with a corresponding expression for $\sum_a a^{-(1-s)}$. Finally using (14) in (6) we get the lemma by noting that for s near 1^- we have

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(|1-s|) \quad (\gamma = 0.577\ldots).$$

Proof of Theorem 3. Suppose that (4) is false, i.e. we can assume that $h(D) \ll |D|^{\varepsilon}$ $(0 < \varepsilon < \frac{1}{2})$. Then we have from the Lemma for $\frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1$,

$$|L(s,\chi)| \ll (|D|^{\varepsilon(1-s)} + |D|^{\varepsilon s+\frac{1}{2}-s})\log^2|D| + D^{\varepsilon-s/2}.$$

But clearly,

$$|D|^{\varepsilon(1-s)} \gg |D|^{\varepsilon s+\frac{1}{2}-s}$$

and

$$|D|^{\varepsilon(1-s)} \gg |D|^{\varepsilon-s/2}, \quad \text{if } 0 < \varepsilon < \tfrac{1}{2} \text{ and } \tfrac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1.$$

Hence $|L(s,\chi)| \ll |D|^{\varepsilon(1-s)}\log^2|D|$, thus proving Theorem 3.

References

[1] P. Bateman and E. Grosswald, *On Epstein's zeta function*, Acta Arith. 9 (1964), pp. 365–373.

[2] W. Fluch, *Zur Abschätzung von $L(1, \chi)$*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. II, 1964, pp. 101–102.

[3] E. Landau, *Über die Klassenzahl imaginär-quadratischer Zahlkörper*, Nachr. Gess. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl. II, 1918, pp. 285–295.

[4] H. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory*, 227, Springer Lecture Notes.

[5] L. J. Mordell, *On the Riemann hypothesis and imaginary quadratic fields with a given class number*, J. London Math. Soc. 9 (1934), pp. 289–298.

[6] C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arith. 1 (1936), pp. 83–86.

[7] T. Tatuzawa, *On a theorem of Siegel*, Japan J. Math. 21 (1951), pp. 163–178.

UNIVERSITY OF PORT HARCOURT
P. M. B. 5323, Nigeria
Present address:
22 Albert Grove, Nottingham, England

Received on 12.9.1978
and in revised form on 30.3.1979 (1102)

ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Über die Klassenzahl einfach reeller kubischer Zahlkörper

von

REINHARD SCHERTZ (Köln)

1. Einleitung. Die Ausdeutung einer von H. Hasse und C. Meyer stammenden Klassenzahlformel für einfach reelle kubische Zahlkörper ergab in [5], Satz (3.1) einen Zusammenhang zwischen den Klassenzahlen dieser Körper und zyklischen Untergruppen der Ordnung 9 in Ringdivisorenklassengruppen imaginär-quadratischer Körper. Diese Ergebnisse werden durch die Sätze 1 und 2 der vorliegenden Arbeit wesentlich verallgemeinert. Grundlage hierfür ist unter anderem das Lemma 3 aus [8], dessen Verwendung beim Beweis der Sätze 1 und 2 die rein technischen Voraussetzungen (1.20) in [5], Satz (3.1) überflüssig macht.

Sei Σ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $D < 0$, und für eine natürliche Zahl f bezeichne Ω_f den Ringklassenkörper modulo f über Σ. Ω_f ist im Sinne der Klassenkörpertheorie der Untergruppe H_f^* aller Hauptdivisoren (γ) von Σ zugeordnet, wobei γ alle zu f primen Zahlen aus $\Sigma - \{0\}$ durchläuft, die modulo f zu einer rationalen Zahl kongruent sind (vgl. [7], Abschnitt 3). Jeder einfach reelle kubische Zahlkörper K ist Teilkörper eines geeigneten Ringklassenkörpers, und nach [2] gilt $K \subseteq \Omega_f$ genau dann, wenn die Diskriminante D_K von K die Zerlegung

$$D_K = f_K^2 D \quad \text{mit} \quad f_K \in \mathbf{N} \text{ und } f_K \mid f \tag{1.1}$$

besitzt. Bezeichnet weiterhin $\mathfrak{K}_f^*$ die Ringdivisorenklassengruppe modulo f, d.h. die Faktorgruppe der zu f primen Divisoren von Σ nach der Untergruppe H_f^* und $r_3(f)$ den 3-Rang von $\mathfrak{K}_f^*$, so lautet das Hauptresultat dieser Arbeit:

SATZ 1. *Es sei $D < -4$, und f besitze einen Primteiler p mit $p^2 \nmid f$, $\left(\frac{D}{p}\right) = -1$ und $p+1 \equiv \pm 3 \bmod 9$. Dann gilt:*

(1) *Für jeden einfach reellen kubischen Zahlkörper K der Diskriminante $D_K = f_K^2 D$ mit $p \mid f_K \mid f$ besteht die Äquivalenz*

$$3 \mid h_K c_K(f) \Leftrightarrow 9 \mid |\mathfrak{K}_f^*|.$$

(2) *Es besteht die Implikation*

$$\begin{pmatrix}\text{Für alle einfach reellen}\\ \text{kubischen Zahlkörper } K\\ \text{mit } D_K = f_K^2 D \text{ und } p\,|f_K|f\\ \text{gilt } 3^{r_3(f)}\,|\,h_K c_K(f).\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\mathfrak{K}_f^* \text{ enthält eine zu } \boldsymbol{Z}_9\\ \text{isomorphe Untergruppe.}\end{pmatrix}.$$

Darin bezeichnet h_K die Klassenzahl von K, und $c_K(f)$ ist gleich der in Lemma 1 definierten natürlichen Zahl $c_\psi(f)$, wobei $\langle\psi\rangle$ die $K\Sigma$ entsprechende Untergruppe der Ordnung 3 der Charaktergruppe von $\mathfrak{K}_f^*$ bedeutet.

Bevor wir auf die Frage nach der Umkehrung der Implikation in Satz 1 eingehen, betrachten wir das Kompositum

$$\hat{K} := \prod_K K \tag{1.2}$$

aller einfach reellen kubischen Teilkörper von $\Omega_f \cap \boldsymbol{R}$. Wie in Abschnitt 3 dieser Arbeit gezeigt wird, ist das Produkt

$$E_{\hat{K}}^0 := \prod_K E_K \tag{1.3}$$

der zugehörigen Einheitengruppe modulo Einheitswurzeln direkt, und der Index in der Einheitengruppe von $\hat{K}$ ist eine Potenz von 3:

$$[E_{\hat{K}} : E_{\hat{K}}^0] = 3^m. \tag{1.4}$$

Man hat dann

SATZ 2. *Im Fall $m = 0$ gilt unter der Voraussetzung von Satz 1*

(1) $3^{r_3(f)-1}\,|\,h_K c_K(f)$ *für alle einfach reellen kubischen Zahlkörper K der Diskriminante $f_K^2 D$ mit $p\,|f_K|f$,*

(2) *die Umkehrung der Implikation in Satz* 1.

Der in [5] bewiesene Satz (3.1) ist ein Spezialfall der Implikation (2) in Satz 1. Hierzu beachte man, daß die Bezeichnungen f und p in Satz 1 dieselbe Bedeutung haben wie $f_0 f$ und $f = p$ in [5] und daß unter den Voraussetzungen von Satz (3.1) in [5] die Existenz zyklischer Untergruppen der Ordnung 9 in $\mathfrak{K}_{f_0}^*$ und $\mathfrak{K}_{f_0 p}^*$ gleichbedeutend ist.

Abschließend sei noch auf die ähnlichen, jedoch von dieser Arbeit unabhängigen Ergebnisse von Gerth in [1] hingewiesen. Während in der vorliegenden Arbeit auf analytischem Wege ein Zusammenhang zwischen der Teilbarkeit von h_K durch Potenzen von 3 und zyklischen Untergruppen der Ordnung 9 in Ringdivisorenklassengruppen von Σ bewiesen wird, gelangt Gerth in [1] rein algebraisch zu einer expliziten Beziehung zwischen den 3-Rängen der Klassengruppen von K und Σ (K und Σ haben die hier angegebene Bedeutung.). Man vergleiche dazu etwa das Theorem 3.5 in [1].

2. Die Klassenzahlformel einfach reeller kubischer Zahlkörper. Da sich in jeder Konjugationsklasse einfach reeller kubischer Zahlkörper genau ein reeller Körper befindet, bedeutet es keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir uns von nun ab auf die Betrachtung reeller solcher Körper beschränken. Zwischen diesen und kubischen Ringklassencharakteren imaginär-quadratischer Zahlkörper besteht der folgende Zusammenhang.

Sei χ ein kubischer Charakter von $\mathfrak{K}_f^*$. Dann ist der maximal reelle Teilkörper K_χ der der Untergruppe $\mathfrak{U}_\chi = \{\mathfrak{k} \in \mathfrak{K}_f^* \mid \chi(\mathfrak{k}) = 1\}$ zugeordneten Erweiterung N_χ von Σ ein einfach reeller kubischer Zahlkörper der Diskriminante $D_{K_\chi} = f_{K_\chi}^2 D$. Die dabei auftretende natürliche Zahl f_{K_χ} ist zugleich der Führer von χ:

$$f_\chi = f_{K_\chi}. \tag{2.1}$$

Für zwei kubische Charaktere χ, ψ gilt dabei

$$K_\chi = K_\psi \Leftrightarrow \langle\chi\rangle = \langle\psi\rangle, \tag{2.2}$$

und die Zuordnung $\langle\chi\rangle \mapsto K_\chi$ ist eine Bijektion zwischen zyklisch Untergruppen der Ordnung 3 der Charaktergruppe von $\mathfrak{K}_f^*$ und reellen, einfach reellen kubischen Zahlkörpern K der Diskriminante $f_K^2 D$ mit $f_K|f$.

Im Zusammenhang mit der Klassenzahlformel einfach reeller kubischer Zahlkörper ist es nötig, neben $\mathfrak{K}_f^*$ die Ringidealklassengruppe $\mathfrak{K}_f$ zu betrachten (vgl. [7], Abschnitt 3). $\mathfrak{K}_f^*$ und $\mathfrak{K}_f$ sind kanonisch isomorph vermöge (3.5) in [7]. Einander entsprechende Klassen werden mit $\mathfrak{k}^*$ und $\mathfrak{k}$ bezeichnet. Sei χ ein Charakter von $\mathfrak{K}_f^*$. Dann ist vermöge $\chi'(\mathfrak{k}) := \chi(\mathfrak{k}^*)$ auf $\mathfrak{K}_f$ ebenfalls ein Charakter definiert, und die Zuordnung $\chi \mapsto \chi'$ ist ein Isomorphismus. Weiterhin gehört zu χ auch ein Charakter $\hat{\chi}$ von $\mathfrak{K}_{f_\chi}^*$ durch die Festsetzung $\hat{\chi}(\mathfrak{k}_{f_\chi}^*) := \chi(\mathfrak{k}_f^*)$ für $\mathfrak{K}_{f_\chi}^* \ni \mathfrak{k}^* \subseteq \mathfrak{k}_f^* \in \mathfrak{K}_f^*$, wobei $f_\chi|f$ zu beachten ist. Zwischen χ, χ' und $\hat{\chi}$ soll im folgenden nicht unterschieden werden.

Für den einem kubischen Charakter χ von $\mathfrak{K}_f^*$ zugeordneten einfach reellen kubischen Zahlkörper K_χ hat man nun nach [4] die Klassenzahlformel

$$\log \varepsilon_\chi^{h_\chi} = \sum_{\mathfrak{k} \in \mathfrak{K}_{f_\chi}} -\bar{\chi}(\mathfrak{k}) \log(D(\mathfrak{k})). \tag{2.3}$$

Dabei bedeuten $\varepsilon_\chi > 1$ und h_χ die normierte Grundeinheit und Klassenzahl von K_χ. $D(\mathfrak{k})$ bezeichnet die Modulnormfunktion; sie ist mit einem beliebigen Vertreter $\mathfrak{a} \in \mathfrak{k}$ erklärt als die positive reelle Wurzel

$$D(\mathfrak{k}) = \sqrt[24]{\delta(\mathfrak{a})^{12}\,|\Delta(\mathfrak{a})|^2}. \tag{2.4}$$

Hierin bedeutet $\delta(\mathfrak{a})$ den Inhalt einer Grundmasche des $\boldsymbol{Z}$-Gitters $\mathfrak{a}$, und Δ ist die Diskriminante aus der Theorie der Modulfunktionen (vgl. [5], Abschnitt 1). In (2.3) kann man nun die Summation über $\mathfrak{K}_{f_\chi}$ durch die Summation über $\mathfrak{K}_f$ ersetzen. Nach dem Lemma 3 in [8] gilt nämlich

LEMMA 1. *Für einen kubischen Charakter χ von $\mathfrak{K}_f^*$ ist*

$$\sum_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{K}_{f_\chi}} -\bar{\chi}(\mathfrak{k})\log\bigl(D(\mathfrak{k})\bigr) = c_\chi(f)\sum_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{K}_f} -|\chi|(\mathfrak{k})\log\bigl(D(\mathfrak{k})\bigr)$$

mit einer natürlichen Zahl $c_\chi(f)$, die in Abhängigkeit von der Primfaktorzerlegung des Kofaktors von f_χ in f, $f = \bigl(\prod_q q^{n_q}\bigr)f_\chi$, gegeben ist durch

$$c_\chi(f) = \prod_q G(q^{n_q}, \chi)$$

mit

$$G(q^n, \chi) = \begin{cases} \dfrac{q^n-1}{q-1}, & \textit{falls} \quad q\,|\,f_\chi,\ n\geqslant 1 \\[2ex] \dfrac{1}{q-1}\Bigl((q^n-1)g_\chi-(q^n-q)+\Bigl(\dfrac{D}{q}\Bigr)(q^{n-1}-1)\Bigr), & \textit{falls} \quad q\nmid f_\chi,\ n\geqslant 1, \\[2ex] 1, & \textit{falls} \quad n = 0 \end{cases}$$

und

$$g_\chi = \begin{cases} q+2, & \textit{falls} \quad \Bigl(\dfrac{D}{q}\Bigr) = 1,\ q = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}},\ \chi(\mathfrak{q}) \neq 1, \\[2ex] q-1, & \textit{falls} \quad \Bigl(\dfrac{D}{q}\Bigr) = 1,\ q = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}},\ \chi(\mathfrak{q}) = 1, \\[2ex] q, & \textit{falls} \quad \Bigl(\dfrac{D}{q}\Bigr) = 0, \\[2ex] q+1, & \textit{falls} \quad \Bigl(\dfrac{D}{q}\Bigr) = -1, \end{cases}$$

wobei $q = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{q}}$ die Zerlegung von q in Σ bedeutet.

Mit Rücksicht auf Lemma 1 wird nun aus (2.3)

$$\log \varepsilon_\chi^{h_\chi c_\chi(f)} = \sum_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{K}_f} -\bar{\chi}(\mathfrak{k})\log\bigl(D(\mathfrak{k})\bigr) \tag{2.5}$$

für jeden kubischen Charakter χ von $\mathfrak{K}_f^*$.

Für das folgende sei X_f die von den kubischen Charakteren von $\mathfrak{K}_f^*$ erzeugte Gruppe, U eine echte Untergruppe von X_f, $\chi_0 \in X_f - U$ und $U_0 := \langle U, \chi_0\rangle$. Dann ist

$$|U_0| = 3\,|U|, \tag{2.6}$$

und für die Untergruppen

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \{\mathfrak{k}\in\mathfrak{K}_f \mid \chi(\mathfrak{k}) = 1 \text{ für alle } \chi\in U\}, \\ \mathfrak{U}_0 &= \{\mathfrak{k}\in\mathfrak{K}_f \mid \psi(\mathfrak{k}) = 1 \text{ für alle } \psi\in U_0\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

von $\mathfrak{K}_f$ gilt

$$[\mathfrak{K}_f : \mathfrak{U}] = |U|, \qquad [\mathfrak{U} : \mathfrak{U}_0] = 3. \tag{2.8}$$

Hiernach ergibt sich aus (2.5) unter Beachtung der bekannten Orthogonalitätsrelationen für Charaktere einer endlichen abelschen Gruppe

$$\sum_{\chi\in U}\log \varepsilon_{\chi_0\chi}^{h_{\chi_0\chi}c_{\chi_0\chi}(f)} = |U|\sum_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{U}} -\bar{\chi}_0(\mathfrak{k})\log\bigl(D(\mathfrak{k})\bigr). \tag{2.9}$$

Zur weiteren Umformung der rechten Seite beachte man, daß $\chi_0|\mathfrak{U} \neq 1$ ist und somit eine Klasse $\mathfrak{k}_\varrho \in \mathfrak{U}$ existiert mit

$$\chi_0(\mathfrak{k}_\varrho) = \varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}. \tag{2.10}$$

Es ist dann $\mathfrak{k}_\varrho \notin \mathfrak{U}_0$, und wegen $[\mathfrak{U} : \mathfrak{U}_0] = 3$ gilt

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{k}_\varrho\mathfrak{U}_0 \cup \mathfrak{k}_\varrho^{-1}\mathfrak{U}_0 \cup \mathfrak{U}_0, \tag{2.11}$$

wobei $\cup$ die disjunkte Vereinigung bedeutet. Spaltet man nun die Summation auf der rechten Seite in (2.9) entsprechend dieser Zerlegung auf, so wird daraus

$$|U|\Bigl(-\bar{\varrho}\sum_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{k}_\varrho\mathfrak{U}_0}\log\bigl(D(\mathfrak{h})\bigr) - \varrho\sum_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{k}_\varrho^{-1}\mathfrak{U}_0}\log\bigl(D(\mathfrak{h})\bigr) - \sum_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{U}_0}\log\bigl(D(\mathfrak{h})\bigr)\Bigr). \tag{2.12}$$

Da die Inverse jeder Ringklasse $\mathfrak{h}\in\mathfrak{K}_f$ mit der zu $\mathfrak{h}$ konjugiertkomplexen Klasse $\bar{\mathfrak{h}}$ übereinstimmt und nach Definition von $D(\cdot)$ notwendig $D(\mathfrak{h}) = D(\bar{\mathfrak{h}})$, also $D(\mathfrak{h}) = D(\mathfrak{h}^{-1})$ gilt, ist in (2.12) die Summe über $\mathfrak{h}\in\mathfrak{k}_\varrho\mathfrak{U}_0$ gleich der Summe über $\mathfrak{h}\in\mathfrak{k}_\varrho^{-1}\mathfrak{U}_0$. Aus (2.9) ergibt sich hiernach

$$\sum_{\chi\in U}\log \varepsilon_{\chi_0\chi}^{h_{\chi_0\chi}c_{\chi_0\chi}(f)} = |U|\sum_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{U}_0}\Bigl(\log\bigl(D(\mathfrak{k}_\varrho\mathfrak{k})\bigr)-\log\bigl(D(\mathfrak{k})\bigr)\Bigr), \tag{2.13}$$

und durch Entlogarithmieren entsteht daraus die Klassenzahlformel

$$\prod_{\chi\in U}\varepsilon_{\chi_0\chi}^{h_{\chi_0\chi}c_{\chi_0\chi}(f)/|U|} = \prod_{\mathfrak{k}\in\mathfrak{U}_0}\frac{D(\mathfrak{k}_\varrho\mathfrak{k})}{D(\mathfrak{k})}, \tag{2.14}$$

worin $\mathfrak{k}_\varrho$ irgendeine Klasse aus $\mathfrak{U}$ mit $\chi_0(\mathfrak{k}_\varrho) = \varrho$ ist. Die 24-sten Potenzen der Faktoren auf der rechten Seite in (2.14) liegen nach [7], Abschnitt 6 in Ω_f, und analog zu der in [7], Abschnitt 5 durchgeführten Rechnung läßt sich unter Beachtung von Satz (6.1) aus [7] das Produkt in eine Relativnorm verwandeln:

$$\prod_{\chi\in U}\varepsilon_{\chi_0\chi}^{h_{\chi_0\chi}c_{\chi_0\chi}(f)24/|U|} = \mathrm{N}_\Phi^{\Omega_f}\Bigl(\Bigl(\frac{D(\mathfrak{k}_\varrho\mathfrak{h})}{D(\mathfrak{h})}\Bigr)^{24}\Bigr). \tag{2.15}$$

Dabei ist $\mathfrak{h}$ irgendeine Klasse aus $\mathfrak{U}_0$, und Φ bezeichnet den der Untergruppe $\mathfrak{U}_0$ entsprechenden Teilkörper von Ω_f, über dem Ω_f mit Rücksicht auf (2.8) den Grad

$$[\Omega_f : \Phi] = [\mathfrak{K}_f : \mathfrak{U}_0] = 3\,\frac{|\mathfrak{K}_f|}{|U|} \tag{2.16}$$

hat.

3. Beweis der Sätze 1 und 2. Für $|\mathfrak{K}_f^*|$ hat man im Fall $D < -4$ nach [3] die Formel

$$|\mathfrak{K}_f^*| = h_\Sigma f \prod_{q|f}\left(1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q}\right), \tag{3.1}$$

wobei h_Σ die Klassenzahl von Σ bedeutet, und das Produkt über alle Primteiler q von f zu erstrecken ist. Hiernach ist unter der Voraussetzung von Satz 1 über D und p

$$|\mathfrak{K}_f^*| = (p+1)\,|\mathfrak{K}_{f/p}^*| \tag{3.2}$$

und daher wegen $p+1 \equiv \pm 3 \bmod 9$ notwendig $|\mathfrak{K}_f^*|$ durch eine um Eins höhere Potenz von 3 teilbar als $|\mathfrak{K}_{f/p}^*|$.

Wir betrachten zunächst den Fall $r_3(f) = r_3(f/p)$. In diesem Fall sind die Führer aller kubischen Charaktere von $\mathfrak{K}_f^*$ Teiler von f/p. Im Hinblick auf (2.1) existiert daher kein einfach reeller kubischer Zahlkörper der Diskriminante $D_K = f_K^2 D$ mit $p\,|\,f_K|f$, und die in Satz 1 behauptete Äquivalenz sowie alle Behauptungen von Satz 2 sind trivialerweise erfüllt. Ebenso ist im vorliegenden Fall die Implikation in Satz 1 richtig, da wegen (3.2) und $r_3(f) = r_3(f/p)$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung 9 in $\mathfrak{K}_f^*$ existiert.

Im Fall $r_3(f) \neq r_3(f/p)$ benötigen wir die Klassenzahlformel (2.15). Zunächst ist hier genauer

$$r_3(f) = r_3(f/p)+1. \tag{3.3}$$

Dies folgt aus (3.2) unter Beachtung von $p+1 \equiv \pm 3 \bmod 9$ und der Tatsache, daß $\mathfrak{K}_{f/p}^*$ ein epimorphes Bild von $\mathfrak{K}_f^*$ ist. Wegen (3.3) läßt sich dann X_f zerlegen in der Form

$$X_f = U_1 \times \langle \chi_0 \rangle, \tag{3.4}$$

wobei U_1 die Untergruppe aller $\chi \in X_f$ mit $f_\chi | (f/p)$ ist und $p\,|\,f_{\chi_0}|f$ für den Führer des Charakters χ_0 gilt. Daraus folgt dann weiter noch

$$p\,|\,f_{\chi_0\chi}|f \quad \text{für alle } \chi \in U_1. \tag{3.5}$$

Sei nun U eine Untergruppe von U_1, $U_0 := \langle U, \chi_0 \rangle$, und es seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_0$ die hierzu unter (2.7) definierten Untergruppen von $\mathfrak{K}_f$. Wie in [5] betrachten wir nun weiter die Untergruppe

$$\mathfrak{G} := \{\mathfrak{h} \in \mathfrak{K}_f \,|\, \mathfrak{h}^* \subseteq \mathfrak{n}_{f/p}^*\} \tag{3.6}$$

aller Klassen aus $\mathfrak{K}_f$, deren zugeordnete Divisorenklasse in der Hauptklasse von $\mathfrak{K}_{f/p}^*$ enthalten ist. Für alle $\chi \in U$ gilt dann $\chi|\mathfrak{G} = 1$ wegen $f_\chi|(f/p)$, und somit ist

$$\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{U}. \tag{3.7}$$

Andererseits ist $\chi_0|\mathfrak{G} \neq 1$, da sonst χ_0 schon ein Charakter modulo f/p wäre, was aber wegen $p \nmid (f/p)$ und $p\,|\,f_{\chi_0}$ unmöglich ist. Also hat

$$\mathfrak{G}' := \{\mathfrak{h} \in \mathfrak{G} \,|\, \chi_0(\mathfrak{h}) = 1\} \tag{3.8}$$

den Index 3 in $\mathfrak{G}$, und es gibt eine Klasse $\mathfrak{k} \in \mathfrak{G}$ mit $\chi_0(\mathfrak{k}) = \varrho$, für die gilt

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{k}\mathfrak{G}' \cup \mathfrak{k}^{-1}\mathfrak{G}' \cup \mathfrak{G}'. \tag{3.9}$$

Wählt man nun in (2.15) $\mathfrak{k}_\varrho = \mathfrak{k}$ und $\mathfrak{h} \in \mathfrak{G}'$ und bildet dann auf beiden Seiten das Produkt über alle $\mathfrak{h} \in \mathfrak{G}'$, so entsteht die Klassenzahlformel

$$\Bigl(\prod_{\chi\in U} \varepsilon_{\chi_0\chi}^{h_{\chi_0\chi}c_{\chi_0\chi}(f)}\Bigr)^{24|\mathfrak{G}'|/|U|} = \mathsf{N}_\Phi^{\Omega_f}(\Lambda) \quad \text{mit} \quad \Lambda = \prod_{\mathfrak{h}\in\mathfrak{G}'}\left(\frac{D(\mathfrak{k}\mathfrak{h})}{D(\mathfrak{h})}\right)^{24}. \tag{3.10}$$

Der hierin auftretende Index von $\mathfrak{G}'$ ergibt sich aus (3.1) zu

$$|\mathfrak{G}'| = \frac{|\mathfrak{G}|}{3} = \frac{|\mathfrak{K}_f^*|}{3\,|\mathfrak{K}_{f/p}^*|} = \frac{p+1}{3} \tag{3.11}$$

und ist demzufolge wegen $p+1 \equiv \pm 3 \bmod 9$ nicht durch 3 teilbar. Ganz analog wie in [5], S. 219, 220 zeigt man nun gestützt auf Identitäten aus der Theorie der Modulfunktionen mittels komplexer Multiplikation, daß Λ von der Form

$$\Lambda = p^{-12p}\lambda^9 \tag{3.12}$$

ist mit einer reellen Zahl λ, für die gilt

$$\lambda^3 \in \Omega_f \quad \text{und} \quad \lambda \in \Omega_{3f}. \tag{3.13}$$

Dabei beachte man, daß die Zahlen f/p und p in dieser Arbeit dieselbe Bedeutung haben wie f_0 und $f = p$ in [5]. Hiernach ergibt sich wie in [5], S. 221 aus (3.10) mit Rücksicht auf (2.16) die Beziehung

$$\Bigl(\prod_{\chi\in U} \varepsilon_{\chi_0\chi}^{h_{\chi_0\chi}c_{\chi_0\chi}(f)}\Bigr)^{8|\mathfrak{G}'|/3|U|} = \left(\sqrt[3]{p}\right)^{-4|\mathfrak{K}_f^*|/3|U|}\cdot\lambda' \tag{3.14}$$

mit einer Zahl $\lambda' \in \Omega_{3f}$ und einer komplexen dritten Wurzel aus p.

Zur Ausdeutung von (3.14) benötigen wir nun das

Lemma 2. *Sei Ω eine abelsche Erweiterung von Σ und $\Sigma \neq Q(\sqrt{-3})$. K sei ein Teilkörper von Ω, der über Q von ungeradem Grad ist, und a sei ein Element aus K. Dann hat $X^3 - a$ genau dann eine Wurzel in K, wenn $X^3 - a$ eine Wurzel in Ω hat.*

Beweis. Offenbar genügt es, zu zeigen

(3.15) $(X^3-a$ hat eine Wurzel in $\Omega) \Rightarrow (X^3-a$ hat eine Wurzel in $K)$,

und dies ergibt sich so: Zunächst gilt

$$(3.16)\qquad \varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \notin K\Sigma$$

wegen $\Sigma \neq \boldsymbol{Q}(\sqrt{-3})$ und $[K\Sigma:\Sigma] = [K:\boldsymbol{Q}] \equiv 1 \bmod 2$. Hat nun X^3-a eine Wurzel in Ω, so ist, da Ω/Σ abelsch ist, der Zerfällungskörper Z von X^3-a über $K\Sigma$ in Ω enthalten und damit

$$(3.17)\qquad Z/K\Sigma \text{ abelsch.}$$

Hätte nun X^3-a keine Wurzel in K, so hätte X^3-a wegen $[K\Sigma:K] = 2$ auch keine Wurzel in $K\Sigma$. Wegen (3.16) wäre dann aber $Z/K\Sigma$ nicht abelsch, im Widerspruch zu (3.17). Also hat X^3-a eine Wurzel in K, und (3.15) ist bewiesen.

Wir können nun den Beweis der Sätze 1 und 2 im Fall $r_3(f) \neq r_3(f/p)$ beenden. Dazu wählen wir zunächst $U = \{1\}$ in (3.14) und erhalten

$$(3.18)\qquad \varepsilon_{\chi_0}^{h_{\chi_0}c_{\chi_0}(f)8|\mathfrak{G}'|/3} = \left(\sqrt[3]{p}\right)^{-4|\mathfrak{K}_f^*|/3}\cdot\lambda'.$$

Wegen $|\mathfrak{G}'| = (p+1)/3 \not\equiv 0 \bmod 3$ schließt man hieraus gestützt auf Lemma 2

$$(3.19)\qquad \begin{aligned} 3\,|\,h_{\chi_0}c_{\chi_0}(f) &\Leftrightarrow \varepsilon_{\chi_0}^{h_{\chi_0}c_{\chi_0}(f)8|\mathfrak{G}'|/3} \in K_{\chi_0}\\ &\Leftrightarrow \varepsilon_{\chi_0}^{h_{\chi_0}c_{\chi_0}(f)8|\mathfrak{G}'|/3} \in \Omega_{3f}\\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{p^{|\mathfrak{K}_f^*|/3}} \in \boldsymbol{Q}\\ &\Leftrightarrow 9\,\big|\,|\mathfrak{K}_f^*|. \end{aligned}$$

Damit ist die erste Aussage von Satz 1 beweisen, weil man in (3.4) als χ_0 jeden kubischen Charakter ψ wählen kann, der der Beingung $p\,|f_\psi|f$ genügt.

Zum Nachweis der zweiten Aussage von Satz 1 setzen wir $U = U_1$. Im Hinblick auf (3.4) ist dann

$$(3.20)\qquad 3\,|U| = 3^{r_3(f)}.$$

Weiterhin entsprechen, wie aus Abschnitt 2 und (3.5) hervorgeht, die Charaktere aus $\chi_0 U$ bijektiv den reellen, einfach reellen kubischen Zahlkörpern der Diskriminante $f_K^2 D$ mit $p\,|f_K|f$. Unter der Voraussetzung im zweiten Teil von Satz 1 ist daher mit Rücksicht auf (3.20) die linke Seite in (3.14) in Ω_{3f} gelegen und damit

$$\left(\sqrt[3]{p}\right)^{-4|\mathfrak{K}_f^*|/3^{r_3(f)}} \in \Omega_{3f}.$$

Dies hat aber nach Lemma 2

$$\left(\sqrt[3]{p}\right)^{-4|\mathfrak{K}_f^*|/3^{r_3(f)}} \in \boldsymbol{Q}$$

und weiter $3^{r_3(f)+1}\,\big|\,|\mathfrak{K}_f^*|$ zur Folge. $\mathfrak{K}_f^*$ enthält also eine zyklische Untergruppe der Ordnung 9. Damit ist Satz 1 beweisen.

Die vorstehende Schlußweise läßt sich analog zum Fall $U = \{1\}$ umkehren, wenn man voraussetzt, daß die Einheiten $\varepsilon_{\chi_0\chi}$, $\chi \in U_1$, Elemente eines Grundeinheitensystems des Kompositums $\hat{K}$ sind. Da dies unter der Voraussetzung $m = 0$ der Fall ist, haben wir die in Satz 2 behauptete Umkehrung der Implikation von Satz 1 bewiesen. Die erste Aussage von Satz 2 ergibt sich genauso, wenn man beide Seiten in (3.14) in die dritte Potenz erhebt, und beachtet, daß dann die rechte Seite in Ω_{3f} liegt.

Es fehlt nun noch der Beweis von (1.3) und (1.4). Sei dazu $\mathscr{H}$ ein Vertretersystem von $X_f - \{1\}$ bezüglich der Äquivalenzrelation $\psi \sim \psi' :\Leftrightarrow \langle\psi\rangle = \langle\psi'\rangle$. Dann sind wegen (2.2) die Körper K_ψ, $\psi \in \mathscr{H}$, gerade die verschiedenen reellen, einfach reellen kubischen Teilkörper von Ω_f, und es ist

$$(3.21)\qquad \hat{K} = \prod_{\psi\in\mathscr{H}} K_\psi.$$

Wir benötigen nun die in [6], Satz (2.1) bewiesene Klassenzahlformel. Sie lautet für die Körper $\hat{K}$ und K_ψ, $\psi \in \mathscr{H}$:

$$(3.22)\qquad M_{\hat{K}} h_{\hat{K}} = \Big[E_{\hat{K}} : \prod_{\psi\in\mathscr{H}} F_\psi\Big],$$

$$(3.23)\qquad M_{K_\psi} h_{K_\psi} = [E_{K_\psi} : F_\psi]$$

mit gewissen, nur von ψ abhängigen Einheitengruppen F_ψ und rationalen Zahlen $M_{\hat{K}}$, M_{K_ψ}. Da das Produkt über die F_ψ dabei modulo Einheitswurzeln direkt ist, folgt mit Rücksicht auf (3.23), daß auch das Produkt über die E_{K_ψ} modulo Einheitswurzeln direkt ist: Denn ist $\prod_{\psi\in\mathscr{H}}\varepsilon_\psi$ mit $\varepsilon_\psi \in E_{K_\psi}$ eine Einheitswurzel, so ist auch $\prod_{\psi\in\mathscr{H}} \varepsilon_\psi^e$ mit $e = \prod_{\psi\in\mathscr{H}} [E_{K_\psi} : F_\psi]$ eine Einheitswurzel. Da nun die ε_ψ^e bis auf einen Einheitswurzelfaktor in F_ψ liegen, und das Produkt über die F_ψ modulo Einheitswurzeln direkt ist, muß dabei jeder Faktor ε_ψ^e und damit ε_ψ eine Einheitswurzel sein, und (1.3) ist bewiesen. Die Kombination von (3.22) und (3.23) liefert nun weiter die Formel

$$(3.24)\qquad \frac{M_{\hat{K}}}{\prod_{\psi\in\mathscr{H}} M_{K_\psi}}\;\frac{h_{\hat{K}}}{\prod_{\psi\in\mathscr{H}} h_{K_\psi}} = \Big[E_{\hat{K}} : \prod_{\psi\in\mathscr{H}} E_{K_\psi}\Big],$$

wobei aus Satz (2.1) in [6] noch genauer

$$\frac{M_{\hat{K}}}{\prod\limits_{\psi\in\mathscr{H}} M_{K_\psi}} = n^{(n-3)/4}, \quad n = [\hat{K}:\boldsymbol{Q}], \tag{3.25}$$

folgt. Der Index $i_{\hat{K}} := [E_{\hat{K}} : \prod_{\psi\in\mathscr{H}} E_{K_\psi}]$ ist also endlich. Daß $i_{\hat{K}}$ sogar eine Dreierpotenz ist, ergibt sich durch den Nachweis, daß für jedes $\vartheta \in E_{\hat{K}} - \prod_{\psi\in\mathscr{H}} E_{K_\psi}$ der Exponent e von ϑ bezüglich der Untergruppe $\prod_{\psi\in\mathscr{H}} E_{K_\psi}$ eine Dreierpotenz ist. Wegen $E_{K_\psi} = \langle \pm\varepsilon_\psi \rangle$ hat man zunächst

$$\vartheta^e = \pm \prod_{\psi\in\mathscr{H}} \varepsilon_\psi^{a_\psi} \quad \text{mit} \quad a_\psi \in \boldsymbol{Z},\ \mathrm{ggT}(\{a_\psi \mid \psi \in \mathscr{H}\}) = 1, \tag{3.26}$$

und die Bildung der Relativnorm nach K_λ, $\lambda \in \mathscr{H}$, liefert

$$\left(\mathsf{N}_{K_\lambda}^{\hat{K}}(\vartheta)\right)^e = \mathsf{N}_{K_\lambda}^{\hat{K}}(\vartheta^e) = \pm \varepsilon_\lambda^{a_\lambda[\hat{K}:K_\lambda]}. \tag{3.27}$$

Andererseits ist

$$\mathsf{N}_{K_\lambda}^{\hat{K}}(\vartheta) = \pm \varepsilon_\lambda^{b_\lambda} \quad \text{mit} \quad b_\lambda \in \boldsymbol{Z}, \tag{3.28}$$

und der Vergleich von (3.27) und (3.28) ergibt

$$e b_\lambda = a_\lambda [\hat{K}:K_\lambda] \quad \text{für alle } \lambda \in \mathscr{H}. \tag{3.29}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (3.26) schließlich $e \,\Big|\, \dfrac{[\hat{K}:\boldsymbol{Q}]}{3}$. Also ist e eine Dreierpotenz, und (1.4) ist bewiesen.

References

[1] F. Gerth, *Ranks of 3-class groups of non-Galois cubic fields*, Acta Arith. 30 (1976) S. 307–322.

[2] H. Hasse, *Arithmetische Theorie der kubischen Zahlkörper auf klassenkörpertheoretischer Grundlage*, Math. Zeitschr. 31 (1930), S. 565–582.

[3] S. Lang, *Elliptic functions*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.

[4] C. Meyer, *Die Berechnung der Klassenzahl abelscher Körper über quadratischen Zahlkörpern*, Berlin 1957.

[5] R. Schertz, *Arithmetische Ausdeutung der Klassenzahlformel für einfach reelle kubische Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 41 (1974), S. 211–223.

[6] — *Die Klassenzahl der Teilkörper abelscher Erweiterungen imaginär-quadratischer Zahlkörper II*, J. Reine Angew. Math. 296 (1977), S. 58–79.

[7] R. Schertz, *L-Reihen in imaginär-quadratischen Zahlkörpern und ihre Anwendung auf Klassenzahlprobleme bei quadratischen und biquadratischen Zahlkörpern, I, II*, ibid. 262/63 (1973), S. 120–133; 270 (1974), S. 195–212.

[8] — *Zur Theorie der Ringklassenkörper über imaginär-quadratischen Zahlkörpern*, Journal of Number Theory 10 (1978), S. 70–82.

Eingegangen am 2.10.1978
und in revidierter Form am 2.3.1979 (1105)