU \leqslant n \leqslant \operatorname{Min}(M'U', Nq^{-1}, Nq_1^{-1})} e(xw/n) \right|,$$

wobei diesmal q, q_1 *alle* natürlichen Zahlen $\leqslant NM^{-1}U^{-1}$ durchlaufen. Hier ist die Summe aller Glieder mit $q = q_1$ gleich

$$BMUs^3 \sum_{q \leqslant NM^{-1}U^{-1}} \sum_{MU \leqslant n \leqslant 2MU} 1 = BMUs^3NM^{-1}U^{-1}MU \qquad (\mathbf{207}, \mathbf{240})$$

$$= BNMUs^3 = B(N; 1 + \tfrac{200}{401} + \tfrac{1}{2})s^3 = BN^{2-\Delta}s^3 = BN^2H^{-1}s^3 \qquad (\mathbf{233}, \mathbf{240}, \mathbf{194}).$$

Außerdem ist (248) symmetrisch in q, q_1. Daher ist die Summe der Glieder mit $q \neq q_1$ das Doppelte der Summe mit $q_1 < q$. Somit ist

$$(249)\qquad T_{hj}^2(M, U) = BMUs^3 \sum_{q_1 < q \leqslant NM^{-1}U^{-1}} \left| \sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) \right| + BN^2H^{-1}s^3,$$

wobei V, V' den Bedingungen (246) genügen. Fügt man noch die Bedingung $NM^{-1}U^{-1}H^{-1} \leqslant q_1$ hinzu, so ist der dabei entstehende Fehler

$$BMUs^3 \sum_{\substack{q \leqslant NM^{-1}U^{-1} \\ q_1 \leqslant NM^{-1}U^{-1}H^{-1}}} MU = BMUs^3(NM^{-1}U^{-1})^2H^{-1}MU = BN^2H^{-1}s^3.$$

Daher ist

$$T_{hj}^2(M, U) = BMUs^3 \sum_{NM^{-1}U^{-1}H^{-1} \leqslant q_1 < q \leqslant NM^{-1}U^{-1}} \left| \sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) \right| + BN^2H^{-1}s^3.$$

Endlich kann man noch $q - q_1 > NM^{-1}U^{-1}H^{-1}$ verlangen, da der dabei entstehende Fehler gleich

$$BMUs^3 \sum_{\substack{q \leqslant NM^{-1}U^{-1} \\ 0 < q - q_1 \leqslant NM^{-1}U^{-1}H^{-1}}} MU = BMUs^3(NM^{-1}U^{-1})^2H^{-1}MU = BN^2H^{-1}s^3$$

ist. Man hat demnach

$$T_{hj}^2(M, U) = BMUs^3 \sum_{\substack{NM^{-1}U^{-1}H^{-1} \leqslant q_1 < q \leqslant NM^{-1}U^{-1} \\ q - q_1 > NM^{-1}U^{-1}H^{-1}}} \left| \sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) \right| + BN^2H^{-1}s^3,$$

wobei hier

$$w = q_1^{-1} - q^{-1} \leqslant q_1^{-1} \leqslant N^{-1}MUH,$$

$$w = \frac{q - q_1}{qq_1} \geqslant \frac{q - q_1}{q^2} \geqslant NM^{-1}U^{-1}H^{-1}N^{-2}M^2U^2 = N^{-1}MUH^{-1}.$$

Daher gilt (247), wobei $T(M, U)$ durch (243) definiert ist. Die Bedingungen (244) sind wegen (233) und (240) erfüllt.

HILFSSATZ 8.9. *Es gehöre N einem der Intervalle* (195) *oder* (196) *an. Ferner sei $R = 2^{r-1}$,*

$$\text{(250)} \quad \operatorname{Max}\{(xN^{-1}H; (r+1)^{-1})H^R, 2^{r+3}x^{-1}NH\} \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 2(r+1)^{-1}).$$

Dann ist

$$\text{(251)} \quad T(M, U) = BN^2H^{-1}s^4.$$

Beweis. Es sei $R_1 = R(r+1)$. Auf die n-Summe in (243) wende ich Hilfssatz 8.4 mit $Q = V$, $Q' = V'$, $z = xw$ an. Die Bedingung $Q \leqslant Q' \leqslant 2Q$ ist dann wegen (246) erfüllt. Falls daher

$$\text{(252)} \quad xw \geqslant 2^{r+3}, \quad (xw; (r+2)^{-1}) \leqslant V \leqslant (xw; 2(r+3)^{-1}),$$

so ist

$$\text{(253)} \quad \sum_{n=V}^{V'} e\left(\frac{xw}{n}\right) = B\left(xw; \frac{1}{R_1}\right)\left(MU; 1 - \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)\log xw \quad \textbf{(246)}.$$

Wegen

$$\text{(254)} \quad xN^{-1}MUH^{-1} \leqslant xw \leqslant xN^{-1}MUH \quad \textbf{(243)},$$

$$\text{(255)} \quad MU \leqslant V \leqslant 2MU \quad \textbf{(246)}$$

sind die Bedingungen (252) erfüllt, sobald

$$xN^{-1}MUH^{-1} \geqslant 2^{r+3},$$

$$(xN^{-1}MUH; (r+2)^{-1}) \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{2}(xN^{-1}MUH^{-1}; 2(r+3)^{-1}),$$

also erst recht, sobald

$$\text{(256)} \quad \operatorname{Max}\{(xN^{-1}H; (r+1)^{-1}), 2^{r+3}x^{-1}NH\} \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 2(r+1)^{-1}).$$

Wegen

$$3 \leqslant xw \leqslant N^{100} \quad \textbf{(254, 195, 196, 244, 245, 199, 194)}$$

ist ferner $\log xw = Bs$. Ist daher die Ungleichung (256) erfüllt, so folgt

$$\sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) = B\left(xN^{-1}MUH; \frac{1}{R_1}\right)\left(MU; 1 - \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right)s \quad \textbf{(253, 254)}$$

$$= B\left(x; \frac{1}{R_1}\right)\left(N; -\frac{1}{R_1}\right)\left(MU; 1 - \frac{1}{R}\right)\left(H; \frac{1}{R_1}\right)s,$$

$$T(M, U) = BMUs^3(NM^{-1}U^{-1})^2\left(x; \frac{1}{R_1}\right)\left(N; -\frac{1}{R_1}\right)\left(MU; 1 - \frac{1}{R}\right)\left(H; \frac{1}{R_1}\right)s \quad \textbf{(243)}$$

$$= B\left(x; \frac{1}{R_1}\right)\left(N; 2 - \frac{1}{R_1}\right)\left(MU; -\frac{1}{R}\right)\left(H; \frac{1}{R_1}\right)s^4.$$

Falls daher, außer (256), noch

$$\text{(257)} \quad MU \geqslant (xN^{-1}H; (r+1)^{-1})H^R,$$

so ist

$$T(M, U) = B\left(x; \frac{1}{R_1}\right)\left(N; 2 - \frac{1}{R_1}\right)\left(xN^{-1}H; -\frac{1}{R_1}\right)\left(H; -1 + \frac{1}{R_1}\right)s^4$$

$$= BN^2H^{-1}s^4,$$

d. h. (251) erfüllt. (256) und (257) folgen aber aus (250). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 8.10. *Es sei* $r \geqslant 72$,

$$\operatorname{Max}\{(xN^{-1}H; 11/(10r-11)), (H; 114r^3\log r)\} \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5(r-1)). \tag{258}$$

Dann ist

$$T(M, U) = BN^2H^{-1}r^3s^3. \tag{259}$$

Beweis. Auf die n-Summe in (243) wende ich Hilfssatz 8.5 mit $M = V$, $M' = V'$ an. Die Bedingung $V \leqslant V' \leqslant 2V$ ist dann nach (246) erfüllt. Falls daher

$$(xw; 11/10r) \leqslant V \leqslant (xw; 9/5r), \tag{260}$$

so ist, wenn zur Abkürzung $114r^3\log r = R$ gesetzt wird,

$$\sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) = Br^3(MU; 1-R^{-1}). \tag{261}$$

Wegen (254), (255) ist die Bedingung (260) erfüllt, sobald

$$(xN^{-1}MUH; 11/10r) \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{2}(xN^{-1}MUH^{-1}; 9/5r),$$

also erst recht, sobald

$$(xN^{-1}H; 11/(10r-11)) \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5(r-1)). \tag{262}$$

Wegen (243) und (261) ist dann

$$T(M, U) = BMUs^3(NM^{-1}U^{-1})^2r^3(MU; 1-R^{-1})$$
$$= BN^2(MU; -R^{-1})r^3s^3.$$

Ist außer (262) noch

$$MU \geqslant H^R, \tag{263}$$

so ist

$$(MU; -R^{-1}) \leqslant H^{-1},$$

also gilt (259). Die Bedingungen (262) und (263) sind aber wegen (258) erfüllt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 8.11. *Für*

$$MU \geqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1})^{1/40} \tag{264}$$

ist

$$T(M, U) = BN^2H^{-1}s^4. \tag{265}$$

Beweis. 1) Es sei

$$MU \geqslant \tfrac{1}{4}xN^{-1}H^{-1}. \tag{266}$$

Dann wende ich auf die n-Summe in (243) Hilfssatz 8.3 mit $Q = V$, $Q' = V'$, $z = xw$ an und erhalte, auf Grund von (254), (255),

$$\sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) = B(xw)^{1/2}(MU)^{-1/2} + B(xw)^{-1/2}(MU)^{3/2}$$
$$= B(xN^{-1}MUH)^{1/2}(MU)^{-1/2} + B(xN^{-1}MUH^{-1})^{-1/2}(MU)^{3/2}$$
$$= Bx^{1/2}N^{-1/2}H^{1/2} + Bx^{-1/2}N^{1/2}MUH^{1/2},$$

$$T(M, U) = BMUs^3(NM^{-1}U^{-1})^2(x^{1/2}N^{-1/2}H^{1/2} + x^{-1/2}N^{1/2}MUH^{1/2})$$
$$= Bx^{1/2}N^{3/2}(MU)^{-1}H^{1/2}s^3 + Bx^{-1/2}N^{5/2}H^{1/2}s^3$$
$$= Bx^{1/2}N^{3/2}x^{-1}NH^{3/2}s^3 + Bx^{-1/2}N^{5/2}H^{1/2}s^3 \qquad (\mathbf{266})$$
$$= Bx^{-1/2}N^{5/2}H^{3/2}s^3 = B(NH^5)^{-1/2}N^{5/2}H^{3/2}s^3 \qquad (\mathbf{193}, \mathbf{194})$$
$$= BN^2H^{-1}s^3;$$

(265) ist also erfüllt.

2) Es gelte (264). Ferner sei $r \leqslant 78$, $R = 2^{r-1}$, $R_1 = R(r+1)$. Es sollen die Ungleichungen

$$(xN^{-1}H; (r+1)^{-1})H^R \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 2(r+2)^{-1}), \tag{267}$$

$$2^{r+3}x^{-1}NH \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 2(r+2)^{-1}) \tag{268}$$

nachgewiesen werden. Wegen

$$\frac{2}{r+2} - \frac{1}{r+1} = \frac{r}{r+2}\cdot\frac{1}{r+1} \geqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{r+1}, \qquad \frac{1}{r+1} + \frac{2}{r+2} \leqslant \frac{3}{r+1}$$

ist die Ungleichung (267) erfüllt, sobald

$$\left(H; R + \frac{3}{r+1}\right) \leqslant \frac{1}{4}\left(xN^{-1}; \frac{1}{3(r+1)}\right),$$

d. h. sobald

$$2^{6r+6}H^{3R_1+9} \leqslant xN^{-1}.$$

Letztere Ungleichung ist aber wegen (193), (194) für $r \leqslant 78$ erfüllt, da dann

$$2^{6r+6}H^{3R_1+9} \leqslant (2H)^{\Delta} \leqslant \exp(t^{1/2}).$$

Wegen

$$2^{r+3}x^{-1}NH \leqslant 2^{81}x^{-1}NH \leqslant \tfrac{1}{4}$$

gilt auch (268). Da ferner

$$xN^{-1}H^{-1} \leqslant A(MU)^{40} \leqslant AN^{40}, \quad x \leqslant N^{42} \qquad (\mathbf{264}, \mathbf{244}, \mathbf{245}, \mathbf{194}),$$

so gehört N einem der Intervalle (195), (196) an; man kann also Hilfssatz 8.9 anwenden. Mit Rücksicht auf (267), (268) ergibt sich: Für

$$(269)\qquad \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 2(r+2)^{-1}) \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 2(r+1)^{-1}) \qquad (r \leqslant 78)$$

ist die Behauptung (265) des Hilfssatzes erfüllt. Die 78 Intervalle (269) vereinigen sich zu dem einen Intervall

$$\tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1})^{1/40} \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}xN^{-1}H^{-1}.$$

Unter der Bedingung (266) ist die Richtigkeit des Hilfssatzes schon festgestellt.

Hilfssatz 8.12.

$$(270)\qquad T(M,U) = BN^2H^{-1}s^6.$$

Beweis. Mit Rücksicht auf (244), (245) und Hilfssatz 8.11, braucht die Abschätzung (270) nur unter der Bedingung

$$(271)\qquad N_0 \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1})^{1/40}$$

nachgewiesen zu werden. Im folgenden sei $\nu = 1$, wenn N dem Intervall (195) angehört. Andernfalls werde ν auf Grund von (196) oder (197) definiert. Ferner sei $k = 2$ für $\nu = 1$, $k = 1$ für $\nu > 1$ und außerdem

$$(272)\qquad 73 \leqslant r \leqslant n, \qquad \text{wobei} \qquad n = [\tfrac{1}{16}\nu^{1/4}s^{1/4}\log^{-k/2}s].$$

Es sollen die beiden Ungleichungen

$$(273)\qquad (xN^{-1}H;\, 11/(10r-11)) \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5r),$$

$$(274)\qquad (H;\, 114r^3\log r) \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5r)$$

nachgewiesen werden. Wegen

$$\frac{9}{5r} - \frac{11}{10r-11} = \frac{35r-99}{5r(10r-11)} \geqslant \frac{33r}{50r^2} \geqslant \frac{1}{2r},$$

$$\frac{11}{10r-11} + \frac{9}{5r} \leqslant \frac{29}{10r-11} \leqslant \frac{3}{r}$$

ist die Ungleichung (273) erfüllt, sobald

$$(H;\, 3/r) \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1};\, 1/2r),$$

d. h. sobald

$$2^{4r} \leqslant xN^{-1}H^{-6}.$$

Letztere Ungleichung ist aber erfüllt, da nach (272), (197), (192)-(194)

$$2^{4r} \leqslant \exp(\nu^{1/4}s^{1/4}) \leqslant \exp(t^{1/16+1/4}) \leqslant H^{-6}\exp(t^{1/2}) \leqslant xN^{-1}H^{-6}.$$

Damit ist (273) bewiesen. Ferner hat man

$$\log\nu \leqslant \log X \leqslant \tfrac{1}{4}u \leqslant \tfrac{1}{4}\log(\nu+1) + \tfrac{1}{4}\log s \leqslant \tfrac{1}{4}\log\nu + \tfrac{3}{4}\log s \qquad (192,\ 195\text{-}197),$$

$$(275)\qquad \log\nu \leqslant \log s,$$

$$(H;\, 114r^3\log r) = \exp(33\log s\cdot 114r^3\log r) \qquad (194)$$

$$\leqslant \exp(33\log s\cdot 114\cdot 16^{-3}\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{-3k/2}s\log s) \qquad (272,\ 275)$$

$$(276)\qquad \leqslant \exp(\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{2-3k/2}s).$$

Andererseits ist für $\nu = 1$

$$xN^{-1}H^{-1} \geqslant N_0^{40} \qquad (271),$$

$$\tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5r) \geqslant \tfrac{1}{4}(N_0;\, 72/r)$$

$$(277)\qquad \geqslant \tfrac{1}{4}\exp\left(\frac{72s}{100\log s\cdot\frac{1}{16}s^{1/4}\log^{-1}s}\right) \geqslant \exp(s^{3/4}) \qquad (199,\ 272)$$

und für $\nu > 1$

$$\frac{1}{4}\left(xN^{-1}H^{-1};\, \frac{9}{5r}\right) \geqslant \frac{1}{4}\left(N^{\nu-1}H^{-1};\, \frac{9}{5r}\right) \geqslant \frac{1}{4}\left(N;\, \frac{\nu}{3}\cdot\frac{9}{5r}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\left(N;\, \frac{\nu}{2r}\right) = \frac{1}{4}\exp\left(\frac{s\nu}{2r}\right) \geqslant \frac{1}{4}\exp\left(\frac{16}{2}\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{1/2}s\right)$$

$$(278)\qquad \geqslant \exp(\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{1/2}s).$$

Die Ungleichung (274) folgt aus (276)-(278). Wegen (272) und (275) ist $r \leqslant s$. Aus (273), (274) und Hilfssatz 8.10 folgt daher: Für

$$(279)\qquad \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5r) \leqslant MU$$
$$\leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5(r-1)); \qquad 73 \leqslant r \leqslant n$$

ist die Behauptung (270) des Hilfssatzes erfüllt. Die Intervalle (279) schließen sich zum Intervall

$$(280)\qquad \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5n) \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1})^{1/40}$$

zusammen. Wegen (193) und (192) ist $s \leqslant t \leqslant Xs$,

$$X \leqslant \tfrac{1}{3400}t^{1/4}u^{-3/2} \leqslant \tfrac{1}{3400}X^{1/4}s^{1/4}\log^{-3/2}s,$$

$$(281)\qquad X^{3/4} \leqslant \tfrac{1}{3400}s^{1/4}\log^{-3/2}s.$$

Ferner ist

$$(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5n) \leqslant (N^{\nu}H^{-1};\, 9/5n) \leqslant (N;\, 2\nu/n) = \exp(2\nu s/n)$$

$$\leqslant \exp\left(\frac{2\nu s}{\frac{1}{17}\nu^{1/4}s^{1/4}\log^{-k/2}s}\right) = \exp(34\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{k/2}s).$$

Daher ist für $\nu = 1$

(282) $$\tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5n) \leqslant N_0 \quad (\mathbf{199})$$

und für $\nu > 1$

$$\tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5n) \leqslant \exp(34\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{1/2}s)$$
$$\leqslant \exp(34X^{3/4}s^{3/4}\log^{1/2}s) \leqslant \exp(s/100\log s) = N_0 \quad (\mathbf{197}, \mathbf{281}, \mathbf{199}),$$

also (282) ebenfalls erfüllt. Wegen (282) gehört das Intervall (271) dem Intervall (280) an, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Hilfssatz 8.13.

(283) $$\sum_{p\leqslant N} e(x/p) = BNH^{-1/2}s^6.$$

Beweis. Es erfülle M zunächst die Bedingung (233). Dann ist

$$T_{hj}^2(M, U) = BN^2H^{-1}s^6 \quad (\mathbf{247}, \mathbf{270}),$$
$$T_{hj}(M, U) = BNH^{-1/2}s^3,$$
$$T_{hj}(M) = BNH^{-1/2}s^4 \quad (\mathbf{241}),$$
$$S_{hj}(M) = Bh^{-1}NH^{-1/2}s^4 \quad (\mathbf{239}),$$
$$\sum_{h=1}^{h_0} S_{hj}(M) = BNH^{-1/2}s^5 \quad (\mathbf{235}),$$
$$S_j(M) = BNH^{-1/2}s^5 \quad (\mathbf{236}, \mathbf{237}).$$

Nach Hilfssatz 8.6 gilt diese Abschätzung auch dann, wenn die Bedingung (233) nicht erfüllt ist. Daher ist

$$S_j = BNH^{-1/2}s^6 \quad (\mathbf{208}).$$

In Verbindung mit (206) und (200) ergibt sich die Behauptung (283) des Hilfssatzes.

Es soll jetzt die Summe

(284) $$S = \sum_{n\leqslant N} \mu(n)e(x/n)$$

unter der Bedingung

(285) $$(x; 2/X) \leqslant N \leqslant x\exp(-t^{1/2})$$

abgeschätzt werden. Es sei $g(n)$ für $n > 1$ der größte Primteiler von n; $g(1) = 1$. Zur Abkürzung werde gesetzt:

(286) $$S_1 = \sum_{q\leqslant N_0} \mu(q) \sum_{N_0<p\leqslant Nq^{-1}} e(x/pq),$$

(287) $$S_2 = \sum_{N_0<p<NN_0^{-1}} \sum_{\substack{N_0<q\leqslant Np^{-1}\\ g(q)<p}} \mu(q)e(x/pq).$$

Hilfssatz 8.14.

(288) $$S = -S_2 + BNH^{-1/3}s^7.$$

Beweis. Falls

$$N^{1/2} \leqslant n \leqslant N, \quad g(n) \leqslant N_0, \quad n \text{ quadratfrei},$$

so zeigt dieselbe Überlegung, wie zu Anfang des Beweises von Hilfssatz 8.7, daß $d(n) \geqslant H$. Daher ist

(289) $$\sum_{\substack{1<n\leqslant N\\ g(n)\leqslant N_0}} \mu(n)e(x/n) = BH^{-1}\sum_{n\leqslant N} d(n) + BN^{1/2} = BNH^{-1}s.$$

Ferner hat man

$$\sum_{\substack{1<n\leqslant N\\ g(n)>N_0}} \mu(n)e(x/n) = \sum_{N_0<p\leqslant N} \sum_{\substack{q\leqslant Np^{-1}\\ g(q)<p}} \mu(pq)e(x/pq)$$

(290) $$= -\sum_{N_0<p\leqslant N} \sum_{\substack{q\leqslant Np^{-1}\\ g(q)<p}} \mu(q)e(x/pq) = -S_1 - S_2 \quad (\mathbf{286}, \mathbf{287}).$$

Es soll jetzt S_1 abgeschätzt werden; dabei sei $q \leqslant N_0$. Zunächst ist

(291) $$\sum_{N_0<p\leqslant Nq^{-1}} e(x/pq) = \sum_{p\leqslant Nq^{-1}} e(x/pq) + BN_0.$$

Auf die p-Summe rechts wende ich Hilfssatz 8.13 an, mit

$$N' = Nq^{-1}, \quad s' = \log N', \quad x' = xq^{-1}, \quad t' = \log x', \quad u' = \log\log x',$$
$$X' = \left[\tfrac{1}{3400}t'^{1/4}u'^{-3/2}\right], \quad H' = s'^{33}.$$

Aus (192)-(194), (199) und (285) folgt dann: Für

(292) $$(x'; 1/X') < N' \leqslant x'\exp(-t'^{1/2})$$

ist

(293) $$\sum_{p\leqslant Nq^{-1}} e(x/pq) = BN'H'^{-1/2}s'^6 = BNq^{-1}H'^{-1/2}s^6.$$

Wegen

$$Nq^{-1} \leqslant xq^{-1}\exp(-t^{1/2}) \leqslant xq^{-1}\exp(-t'^{1/2}) \qquad (\mathbf{285})$$

ist die rechte Hälfte von (292) erfüllt. Da ferner

$$t' = \log x' = \log x - \log q = t - \log q \geqslant t - \log N_0\,,$$

(294) $$\log N_0 = \frac{s}{100\log s} \leqslant \frac{s}{100} \leqslant \frac{t}{100} \qquad (\mathbf{199}),$$

so ist

$$X' \geqslant \left[\tfrac{1}{3400}\left(\tfrac{99}{100}t\right)^{1/4}u^{-3/2}\right] \geqslant \tfrac{2}{3}X \qquad (\mathbf{192}),$$

also

$$(x'; 1/X') \leqslant (x; 3/2X) \leqslant N^{3/4} < NN_0^{-1} \leqslant Nq^{-1} = N' \qquad (\mathbf{285}, \mathbf{199}),$$

d. h. auch die linke Hälfte von (292) ist erfüllt und die Abschätzung (293) richtig. Wegen

$$s' = s - \log q \geqslant s - \log N_0 \geqslant 0,99s \qquad (\mathbf{294})$$

ist ferner

$$H' \geqslant s^{22} = H^{2/3}.$$

Somit ist

$$\sum_{N_0<p\leqslant Nq^{-1}} e(x/pq) = BNq^{-1}H^{-1/3}s^6 + BN_0 \qquad (\mathbf{291}, \mathbf{293}),$$

(295) $$S_1 = BNH^{-1/3}s^6\log N_0 + BN_0^2 = BNH^{-1/3}s^7 \qquad (\mathbf{286}, \mathbf{294}, \mathbf{199}, \mathbf{194}).$$

Die Behauptung (288) des Hilfssatzes folgt aus (284), (289), (290) und (295).

Um S_2 abzuschätzen, werde das Summationsintervall nach p in (287), nämlich $N_0 < p < NN_0^{-1}$, in Bs Teilintervalle der Gestalt

(296) $$U < p \leqslant U', \quad \text{wobei} \quad N_0 \leqslant U < U' \leqslant 2U \leqslant 2NN_0^{-1}$$

zerlegt. Dann ergibt sich

(297) $$S_2 = \sum_U S_2(U);$$

(298) $$S_2(U) = \sum_{U<p\leqslant U'} \sum_{\substack{N_0<q\leqslant Np^{-1}\\ g(q)<p}} \mu(q)e(x/pq).$$

Hilfssatz 8.15.

(299) $$S_2^2(U) = BT(M, U) + BN^2H^{-1}s^3.$$

Beweis. Der Beweis dieses Hilfssatzes verläuft analog, wie der von Hilfssatz 8.8. Wegen (298) und (296) ist

$$\left|S_2(U)\right|^2 \leqslant \sum_{U<p\leqslant U'} 1 \cdot \sum_{U<p\leqslant U'} \left|\sum_{\substack{N_0<q\leqslant Np^{-1}\\ g(q)<p}} \mu(q)e\left(\frac{x}{pq}\right)\right|^2,$$

$$S_2^2(U) = BU\sum_{U<n\leqslant U'} \left|\sum_{\substack{N_0<q\leqslant Nn^{-1}\\ g(q)<n}} \mu(q)e\left(\frac{x}{nq}\right)\right|^2.$$

Durchläuft daher q_1 dieselben Zahlen wie q und wird zur Abkürzung

$$q_1^{-1} - q^{-1} = w,$$

$$\operatorname{Max}\{U, g(q), g(q_1)\} = V-1, \qquad \operatorname{Min}\{U', [Nq^{-1}], [Nq_1^{-1}]\} = V'$$

gesetzt, so ist

$$S_2^2(U) = BU\sum_{U<n\leqslant U'} \sum_{\substack{N_0<q,q_1\leqslant Nn^{-1}\\ g(q)<n, g(q_1)<n}} \mu(q)\mu(q_1)e\left(\frac{xw}{n}\right)$$

$$= BU\sum_{N_0<q,q_1<NU^{-1}} \mu(q)\mu(q_1)\sum_{n=V}^{V'} e\left(\frac{xw}{n}\right)$$

$$= BU\sum_{q,q_1\leqslant NU^{-1}} \left|\sum_{n=V}^{V'} e\left(\frac{xw}{n}\right)\right|.$$

Es sei $M = 1$. Falls dann die n-Summe nicht leer ist, so genügen U, V, V', nach (296), den Bedingungen (245), (246). Die Glieder mit $q = q_1$ liefern den Beitrag

$$BU\sum_{q\leqslant NU^{-1}} U = BNU = BN^2N_0^{-1} = BN^2H^{-1} \qquad (\mathbf{296}, \mathbf{199}, \mathbf{194}).$$

Aus Symmetriegründen ist also

$$S_2^2(U) = BU\sum_{q_1<q\leqslant NU^{-1}} \left|\sum_{n=V}^{V'} e\left(\frac{xw}{n}\right)\right| + BN^2H^{-1}$$

$$= BUs^3\sum_{q_1<q\leqslant NU^{-1}} \left|\sum_{n=V}^{V'} e\left(\frac{xw}{n}\right)\right| + BN^2H^{-1}s^3.$$

Diese Abschätzung entspricht der Abschätzung (249) für $T^2_{hj}(M, U)$. Der Rest des Beweises verläuft genau so, wie bei Hilfssatz 8.8; man muß nur überall $M = 1$ setzen.

Hilfssatz 8.16. *Unter der Bedingung* (285) *ist*

$$\sum_{n\leqslant N} \mu(n)\, e(x/n) = BNs^{-4}. \tag{300}$$

Beweis. Da die Bedingung (193) wegen (285) erfüllt ist, so hat man

$$\begin{aligned} S_2^2(U) &= BN^2H^{-1}s^6 \qquad (299,\ 270),\\ S_2'(U) &= BNH^{-1/2}s^3,\\ S_2 &= BNH^{-1/2}s^4 \qquad (297),\\ S &= BNH^{-1/3}s^7 \qquad (288).\end{aligned}$$

In Verbindung mit (194) und (284), ergibt sich die Behauptung (300) des Hilfssatzes.

Hilfssatz 8.17. *Es sei* $v > e$, $z > 0$, $\log z = v$, $Q \leqslant Q' \leqslant 2Q$,

$$Z = \left[\tfrac{1}{3400} v^{1/4} \log^{-3/2} v\right], \tag{301}$$

$$(z;\ 2/Z) \leqslant Q \leqslant Q' \leqslant z\exp(-v^{1/2}). \tag{302}$$

Dann ist

$$\sum_{q=Q}^{Q'} \mu(q)\, e(z/q) = BQv^{-2}. \tag{303}$$

Beweis. Hilfssatz 8.16 werde zweimal angewandt, und zwar mit $x = z$, $N = Q$ und mit $x = z$, $N = Q'$. Dies ist zulässig, obwohl Hilfssatz 8.16 nur für $x > A_{13}$ bewiesen worden ist; für diejenigen x nämlich, bei denen $t > e$, $x \leqslant A_{13}$, ist die Abschätzung (300) klar. Aus (300), (285) und (192) folgt jetzt, unter den Bedingungen (301), (302),

$$\sum_{q\leqslant Q} \mu(q)\, e(z/q) = BQ\log^{-4} Q, \qquad \sum_{q\leqslant Q'} \mu(q)\, e(z/q) = BQ\log^{-4} Q,$$

d. h.

$$\sum_{Q<q\leqslant Q'} \mu(q)\, e(z/q) = BQ\log^{-4} Q.$$

Andererseits ist, auf Grund von (301), (302),

$$\log Q \geqslant \frac{2}{Z} v \geqslant v^{1/2}.$$

Damit ist der Hifssatz bewiesen.

Hilfssatz 8.18. *Für ganzzahlige* x *ist*

$$\sum_{(x;6/X)\leqslant q\leqslant x\exp(-t^{1/2})} \frac{\mu(q)}{q}\, \psi\!\left(\frac{x}{q}\right) = B. \tag{304}$$

Beweis. Es mögen Q, Q' den Bedingungen

$$Q \leqslant Q' \leqslant 2Q, \qquad (x;\ 6/X) \leqslant Q \leqslant Q' \leqslant x\exp(-t^{1/2}) \tag{305}$$

genügen. Ich setze

$$D = Q^{X/2} x^{-1}, \tag{306}$$

$$z = nx \quad \text{für} \quad n \leqslant D. \tag{307}$$

Dann ist

$$z \geqslant x, \qquad v \geqslant t, \qquad Z \geqslant X \qquad (306,\ 301,\ 192). \tag{308}$$

Nach (154) und (155) ist

$$\begin{aligned}\left| x \sum_{q=Q}^{Q'} \mu(q) \int_0^{x^{-1}} \psi\!\left(\frac{x}{q} + \theta\right) d\theta \right| &\leqslant 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{q=Q}^{Q'} \mu(q)\, e\!\left(\frac{nx}{q}\right)\right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{x}{n^2}\right)\\ &= 2\sum_{n\leqslant D} + 2\sum_{n>D} = 2S_1 + 2S_2.\end{aligned} \tag{309}$$

In S_1 genügen Q, Q' den Bedingungen von Hilfssatz 8.17, da

$$z \leqslant Dx = Q^{X/2}, \qquad (z;\ 2/Z) \leqslant (z;\ 2/X) \leqslant Q \qquad (306\text{-}308),$$

$$Q' \leqslant x\exp(-t^{1/2}) \leqslant z\exp(-v^{1/2}) \qquad (305,\ 308).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n\leqslant D} \left| \sum_{q=Q}^{Q'} \mu(q)\, e(z/q) \right| \qquad (309,\ 307)\\ &= BQ \sum_{n\leqslant D} v^{-2} \operatorname{Min}(n^{-1}, xn^{-1}) = BQt^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Min}(n^{-1}, xn^{-2}) \qquad (303,\ 308)\\ &= BQt^{-2}\Big(\sum_{n\leqslant x} n^{-1} + \sum_{n>x} xn^{-2}\Big) = BQt^{-1}.\end{aligned}$$

In S_2 ist die q-Summe offenbar Bq, so daß

$$\begin{aligned} S_2 &= BQ \sum_{n>D} \operatorname{Min}(n^{-1}, xn^{-2}) = BQx \sum_{n>D} n^{-2} = BQxD^{-1}\\ &= B\left(Q;\ 1 - \frac{X}{2}\right) x^2 = BQ\left(x;\ 2 - \frac{X}{2}\cdot\frac{6}{X}\right) \qquad (306,\ 305)\\ &= BQx^{-1} = BQt^{-1},\end{aligned}$$

$$x \sum_{q=Q}^{Q'} \mu(q) \int_0^{x^{-1}} \psi(x/q + \theta)\, d\theta = BQt^{-1} \qquad (309). \tag{310}$$

Wegen

$$\psi(x/q+\theta)-\psi(x/q) = \theta-([x/q+\theta]-[x/q]) \qquad (3)$$
$$= \theta - \sum_{x/q<m\leqslant x/q+\theta} 1,$$

ist

$$x\int_0^{x^{-1}} \psi(x/q+\theta)\,d\theta = \psi(x/q)+\frac{1}{2x}+B\sum_{x/q<m\leqslant x/q+1/x} 1,$$

$$x\sum_{q=Q}^{Q'}\mu(q)\int_0^{x^{-1}}\psi(x/q+\theta)\,d\theta-\sum_{q=Q}^{Q'}\mu(q)\psi(x/q)$$
$$= BQx^{-1}+B\sum_{Q\leqslant q\leqslant 2Q}\ \sum_{x/q<m\leqslant x/q+1/x} 1$$
$$= BQt^{-1}+B\sum_{x<mq\leqslant x+2Qx^{-1}} 1 = BQt^{-1}+B\sum_{x<mq<x+1} 1 \qquad (305)$$

(311) $$= BQt^{-1},$$

da x ganzzahlig ist, also die letzte Summe verschwindet. Aus (310) und (311) folgt

$$\sum_{q=Q}^{Q'}\mu(q)\psi(x/q) = BQt^{-1},$$

(312) $$\sum_{q=Q}^{Q'}\frac{\mu(q)}{q}\psi\left(\frac{x}{q}\right) = Bt^{-1}.$$

Auf Grund von (305) zerfällt die Summe (304) in Bt Summen der Gestalt (312). Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis von (51). Es genügt,

(313) $$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\psi\left(\frac{x}{n}\right) = Bt^{3/4}u^{3/2}$$

nachzuweisen, da hieraus (51) wegen (182) folgt.

1) Für ganzzahlige x folgt (313) aus (304) und den trivialen Abschätzungen

$$\sum_{q<(x;6/X)}\frac{\mu(q)}{q}\psi\left(\frac{x}{q}\right) = B\sum_{q<(x;6/X)}\frac{1}{q} \qquad (3)$$

(314) $$= BtX^{-1} = Bt^{3/4}u^{3/2} \qquad (192),$$

$$\sum_{x\exp(-t^{1/2})<q\leqslant x}\frac{\mu(q)}{q}\psi\left(\frac{x}{q}\right) = B\sum_{x\exp(-t^{1/2})<q\leqslant x}\frac{1}{q} = Bt^{1/2}.$$

2) Es sei x keine ganze Zahl und $[x]=y$. Nach dem soeben behandelten Fall 1) ist dann

(315) $$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\psi\left(\frac{y}{n}\right) = Bt^{3/4}u^{3/2}.$$

Wegen

$$0\leqslant\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\psi\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{x-y}{n}\leqslant\frac{1}{n} \qquad (3)$$

ist daher

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\psi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\psi\left(\frac{y}{n}\right)+\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\left\{\psi\left(\frac{x}{n}\right)-\psi\left(\frac{y}{n}\right)\right\}$$

(316) $$= Bt^{3/4}u^{3/2}+B\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2} = Bt^{3/4}u^{3/2}.$$

§ 9. Behandlung des IV Problems mit Hilfe der Sätze 1 und 3-7

In diesem Paragraphen sollen die Änderungen angegeben werden, die in § 8 anzubringen sind, um (51), mit Hilfe von Satz 1, und (53), mit Hilfe der Sätze 3-7, zu erhalten.

Anwendung von Satz 1. 1) Hilfssatz 8.5 wird ersetzt durch den

Hilfssatz 8.5′. *Es sei $r\geqslant 72$, M dem Intervall (60) angehörig, $M\leqslant M'\leqslant 2M$. Dann ist, mit einem geeigneten $A_{14}\geqslant 1$,*

(191′) $$\sum_{m=M}^{M'} e(x/m) = Br^{A_{14}}\{M; 1-(A_{14}r^3\log r)^{-1}\}\log^2 2M.$$

Für den Beweis vgl. § 7, Anwendung von Satz 1. Hilfssatz 8.5′ wird überall dort benutzt, wo früher Hilfssatz 8.5 benutzt worden ist.

2) Die Werte (192), (194), (199) von X, H, N_0 werden ersetzt durch

(192′) $$X = [A_{15}t^{1/4}u^{-3/2}],$$

wobei A_{15} so gewählt wird, daß

(317) $$\tfrac{3}{2}(A_{14}+20)A_{14}\leqslant d, \qquad 9(A_{14}+20)(d+1)A_{15}\leqslant 1;$$

(194′) $$H = \left(s; \tfrac{3}{2}(A_{14}+20)\right),$$

(199′) $$N_0 = \exp\left(\frac{2s}{9(A_{14}+20)\log s}\right).$$

3) Die Formel (228) ist zu ersetzen durch

$$(228') \qquad \sum_m = B\nu^A\{M; 1-(A\nu^3\log\nu)^{-1}\}\log^2 2M$$

und entsprechend (231) durch

$$(231') \qquad S_j(M) = B\{N; \nu+1+\tfrac{200}{401}(1-\tfrac{9}{4}\nu)\}+ \\ +BN\nu^A\{N; -(A\nu^3\log\nu)^{-1}\}\log^2 N.$$

Schließt man jetzt so, wie bei (231), (232), so ergibt sich

$$S_j(M) = B+BNX^A\exp(-t/AX^4\log X)t^2 \\ = BNt^A\exp(-tu^6/Atu) = BN\exp(-u^2) = BNH^{-1}.$$

4) Beim Beweise von Hilfssatz 8.7 gilt die Ungleichung $N_0^l \geqslant N^{1/2}$ unverändert, und daraus folgt die Ungleichung $d(\delta_0) \geqslant H$ so:

$$2ls/9(A_{14}+20)\log s \geqslant \tfrac{1}{2}s, \qquad l \geqslant \tfrac{9}{4}(A_{14}+20)\log s \qquad (\mathbf{199'}),$$

$$d(\delta_0) \geqslant 2^l \geqslant \exp\{\tfrac{9}{4}(A_{14}+20)\tfrac{2}{3}\log s\} = H \qquad (\mathbf{194'}).$$

5) Hilfssatz 8.10 ist zu ersetzen durch den

Hilfssatz 8.10′. *Es sei* $r \geqslant 72$,

$$(258') \qquad \operatorname{Max}\{(xN^{-1}H; 11/(10r-11)), (H; A_{14}r^3\log r)\} \leqslant MU \\ \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5(r-1)).$$

Dann ist

$$(259') \qquad T(M, U) = BN^2H^{-1}r^{A_{14}}s^5.$$

Beim Beweise nehme man $A_{14}r^3\log r = R$ und ersetze (261) durch

$$(261') \qquad \sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) = Br^{A_{14}}\{MU; 1-R^{-1}\}\log^2 MU.$$

Die Bedingung (260) ist erfüllt, sobald (262) gilt. Nach (244) und (245) ist ferner $\log MU = Bs$. Wegen (243) und (261) ist daher

$$T(M, U) = BN^2(MU; -R^{-1})r^{A_{14}}s^5.$$

Ist außer (262) noch

$$(263') \qquad MU \geqslant H^R,$$

so gilt (259′). Die Bedingungen (262) und (263′) sind aber wegen (258′) erfüllt.

6) Hilfssatz 8.12 ist zu ersetzen durch den

Hilfssatz 8.12′.

$$(270') \qquad T(M, U) = BN^2H^{-1}s^{A_{14}+5}.$$

Beim Beweise wird (272) ersetzt durch

$$(272') \qquad 73 \leqslant r \leqslant n; \qquad n = [d^{-1}\nu^{1/4}s^{1/4}\log^{-k/2}s],$$

wobei $d = A$ der ersten Ungleichung (317) genügt. (274) ist zu ersetzen durch

$$(274') \qquad (H; A_{14}r^3\log r) \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5r).$$

Die Ungleichung (275) bleibt in Kraft. Die zu (276), (277) führenden Rechnungen lauten jetzt:

$$(H; A_{14}r^3\log r) = \exp(\tfrac{3}{2}(A_{14}+20)\log s\cdot A_{14}r^3\log r) \qquad (\mathbf{194'})$$

$$\leqslant \exp\{\tfrac{3}{2}(A_{14}+20)\log s\cdot A_{14}d^{-3}\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{-3k/2}s\log s\} \qquad (\mathbf{272'}, \mathbf{275})$$

$$(276') \qquad \leqslant \exp(\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{2-3k/2}s) \qquad (\mathbf{317}),$$

$$\tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5r) \geqslant \tfrac{1}{4}(N_0; 72/r)$$

$$(277') \qquad \geqslant \frac{1}{4}\exp\left(\frac{72\cdot 2s}{9(A_{14}+20)\log s\cdot d^{-1}s^{1/4}\log^{-1}s}\right) \geqslant \exp(s^{3/4}) \\ (\mathbf{199'}, \mathbf{272'}, \mathbf{317});$$

in der zu (278) führenden Rechnung ist $\frac{16}{2}$ durch $\frac{1}{2}d$ zu ersetzen und (317) zu beachten.

Wegen $r \leqslant s$ folgt aus Hilfssatz 8.10′, daß unter der Bedingung (279) die Behauptung (270′) von Hilfssatz 8.12′ erfüllt ist. (281) werde durch

$$(281') \qquad X^{3/4} \leqslant A_{15}s^{1/4}\log^{-3/2}s$$

ersetzt. Weiter folgt

$$\left(xN^{-1}H^{-1}; \frac{9}{5n}\right) \leqslant \exp\left(\frac{2\nu s}{(d+1)^{-1}\nu^{1/4}s^{1/4}\log^{-k/2}s}\right) = \exp\{2(d+1)\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{k/2}s\} \\ (\mathbf{272'}).$$

Für $\nu = 1$ ist also (282) wegen (199′) erfüllt. Für $\nu > 1$ ist nach (197), (281′), (199′) und (317)

$$\tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5n) \leqslant \exp\{2(d+1)\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{1/2}s\} \\ \leqslant \exp\{2(d+1)X^{3/4}s^{3/4}\log^{1/2}s\} \leqslant \exp\{2(d+1)A_{15}s\log^{-1}s\} \leqslant N_0,$$

also (282) ebenfalls erfüllt und der Hilfssatz bewiesen. (283) wird ersetzt durch

$$\sum_{p\leqslant N} e(x/p) = BNH^{-1/2}s^{(A_{14}+10)/2}. \tag{283'}$$

Beim Beweise sind die Exponenten $6, 3, 4, 5, 6$ von s zu ersetzen durch

$$A_{14}+5,\quad \tfrac{1}{2}(A_{14}+5),\quad \tfrac{1}{2}(A_{14}+7),\quad \tfrac{1}{2}(A_{14}+8),\quad \tfrac{1}{2}(A_{14}+10).$$

7) (288) ist zu ersetzen durch

$$S = -S_2+BNH^{-1/3}s^{(A_{14}+12)/2}. \tag{288'}$$

Beim Beweise definiere man X', H' durch

$$X' = [A_{15}t'^{1/4}u'^{-3/2}],\qquad H' = \big(s';\tfrac{3}{2}(A_{14}+20)\big).$$

Unter der Bedingung (292) ist dann

$$\sum_{p\leqslant Nq^{-1}} e(x/pq) = BNq^{-1}H'^{-1/2}\{s';\tfrac{1}{2}(A_{14}+10)\}. \tag{293'}$$

Ferner ist

$$\log N_0\leqslant s/100\leqslant t/100\qquad (\mathbf{199'}), \tag{294'}$$

also $X'\geqslant\frac{2}{3}X$, d.h. (293') erfüllt. Wegen $s'\geqslant 0{,}99s$ bleibt die Ungleichung $H'\geqslant H^{2/3}$ bestehen, und man bekommt statt (295)

$$\begin{aligned} S_1 &= BNH^{-1/3}\{s;\tfrac{1}{2}(A_{14}+10)\}\log N_0+BN_0^2\\ &= BNH^{-1/3}\{s;\tfrac{1}{2}(A_{14}+12)\},\end{aligned} \tag{295'}$$

womit (288') bewiesen ist.

8) Beim Beweise von Hilfssatz 8.16 sind die Exponenten $6, 3, 4, 7$ von s zu ersetzen durch

$$A_{14}+5,\quad \tfrac{1}{2}(A_{14}+5),\quad \tfrac{1}{2}(A_{14}+7),\quad \tfrac{1}{2}(A_{14}+12).$$

Auf diese Weise ergibt sich

$$S = BNH^{-1/3}\{s;\tfrac{1}{2}(A_{14}+12)\},$$

und hieraus folgt (300), auf Grund von (194') und (284).

In Hilfssatz 8.17 ist (301) durch

$$Z = [A_{15}v^{1/4}\log^{-3/2}v] \tag{301'}$$

zu ersetzen.

Anwendung der Sätze 3, 4 und 7. 1) Hilfssatz 8.5 werde ersetzt durch den

Hilfssatz 8.5''. *Es sei $r\geqslant 72$, M dem Intervall* (60) *angehörig, $M\leqslant M'\leqslant 2M$. Dann ist*

$$\sum_{m=M}^{M'} e(x/m) = B\exp(19r\log^2 r)\{M;1-(50r^2\log r)^{-1}\}\log 2M. \tag{191''}$$

Beweis. Nach § 7 ergibt sich für die Summe (138): aus Satz 3 die Abschätzung (133), aus Satz 4 die Abschätzung (129) und aus Satz 7 die Abschätzung (179). Die Summe (191) unterscheidet sich vom Spezialfall $s=1$ der Summe (138) nur um B. Damit ist die Behauptung bewiesen.

2) Der Wert (192) von X werde ersetzt durch

$$X = [\tfrac{1}{3400}t^{1/4}u^{-7/4}]. \tag{192''}$$

Die Werte (194) und (199) von H und N_0 werden beibehalten.

3) (228) ist zu ersetzen durch

$$\sum_m = B\exp(A\nu\log^2\nu)\{M;1-(A\nu^2\log\nu)^{-1}\}\log 2M. \tag{228''}$$

(231) und die darauf folgende Rechnung sind zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} S_j(M) &= B\{N;\nu+1+\tfrac{200}{401}(1-9\nu/4)\}+\\ &\qquad\qquad +BN\exp(A\nu\log^2\nu)\{N;-(A\nu^2\log\nu)^{-1}\}s\\ &= B+BN\exp(A\nu\log^2\nu)\{(x;1/(\nu+1));-(A\nu^2\log\nu)^{-1}\}s\qquad(\mathbf{197})\\ &= B+BN\exp(A\nu\log^2\nu)\exp\{-t(A\nu^3\log\nu)^{-1}\}s\\ &= B+BN\exp\{AX\log^2X-t(AX^3\log X)^{-1}\}s\qquad(\mathbf{197})\\ &= B+BN\exp(-t^{1/4})s = B+BN\exp(-s^{1/4})s = BNH^{-1}\quad(\mathbf{192'', 193, 194}).\end{aligned} \tag{231''}$$

4) Hilfssatz 8.10 ist zu ersetzen durch den

Hilfssatz 8.10''. *Es sei $r\geqslant 72$,*

$$(xN^{-1}H;11/(10r-11))\leqslant MU\leqslant\tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};9/5(r-1)). \tag{258''}$$

Dann ist

$$T(M,U) = BN^2\exp(19r\log^2r)\{MU;-(50r^2\log r)^{-1}\}s^4. \tag{259''}$$

Beim Beweise werde (261) ersetzt durch

$$\sum_{n=T}^{T'} e(xw/n) = B\exp(19r\log^2r)\{MU;1-(50r^2\log r)^{-1}\}\log MU, \tag{261''}$$

und hieraus folgt

$$T(M,U) = BMUs^3(NM^{-1}U^{-1})^2\exp(19r\log^2r)\{MU;1-(50r^2\log r)^{-1}\}s,$$

d. h. (259'').

5) Hilfssatz 8.12 wird beibehalten, erfordert aber einen abgeänderten Beweis.

Es genügt wiederum, die Abschätzung (270) unter der Annahme (271) zu beweisen. ν werde wie im Anschluß an (271) definiert. Ferner sei $k=2$ für $\nu=1$, $k=\frac{3}{2}$ für $\nu>1$ und außerdem möge (272) gelten. Die Ungleichung (273) gilt mit demselben Beweis wie in § 8. Aus ihr und Hilfssatz 8.10″ folgt: Unter der Bedingung (279) ist die Behauptung (259″) von Hilfssatz 8.10″ erfüllt. Die Intervalle (279) schließen sich zum Intervall (280) zusammen. (281) werde ersetzt durch

$$X^{3/4} \leqslant \tfrac{1}{3400} s^{1/4} \log^{-7/4} s . \tag{281''}$$

Daraus folgt (282) für $\nu=1$ unverändert und für $\nu>1$ wegen

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5n) &\leqslant \exp(34\nu^{3/4}s^{3/4}\log^{3/4}s) \\ &\leqslant \exp(34X^{3/4}s^{3/4}\log^{3/4}s) \leqslant \exp(s/100\log s) = N_0 . \end{aligned}$$

Wegen (282) gehört das Intervall (271) dem Intervall (280) an. Für die M, U mit (271) gilt also die Abschätzung (259″), sofern $73 \leqslant r \leqslant n$ ist. Da die rechts in (259″) stehende Funktion von r mit wachsendem r zunimmt, ist also

$$\begin{aligned} T(M,\, U) &= BN^2\exp(19n\log^2 n)\{MU;\, -(50n^2\log n)^{-1}\}s^4 \\ &= BN^2\exp(19n\log^2 n)\{N_0;\, -(50n^2\log n)^{-1}\}s^4 \qquad (\mathbf{271}) . \end{aligned}$$

Hierin ist nach (272), (197), (281″) und (199)

$$n \leqslant \tfrac{1}{16}X^{1/4}s^{1/4}\log^{-3/4}s \leqslant \frac{1}{16\cdot 3400^{1/3}}\, s^{1/12+1/4}\log^{-7/12-3/4}s$$

$$\leqslant \tfrac{1}{240}s^{1/3}\log^{-4/3}s , \tag{318}$$

$$\log n \leqslant \tfrac{1}{3}\log s , \tag{319}$$

$$19n\log^2 n \leqslant \frac{19}{240\cdot 9}\, s^{1/3}\log^{2/3}s \leqslant s^{1/3}\log^{2/3}s ,$$

$$\frac{\log N_0}{50n^2\log n} = \frac{s}{5000n^2\log n\log s} \geqslant \frac{3\cdot 240^2 s\log^{8/3}s}{5000s^{2/3}\log^2 s} \geqslant 23s^{1/3}\log^{2/3}s .$$

Also ist

$$T(M, U) = BN^2\exp(-22s^{1/3}\log^{2/3}s)\, s^4 = BN^2H^{-1} \qquad (\mathbf{194}) ,$$

d. h. (270) erfüllt.

6) Beim Beweise von Hilfssatz 8.14 definiere man X', H' durch

$$X' = [\tfrac{1}{3400}t'^{1/4}u'^{-7/4}], \qquad H' = s'^{33} .$$

Unter der Bedingung (292) gilt dann (293). Der Nachweis von (292) wird wie in § 8 geführt, nur daß hier

$$X' \geqslant [\tfrac{1}{3400}(\tfrac{99}{100}t)^{1/4}u^{-7/4}] \geqslant \tfrac{2}{3}X$$

ist.

7) In Hilfssatz 8.17 ist (301) durch

$$Z = [\tfrac{1}{3400}v^{1/4}\log^{-7/4}v] \tag{301''}$$

zu ersetzen.

8) Beim Beweise von (53) genügt wegen (182) der Nachweis von

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\,\psi\left(\frac{x}{n}\right) = Bt^{3/4}u^{7/4} . \tag{313''}$$

Der Beweis verläuft wie der von (313), nur daß in (314)-(316)

$$Bt^{3/4}u^{3/2} \quad \text{durch} \quad Bt^{3/4}u^{7/4}$$

zu ersetzen ist.

Anwendung von Satz 5. 1) Hilfssatz 8.5 wird ersetzt durch den

Hilfssatz 8.5‴. *Es sei* $r \geqslant \mathrm{Max}([A_1]+1,\, 72) = a$, M *dem Intervall* (60) *angehörig*, $M \leqslant M' \leqslant 2M$. *Dann ist*

$$\sum_{m=M}^{M'} e(x/m) = B\exp(10r\log^2 r)\{M;\, 1-(114r^2\log r)^{-1}\}\log 2M . \tag{191'''}$$

Beweis. Nach Satz 5 gilt Satz 8 für die Werte (36) von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; $A_2 = 10$, $A_3 = 6$, $X = 1$. Hilfssatz 8.5‴ folgt daher aus Hilfssatz 6.1, wenn man noch $s = 1$ setzt.

2) Der Wert (192) von X werde durch (192″) ersetzt. Die Werte (194) und (199) von H und N_0 werden beibehalten. (196) und (197) ersetze man durch

$$\left(x;\, \frac{1}{\nu+1}\right) < N \leqslant \left(x;\, \frac{1}{\nu}\right) \qquad (1 < \nu < a) , \tag{196'''}$$

$$\left(x;\, \frac{1}{\nu+1}\right) < N \leqslant \left(x;\, \frac{1}{\nu}\right) \qquad (a \leqslant \nu < X) . \tag{197'''}$$

Die Änderungen, die dadurch verursacht werden, daß man (196) durch (196‴) ersetzt, sollen hier angegeben werden.

Im Wortlaut von Hilfssatz 8.6 ersetze man (209) durch

$$M \geqslant N^{a/(2a+1)}. \tag{209'''}$$

Beim Beweise sind in der vorletzten Zeile von 1) die Exponenten

$$\frac{100}{401}, \frac{600}{401}, \frac{140}{401} \quad \text{durch} \quad \frac{a}{4a+2}, \frac{3a}{2a+1}, \frac{7a}{20a+10}$$

zu ersetzen. In (221) ersetze man den Exponenten 200 durch $2a+3$. Am Schluß von 2) muß es heißen:

$$S_j(M) = B\left\{N; \nu+1-\frac{a}{2a+1}(2\nu+1)\right\} + \\ +B\left\{N; 1+\frac{\nu}{R_1}-\frac{a}{2a+1}\cdot\frac{1}{R}\right\}s+BN^{1-A}s,$$

$$\nu+1-\frac{a}{2a+1}(2\nu+1) = \frac{\nu+1+a}{2a+1} \leqslant \frac{2a}{2a+1} = 1-A,$$

$$1+\frac{\nu}{R_1}-\frac{a}{2a+1}\cdot\frac{1}{R} = 1-2^{1-2\nu}\left(\frac{a}{2a+1}-\frac{\nu}{2\nu+1}\right) \\ \leqslant 1-2^{1-2a}\left(\frac{a}{2a+1}-\frac{a-1}{2a-1}\right) = 1-A.$$

Die Ungleichung (233) ist zu ersetzen durch

$$M \leqslant N^{a/(2a+1)}. \tag{233'''}$$

Beim Beweise von Hilfssatz 8.7 ist einmal $\frac{200}{401}$ durch $a/(2a+1)$ zu ersetzen.

Die Bedingungen (244) sind zu ersetzen durch

$$M \leqslant N^{a/(2a+1)}, \quad N_0 < U \leqslant N^{1/2}. \tag{244'''}$$

Beim Beweise von Hilfssatz 8.8 ist einmal $\frac{200}{401}$ durch $a/(2a+1)$ zu ersetzen.

Beim Beweise von Hilfssatz 8.9 ist einmal N^{100} durch N^a zu ersetzen.

3) (228) ist zu ersetzen durch

$$\sum_m = B\exp(A\nu\log^2\nu)\{M; 1-(A\nu^2\log\nu)^{-1}\}\log 2M. \tag{228'''}$$

Die Rechnung von (231) bis (232) ist zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} S_j(M) &= B\{N; \nu+1+a(2a+1)^{-1}(1-9\nu/4)\} \\ &\quad +BN\exp(A\nu\log^2\nu)\{N; -(A\nu^2\log\nu)^{-1}\}s \\ &= B+BN\exp(A\nu\log^2\nu)\{(x; 1/(\nu+1)); -(A\nu^2\log\nu)^{-1}\}s \qquad (197''') \\ &= B+BN\exp(A\nu\log^2\nu)\exp\{-t(A\nu^3\log\nu)^{-1}\}s \\ &= B+BN\exp\{AX\log^2X-t(AX^3\log X)^{-1}\}s \qquad (197''') \\ &= B+BN\exp(-t^{1/4})s = BN\exp(-s^{1/4})s = BNH^{-1} \qquad (\mathbf{192''}, \mathbf{193}, \mathbf{194}). \end{aligned} \tag{320}$$

4) Hilfssatz 8.10 ist zu ersetzen durch den

Hilfssatz 8.10'''. *Es sei $r \geqslant a$, die Ungleichung (258'') sei erfüllt. Dann ist*

$$T(M, U) = BN^2\exp(10r\log^2 r)\{MU; -(114r^2\log r)^{-1}\}s^4. \tag{259'''}$$

Beim Beweise wird (261) ersetzt durch

$$\sum_{n=V}^{V'} e\left(\frac{xw}{n}\right) = B\exp(10r\log^2 r)\{MU; 1-(114r^2\log r)^{-1}\}\log MU, \tag{261'''}$$

und hieraus folgt

$$T(M, U) = BMUs^3(NM^{-1}U^{-1})^2\exp(10r\log^2 r)\{MU; 1-(114r^2\log r)^{-1}\}s,$$

d. h. (259''').

5) Im Wortlaut von Hilfssatz 8.11 ist (264) durch

$$MU \geqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5a) \tag{264'''}$$

zu ersetzen. Im Punkt 2) des Beweises ersetze man dreimal, darunter in (269), die Ungleichung $r \leqslant 78$ durch $r \leqslant 2a$; einmal schreibe man $2a+3$ statt 81. Es ist dann

$$xN^{-1}H^{-1} \leqslant A(MU)^{5a/9} \leqslant AN^{5a/9}, \quad x \leqslant N^{2a/3}.$$

Also gehört N einem der Intervalle (195), (196''') an. Die $2a$ Intervalle (269) vereinigen sich zu dem einen Intervall

$$\tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; (a+1)^{-1}) \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}xN^{-1}H^{-1},$$

dessen linker Endpunkt kleiner als die rechte Seite von (264''') ist.

6) Beim Beweise von Hilfssatz 8.12 braucht die Abschätzung (270) nur unter der Bedingung

$$N_0 \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1}; 9/5a) \tag{271'''}$$

nachgewiesen zu werden. Es sei $\nu = 1$, wenn N dem Intervall (195) angehört. Andernfalls werde ν auf Grund von (196''') oder (197''') definiert. Ferner sei $k = 2$ für $\nu = 1$, $k = \frac{3}{2}$ für $\nu > 1$ und außerdem

$$(272''') \qquad a < r \leqslant n, \qquad \text{wobei} \qquad n = \left[\tfrac{1}{16}\nu^{1/4}s^{1/4}\log^{-k/2}s\right].$$

Die Ungleichung (273) gilt mit demselben Beweis wie in § 8. Aus ihr und Hilfssatz 8.10''' folgt: Unter der Bedingung

$$(279''') \qquad \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5r) \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}\big(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5(r-1)\big); \qquad a < r \leqslant n$$

ist die Behauptung (259''') von Hilfssatz 8.10''' erfüllt. (281) werde durch (281'') ersetzt, und daraus folgt dann (282).

Wegen (282) gehört das Intervall (271''') dem Intervall

$$(280''') \qquad \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5n) \leqslant MU \leqslant \tfrac{1}{4}(xN^{-1}H^{-1};\, 9/5a)$$

an, das durch die Vereinigung der Intervalle (279''') entsteht. Für die M, U mit (271''') gilt also die Abschätzung (259'''), sofern $a < r \leqslant n$ ist. Da die rechts in (259''') stehende Funktion von r mit wachsendem r zunimmt und $MU > N_0$ ist, so hat man

$$(321) \qquad T(M, U) = BN^2\exp(10n\log^2 n)\{N_0;\, -(114n^2\log n)^{-1}\}s^4$$

$$= BN^2\exp\left(10n\log^2 n - \frac{s}{11400n^2\log n\log s}\right)s^4 \qquad (\mathbf{199})$$

$$= BN^2\exp\left(\frac{10}{240\cdot 9}s^{1/3}\log^{2/3}s - \frac{3\cdot 240^2 s\log^{8/3}s}{11400s^{2/3}\log^2 s}\right)s^4 \qquad (\mathbf{318},\ \mathbf{319})$$

$$= BN^2\exp(-s^{1/3})s^4 = BN^2H_4^{-1} \qquad (\mathbf{194});$$

also ist (270) erfüllt.

7) Weiter geht es, wie in den Abschnitten 6)-8) bei der Anwendung der Sätze 3, 4 und 7.

Anwendung von Satz 6. Hier sind gegenüber der Anwendung von Satz 5 nur sehr geringfügige Änderungen anzubringen. (191''') und (228''') werden ersetzt durch

$$(191^{\mathrm{IV}}) \qquad \sum_{m=M}^{M'} e(x/m) = B\exp(60\log^3 r)\{M;\, 1-(19r^3)^{-1}\}\log 2M,$$

$$(228^{\mathrm{IV}}) \qquad \sum_m = B\exp(A\log^3\nu)\{M;\, 1-(A\nu^3)^{-1}\}\log 2M.$$

Die mit (320) beginnende Rechnung sieht jetzt so aus:

$$S_j(M) = B\{N;\, \nu+1+a(2a+1)^{-1}(1-9\nu/4)\} +$$
$$+BN\exp(A\log^3\nu)\{N;\, -(A\nu^3)^{-1}\}s$$
$$= B+BN\exp(A\log^3\nu)\{(x;\, (\nu+1)^{-1});\, -(A\nu^3)^{-1}\}s$$
$$= B+BN\exp(A\log^3\nu)\exp\{-t(A\nu^4)^{-1}\}s$$
$$= B+BN\exp\{A\log^3 X - t(AX^4)^{-1}\}s$$
$$= B+BN\exp(-u^6)s = B+BN\exp(-\log^6 s)s = BNH^{-1}.$$

(259''') und (261''') werden ersetzt durch

$$(259^{\mathrm{IV}}) \qquad T(M, U) = BN^2\exp(60\log^3 r)\{MU;\, -(19r^3)^{-1}\}s^4,$$

$$(261^{\mathrm{IV}}) \qquad \sum_{n=V}^{V'} e(xw/n) = B\exp(60\log^3 r)\{MU;\, 1-(19r^3)^{-1}\}\log MU,$$

und hieraus folgt

$$T(M, U) = BMUs^3(NM^{-1}U^{-1})^2\exp(60\log^3 r)\{MU;\, 1-(19r^3)^{-1}\}s,$$

d. h. (259$^{\mathrm{IV}}$). Endlich ist die mit (321) beginnende Rechnung zu ersetzen durch

$$T(M, U) = BN^2\exp(60\log^3 n)\{N_0;\, -(19n^3)^{-1}\}s^4$$
$$= BN^2\exp\left(60\log^3 n - \frac{s}{1900n^3\log s}\right)s^4$$
$$= BN^2\exp\left(\frac{60}{27}\log^3 s - \frac{240^3 s\log^4 s}{1900 s\log s}\right)$$
$$= BN^2\exp(-\log^3 s)s^4 = BN^2H^{-1}.$$

TIFLIS, DEN 3. MAI 1957
MATHEMATISCHES INSTITUT

Literatur

[1] J. G. van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen*, Mathematische Annalen 84 (1921), 53-79.

[2] H. Davenport, *On some infinite series involving arithmetical functions* (II), The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series 8 (1937), 313-320.

[3] T. M. Flett, *On the function* $\sum_{n=1}^{x}\frac{1}{n}\sin\frac{t}{n}$, Journal of the London Mathematical Society 25 (1950), 5-19.

[4] — *On a coefficient problem of Littlewood and some trigonometrical sums*, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Second Series 2 (1951), 26-52.

[5] Хуа Ло-Кен, *Аддитивная теория простых чисел,* Труды Математического Института имени В. А. Стеклова 22 (1947), 1-179.

[6] L. K. Hua, *An improvement of Vinogradow's mean-value theorem and several applications,* The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series 20 (1949), 48-61.

[7] A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers,* Cambridge 1932.

[8] А. И. Климов, *Улучшенная оценка границы нулей L-функций,* Украинский Математический Журнал 5 (1953), 171-184.

[9] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen,* Leipzig und Berlin 1909.

[10] — *Vorlesungen über Zahlentheorie. I Band. Aus der elementaren und additiven Zahlentheorie,* Leipzig 1927.

[11] — *Vorlesungen über Zahlentheorie. II Band. Aus der analytischen und geometrischen Zahlentheorie,* Leipzig 1927.

[12] T. Tatuzawa, *On the number of the primes in an arithmetic progression,* Japanese Journal of Mathematics 21 (1951), 93-111.

[13] Н. Г. Чудаков, *О функциях $\zeta(s)$ и $\pi(x)$,* Доклады Академии Наук СССР 21 (1938), 425-426.

Auch englisch: N. Tchudakoff, *On the functions $\zeta(s)$ and $\pi(x)$,* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS 21 (1938), 421-422.

[14] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-Function,* Oxford 1951.

[15] A. Walfisz, *Teilerprobleme,* Mathematische Zeitschrift 26 (1927), 66-88.

[16] — *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Vierte Abhandlung,* Mathematische Zeitschrift 35 (1932), 212-229.

[17] — *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Achte Abhandlung,* Труды Тбилисского Математического Института 5 (1938), 181-196.

[18] А. З. Вальфиш, *О функции Эйлера,* Труды Тбилисского Математического Института 19 (1953), 1-31.

Auch englisch: A. Z. Walfisz, *On Euler's function,* American Mathematical Society Translations, Series 2, 4 (1956), 1-29.

[19] A. Walfisz, *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln,* Warszawa 1957.

[20] I. Vinogradow, *Some theorems concerning the theory of primes,* Математический Сборник. Новая серия 2 (1937), 179-195.

[21] И. М. Виноградов, *Метод тригонометрических сумм в теории чисел,* Труды Математического Института имени В. А. Стеклова 23 (1947), 1-109.

Wieder abgedruckt in [24], 237-331.

Auch englisch: I. M. Vinogradov, *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers,* London and New York 1954.

[22] — *Верхняя граница модуля тригонометрической суммы,* Известия Академии Наук СССР. Серия математическая 14 (1950), 199-214.

Wieder abgedruckt in [24], 379-393.

[23] — *Общие теоремы о верхней границе модуля тригонометрической суммы,* Известия Академии Наук СССР. Серия математическая 15 (1951), 109-130.

Wieder abgedruckt in [24], 406-427.

[24] Академик И. М. Виноградов, *Избранные труды,* Москва 1952.

Reçu par la Rédaction le 18. 6. 1957