[3] Marie-José Bertin, *De nouveaux ensembles fermés de nombres algébriques*, Séminaire Delange–Pisot–Poitou 17 (1975–1976), Exp. No 31.

[4] Françoise Bertrandias, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques*, Bull. Soc. Math. France — Mémoire 4 (1965).

[5] Christiane Chamfy, *Fonctions méromorphes dans le cercle unité et leurs séries de Taylor*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 8 (1958), p. 211–261.

[6] A. Connes, *Localisation de zéros de polynômes*, Séminaire Delange–Pisot–Poitou, 12 (1970–1971), Exp. No 18.

[7] — *Ordres faibles et localisation de zéros de polynômes*, Séminaire Choquet 9 (1969–1970), Exp. No 5.

[8] Annette Decomps-Guilloux, *Généralisation des nombres de Salem aux adèles*, Acta Arith. 16 (1970), p. 265–314.

[9] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé de nombres algébriques*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 72 (1955), p. 69–92.

[10] J. B. Kelly, *A closed set of algebraic integers*, Amer. J. Math. 72 (1950), p. 565–572.

[11] C. Pisot, *Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 3ème série, 81 (1964), p. 165–188.

[12] — *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*, Séminaire de Math. Sup. Montréal été 1963, Presses Univ. Montréal, 1966.

[13] R. Salem, *A remarquable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan*, Duke Math. Journ. 11 (1944), p. 103–109.

[14] I. Schur, *Über Potenzreihen die im innern des Einheitskreises besshränkt sind*, Journ. Reine Angew. Math. 147 (1917), p. 205–232.



*Reçu le 12. 4. 1978*

*et dans la forme modifiée le 16. 12. 1978* (1014)


---


ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)


# Facteurs premiers d'entiers en progression arithmétique

par


M. Langevin (Lozère)


**1. Historique et résultats.** Une application simple de la méthode de Baker est donnée par l'énoncé suivant où $P$ désigne la fonction plus grand facteur premier:

THÉORÈME 0. *Pour tout réel* $t < 1$,

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{0<n'-n<n^t} P(nn')/\log\log n\Big) > 0.$$

Démonstration. Ecrire l'égalité du quotient $n'/n$ avec son expression comme produit de puissances de nombres premiers, former le logarithme des deux membres et appliquer la méthode de Baker (par exemple, voir [5]).

Jointe à des arguments arithmétiques et combinatoires, cette technique a permis à Ramachandra, Shorey, Tijdeman (séparément ou collectivement) d'étudier les facteurs premiers d'entiers consécutifs. Le but de cet article est d'établir un théorème global contenant leurs résultats et les généralisant aux entiers d'une progression arithmétique.

Notations: la lettre $p$ est réservée aux nombres premiers; on définit les fonctions $\pi$ et $\omega$ par $\pi(n) = \sum_{p\leqslant n} 1$, $\omega(n) = \sum_{p\mid n} 1$; si $X$ est un ensemble fini d'entiers, on écrit $P(X)$, $\omega(X)$, ... pour $P(\prod_{x\in X} x)$, $\omega(\prod_{x\in X} x)$, ...; on note $\log_2$, $\log_3$ pour loglog, logloglog; on abrège cardinal en card; $(a, b) = \sup(d, d|a, d|b)$.

THÉORÈME 1 (Théorème global). *Soient des réels* $t_1 < 1$, $t_2 > 0$, $t_3 < 1$, $t_4 > 1$, $t_5 > 0$, $t_6 > 0$. *Soient* $n, k, a$ *des entiers tels que*

(1) $$n > 1,\quad a \geqslant 1,\quad (n, a) = 1,\quad k \geqslant 2,\quad a < n^{t_1}.$$

*Aucune partie* $X$ *de l'ensemble* $\{n+a, n+2a, \ldots, n+ka\}$ *ne peut vérifier simultanément:*

(2) $$\omega(X) \leqslant j \operatorname{card} X,$$

(3) $$\pi(P(X)) \leqslant j\cdot k^{t_2},$$

(4) $$\operatorname{card} X \geqslant \xi$$

*lorsque les paramètres $j \geqslant 1$ et $\xi \geqslant 2$ vérifient la condition*

(5) $\log n \geqslant C\cdot j^{cj}\cdot \log k \cdot \inf(k^{1/3}, k/\xi)$, *avec, de plus, si $j > t_3+1$,*

(6) $$k/\xi \leqslant t_4\cdot j^{t_5 cj}\cdot(\log k)^{t_6}\cdot \exp\left((\log k)^{(j-t_3)^{-1}}\right)$$

*où $C$ et $c$ désignent des constantes positives effectivement calculables en fonction de $t_1, t_2, \ldots, t_6$.*

Exemple: Quand $t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1/3$, $t_4 = 3$, $t_5 = t_6 = 6$, on peut choisir $C = \exp\exp 10^5$, $c = \exp 10^5$; si, en outre, $k > \exp 10^4$, $C = \exp 10^6$ et $c = 2000$ conviennent.

Dans les corollaires suivants, on emploiera sans mention particulière le théorème fondamental des nombres premiers.

Corollaire 1. *Soit $\varepsilon$ un réel positif, soit*

$$r(\varepsilon) = \sup\left(C\cdot C^{c/\varepsilon}, \exp\exp(c+\varepsilon)^{-1}\right)$$

*(resp.* $\sup\left(C\cdot C^{(1+c)/\varepsilon}, \exp\exp(1+c+\varepsilon)^{-1}\right)$*). Pour tout triplet $(n, k, a)$ d'entiers vérifiant* (1), *on a, si* $\log n/\log k \geqslant r(\varepsilon)$,

(7) $$\pi\Big(P\big((n+a)(n+2a)\ldots(n+ka)\big)\Big) \geqslant (c+\varepsilon)^{-1}k\log(\log n/\log k)\left(\log_2(\log n/\log k)\right)^{-1}$$

*(respectivement*

(8) $$\operatorname{card} Y < \sup\Big(2, (1+c+\varepsilon)\pi(k)\log_2\left(\log n/(\log k)^2\right)\left(\log\left(\log n/(\log k)^2\right)\right)^{-1}\Big),$$

*où $Y$ désigne la partie formée des éléments vérifiant $P(n+ia) \leqslant k$).*

Démonstration. Définir $j$ par $j\log j = c^{-1}\log(\log n/C\log k)$ (resp. $(1+c)^{-1}\log(\log n\cdot\pi(k)/Ck\log k)$) et appliquer le théorème 1 avec $\xi = k$ (resp. $\pi(k)/j$). Un cas particulier de (7) a été obtenu pour $a = 1$ dans le domaine partiel $n \geqslant \exp\exp(\log k)^B$ ($B > 0$ donné) (resp. $n \geqslant \exp(\log k)^{5/4}$) par Shorey et Tijdeman ([13]) (resp. Ramachandra et Shorey ([8] et [11])). Toujours dans le cas $a = 1$, un meilleur résultat que (7) pour $n < \exp(\log k)^{5/4}$ a été prouvé par Jutila ([4]). De même, (8) généralise un résultat dérivé par Tijdeman ([14]), quand $a = 1$, valable dans le domaine partiel $n \geqslant \exp(k^{\varepsilon'})$ où $\varepsilon'$ est un réel positif donné, de travaux de Shorey ([12]) et Ramachandra ([7]); (8) contient aussi le corollaire, noté lemme 2, du principal théorème de ce dernier article.

Soit $G$ (resp. $G'$) l'ensemble des triplets $(n, k, a)$ vérifiant $n > 1$, $a \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, $(n, a) = 1$, pour lesquels la propriété suivante est vérifiée:

il existe des nombres premiers distincts divisant respectivement $n+a, n+2a, \ldots, n+ka$ (resp. le nombre des $(n+ia)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ composés de facteurs premiers $\leqslant k$ est au plus $\pi(k) - \sum_{\substack{p\leqslant k\\ p|a}} 1$). On voit aisément que $G \subset G'$. Le lemme suivant généralise un résultat d'Erdös et Selfridge ([1], s'y reporter pour l'historique du problème):



Lemme 1. *Soient des entiers tels qu'aucun d'entre eux ne divise le plus petit commun multiple* (ppcm) *des autres, alors, il existe des nombres premiers distincts les divisant respectivement.*

Démonstration. Soient $n_1, n_2, \ldots, n_k$ des entiers, observer que les quotients $n_i/(n_i, \operatorname{ppcm}_{i'\neq i} n_{i'})$ sont des entiers premiers entre eux deux à deux.

Corollaire. *Si $(n, k, a) \notin G$, l'un des $(n+ia)$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$ divise* $\operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, k-1)$.

En particulier, $(n, k, a) \notin G$ implique $n+a < 3^k$ (cf. [3]); le théorème 1 permet de prouver le:

Corollaire 2. *Tout triplet $(n, k, a)$ vérifiant $k \geqslant 3$ (resp. 17),* (1) *et*

(9) $$n \geqslant \exp(C\cdot k^{1/3}\log k) \quad (\textit{resp.}\ (1)\ \textit{et}$$

(9′) $$n \geqslant \exp\left(C(\log k)^2\right))$$

*appartient à l'ensemble $G$ (resp. $G'$).*

Démonstration. On définit $Y$ comme dans le corollaire 1. Si $(n, k, a) \notin G$, il existe une partie $X$ de $Y$ telle que $\omega(X) < \operatorname{card} X$ („lemme des mariages", [2]); le théorème 1 avec $j = t_2 = 1$, $\xi = 2$ et (9) conduisent alors à une impossibilité. Si $(n, k, a) \notin G'$, alors (2) et (3) (avec $j = t_2 = 1$, $X = Y$) sont vraies, en contradiction avec le théorème 1 quand $\xi = \pi(k)$ (pour $k \geqslant 17$, $\pi(k)\log k > k$). Cette 2ème partie se déduit aussi de (8). Lorsque $a = 1$, le corollaire 2 est dû à Ramachandra, Shorey, Tijdeman ([9] et [10]).

Corollaire 3. *Soit $t$ un réel $> 1/3$ (resp. $t'$, $t''$ réels tels que $0 < t' < t'' < 1/3$). Soit $I_k$ (resp. $I'_k$) la borne inférieure des quantités*

$$\pi\left(P(X)\right)(\operatorname{card} X)^{-1}\log_3 n\cdot(\log_2 n)^{-1}$$

*où $X$ est une quelconque partie de $\{n+a, n+2a, \ldots, n+ka\}$ de cardinal $\geqslant 2$ (resp. $k^{1-t'}$) et $(n, k, a)$ un quelconque triplet vérifiant $\log n \geqslant k^t$ (resp. $k^{t''}$) et* (1); *alors,*

$$\lim_{k\to\infty} I_k \geqslant c^{-1}\left(1-(1/3t)\right) \quad \left(\textit{resp.}\ \lim_{k\to\infty} I'_k \geqslant c^{-1}\left(1-(t'/t'')\right)\right).$$

Démonstration. Appliquer le théorème 1 avec $\xi = 2$ (resp. $k^{1-t'}$), $j$ satisfaisant à

$$cj\log j = \log\left(C\log k\cdot\inf(k^{1/3}, k/\xi)\right),$$

$t_2 = 1$, $t_5 > 3/(3t-1)$ (resp. $t'/(t''-t')$).

**2. Lemmes arithmétiques.** Soient $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, $a \geqslant 1$ trois entiers avec $(n, a) = 1$. Soit

$$m_i = \operatorname*{ppcm}_{i' \neq i}(n+ia,\, n+i'a) = \big(n+ia,\, \operatorname*{ppcm}_{i' \neq i}(n+i'a)\big)$$

(où $1 \leqslant i' \leqslant k$). Il est clair que $\operatorname*{ppcm}_{1 \leqslant i \leqslant k} m_i$ divise $\operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, k-1)$.

Lemme 2. *Soient $d_1, d_2, \ldots, d_k$ des entiers, alors, $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k$ divise $\operatorname*{ppcm}_{1 \leqslant i \leqslant k} d_i \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (d_i, d_j)$; si, de plus, pour $i = 1, 2, \ldots, k$, $d_i$ divise $n+ia$, alors $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_k$ divise $\operatorname*{ppcm}_{1 \leqslant i \leqslant k} d_i \cdot (k-1)!$.*

Démonstration. Soient $v_p$ la valuation $p$-adique et $i_0$ un indice satisfaisant à $v_p(d_{i_0}) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k} v_p(d_i)$. On voit que

$$v_p\Big(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} d_i\Big) = v_p(d_{i_0}) + \sum_{i \neq i_0} v_p(d_i, d_{i_0})$$

d'où le lemme.

Corollaire. *Soit $X$ une partie de $\{n+a, n+2a, \ldots, n+ka\}$; en notant $x$ le cardinal de $X$,*

$$\prod_{n+ia \in X} m_i \leqslant k^{\inf(2k,\, \omega(X)+x(x-1)/2)}.$$

Démonstration. $\operatorname*{ppcm}_{n+ia \in X} m_i$ est majoré par $\operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, k-1)$, donc par $\inf(3^k, k^{\omega(X)})$; on conclut alors grâce ou lemme 2.

**3. Methode de Baker.** Une technique combinatoire analogue à celle des précédents auteurs permet de ramener le problème à celui de la minoration d'une forme linéaire de logarithmes; à leurs minorations ad hoc, on préfère un corollaire d'un résultat très général et précis de M. Waldschmidt que je remercie vivement de m'avoir communiqué avant parution.

Lemme 3 ([15]). *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_m$ $(m \geqslant 2)$ des rationnels positifs de hauteurs majorées par $A_1, A_2, \ldots, A_m$ (ces majorants étant $\geqslant 3$) respectivement, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ des entiers inférieurs à $B$ en valeur absolue, $Q = \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} \log A_i$, $Q' = \prod_{1 \leqslant i < m} \log A_i$, $E$ $(\geqslant e)$ un réel majoré par tout $A_i$ et toute quantité $4\log A_i/\log a_i$. Alors, on a*

$$L = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} b_i \log a_i \geqslant \exp\big(-2^{65} m^{10m} Q \log(BEQ) \log(EQ')(\log E)^{-m-1}\big)$$

$$\textit{ou} \quad L = 0.$$

**4. Démonstration du théorème global.**

A. *Réduction du problème.* On peut supposer sans perte de généralité $\operatorname{card} X = x = \xi$. On allège notations et calculs en donnant à $t_1, \ldots, t_6$ les valeurs numériques vues dans l'exemple qui suit l'énoncé et en se bornant à prouver l'existence de $C$ et $c$.



Soit $k_0$ un entier, le théorème 1 est vrai quand $k \leqslant k_0$ dès lors que $C$ et $c$ sont assez grands, car, pour toute partie $X$ ayant au moins deux éléments, on a $P(X) \geqslant 2jk_0 \log(jk_0)$ ce qui contredit (3) (observer que (cf. (5)),

$$\log_2 n \geqslant \log C + cj\log j - 1$$

et (cf. th. 0)

$$\inf_{1 \leqslant i < i' \leqslant k} P\big((n+ia)(n+i'a)\big) \geqslant \log_2 n\,).$$

B. *Plan de la démonstration.* On suppose trouvés: $(n, k, a)$ vérifiant (1), $j \geqslant 1$, une partie $X$ tels que (2), (3), (5) (et (6) si $j \geqslant 4/3$) soient satisfaites et on va montrer qu'un choix convenable de $c$ et $C$ est impossible lorsque $k$ est assez grand (ce qui suffit d'après A). L'idée est de trouver $i, i'$ entiers $(1 \leqslant i' < i \leqslant k)$ pour écrire (cf. notations du § 2)

(L.1)

$$1 < \log\big((n+ia)(n+i'a)^{-1}\big) = \log(m_i/m_{i'}) + \sum_{1 \leqslant g \leqslant h} b_g \log(q_g/q'_g) < k \cdot n^{-1/2}$$

où les $b_g$ (resp. $q_g$ et $q'_g$) sont des entiers (resp. nombres premiers — éventuellement égaux à $1$ —) majorés par $\log(n+ka)/\log 2$ (resp. $P(X)$), donc de sorte qu'on puisse appliquer le lemme 3 à cette forme linéaire de logarithmes dans les meilleures conditions possibles. Par conséquent, on effectue le choix du couple $(i', i)$ afin que $h, m_i, m_{i'}, q_1, q'_1, \ldots, q_h, q'_h$ soient petits et les quotients $m_i/m_{i'}, q_1/q'_1, \ldots, q_h/q'_h$ voisins de 1. Pour cela, on extrait une partie $X_1$ de $X$ telle que tout couple d'éléments de $X_1$ satisfasse à la première de ces conditions, puis une partie $X_2$ de $X_1 \ldots$ jusqu'à l'obtention d'une partie à deux éléments ayant toutes les propriétés requises.

C. *Impossibilité de l'inégalité $x \leqslant x_0$.* Dans la suite, $C_0, C_1, \ldots$ sont des constantes positives effectivement calculables pouvant être fonctions décroissantes au voisinage de l'infini de $C, c, k_0$. Le travail d'extraction décrit en B exige que $X$ soit assez vaste; on prouve donc d'abord que l'inégalité $x \leqslant x_0$ ($x_0$ entier donné) est incompatible avec un choix convenable de minorants pour $C, c, k_0$. Dans ce cas, on peut écrire $k^{1/3} = \inf(k^{1/3}, k/x)$, d'où $\log k < 3\log_2 n$; de plus, d'après (5), $cj\log j \leqslant \log_2 n$ et donc, si $\log_2 n \geqslant \log C \geqslant c^2/4$, $cj \leqslant 4\log_2 n(\log_3 n)^{-1}$ et $cj\log_2 jk \leqslant C_0 \log_2 n$. On reprend alors la démonstration du théorème 0 avec un couple d'éléments de $X$ en appliquant le lemme 3 avec $m \leqslant \omega(X) \leqslant jx_0$, $Q \leqslant \big(\log P(X)\big)^{\omega(X)} \leqslant \big(\log(jk)^2\big)^{jx_0}$, $B \leqslant 2\log n$, $E = e$. On majore comme indiqué $j$, $\log k$, $j\log_2 jk$; il vient: $\log n \leqslant C_1(\log n)^{C_2/c}(\log_2 n)$ ce qui est impossible quand $c > C_2$, pourvu que $C \cdot k_0^{1/3}$ soit assez grand (cf. (5)). On cherche maintenant à extraire de $X$ une partie dont les éléments $n+ia$ s'écrivent $m_i((n+ia)/m_i)$ avec $m_i$ et $\omega((n+ia)/m_i)$ petits. Pour cela, on prouve préalablement que le cardinal $f$ de la partie $F$ de $X$ formée des éléments $n+ia = m_i$ est $\leqslant \sup(x^{1/2}, 2x/C)$.

D. *L'inégalité* $f \leqslant \sup(x^{1/2}, 2x/C)$. Si $f > x^{1/2}$, on peut appliquer le corollaire du lemme 2 à une partie de $F$ ayant $1+[x^{1/2}]$ éléments; en majorant $\omega(X)+x(x-1)/2$ par $2jx$, on obtient $\log n \leqslant 2jx^{1/2}\log k$ d'où, grâce à (5), $\inf(k^{1/3}, k/x) \leqslant x^{1/2}$, i.e. $\inf(k^{1/3}, k/x) = k/x$. Comme le corollaire du lemme 2 appliqué à $F$ montre aussi l'inégalité $f\log n < 2k\log k$, on déduit finalement de (5) que $f \leqslant 2x/C$.

E. *Une partie de $X$ dont les éléments vérifient „$\omega((n+ia)/m_i)$ petit”.* On pose $h = 1$ si $j \leqslant 3/2$, $h = [3j/2]$ sinon. Soit $X'$ la partie de $X-F$ formée des éléments $n+ia$ vérifiant $\omega((n+ia)/m_i) \leqslant h$. Comme $i \neq i'$ implique $((n+ia)/m_i, (n+i'a)/m_{i'}) = 1$, on a $(h+1)(x-f-\mathrm{card}\,X') \leqslant \omega(X) \leqslant jx$ d'où l'on déduit $\mathrm{card}\,X' \geqslant (x/4)-f \geqslant x/5$ (cf. D).

Soit $X''$ la partie de $X'$ ayant $[\mathrm{card}\,X'/2]$ éléments telle qu'on ait $m_i \leqslant m_{i'}$ pour tout couple $(i, i')$ vérifiant $(n+ia, n+i'a) \in X'' \times (X'-X'')$; on pose $w = \sup_{n+ia\in X''} \log m_i$ (l'introduction de ce paramètre commode est due à Mignotte ([6])).

Le corollaire du lemme 2 montre l'inégalité

$$w \leqslant 20(k/x)\log k. \tag{10}$$

Ce même corollaire, appliqué à une partie de $X'-X''$ ayant $1+[x^{1/2}]$ éléments (possible car on peut supposer, d'après C, $x/10 > x^{1/2}$), montre aussi que

$$w \leqslant 2j\cdot x^{1/2}\cdot\log k; \tag{11}$$

d'où, avec (10),

$$w \leqslant 20\cdot j^{2/3}\cdot\log k\cdot\inf(k^{1/3}, k/x) \leqslant jk. \tag{12}$$

Soient $i, i'$ deux entiers tels que $(n+ia, n+i'a) \in X''^2$. On applique le lemme 3 à:

$$\log((n+ia)/(n+i'a)) = \log(m_i/m_{i'}) + \sum_{1\leqslant g\leqslant h} b_g \log q_g + \sum_{1\leqslant g\leqslant h} b'_g \log q'_g \tag{L.2}$$

(les $q_g$ (resp. $q'_g$) sont les diviseurs premiers de $(n+ia)/m_i$ (resp. $(n+i'a)/m_{i'}$) auxquels on adjoint éventuellement 1; les $b_g$, $b'_g$ des entiers majorés par $2\log n$) avec $m = 2h+1$, $A_1 = A_2 = \ldots = A_{m-1} = (jk)^2$, $A_m = \exp w$, $B = 2\log n$, $E = e$. En majorant $h$ par $3j/2$, $w$ par $jk$ dans le terme $\log(BEQ)$, il vient:

$$\log n \leqslant C_3\cdot j^{C_4 j}(\log jk)^{C_5 j}\log_2 n$$



d'où l'on déduit, en majorant $\log w$ par $\log_2 jk$, pour $C$, $c$, $k_0$ assez grands,

$$\log n < C_6\cdot j^{C_7 j}(\log jk)^{C_8} w.$$

Cette dernière inégalité s'écrit, pour $j \leqslant 3/2$ (resp. $j < 3/2$)

$$\log n < C_9(\log k)^{C_{10}} w \tag{13}$$

(resp.

$$\log n < C_{11} j^{C_{12} j}(\log k)^{C_{13} j} w). \tag{14}$$

De (13), on déduit, quand $j \leqslant 3/2$,

$$x > k^{2/3}(\log k)^{-C_{14}} \quad \text{(appliquer (5) et (11))} \tag{15}$$

et

$$\log n < C_{15}(\log k)^{C_{16}}\inf(k^{1/3}, k/x) \quad \text{(appliquer (12))}. \tag{16}$$

De (14), on déduit, quand $j > 3/2$,

$$j < (\log k)^{C_{17}} \tag{17}$$

(appliquer (5) et (12) à (14), choisir $C > 20C_{11}$, $c > 1+C_{12}$, poser $C_{17} = C_{13}(c-(1+C_{12}))^{-1}$).

F. *Passage de* (L.2) *à* (L.1). On extrait maintenant une partie $Z$ de $X''$ de sorte que soit constante l'application associant à $n+ia \in Z$ l'ensemble des entiers $v_p((n+ia)/m_i)$ ($p$ décrivant l'ensemble des facteurs premiers de $\prod_{n+ia\in X''}(n+ia)/m_i$). Un majorant pour ces entiers est $2\log n$; existe donc une telle partie $Z$ de cardinal $\geqslant (x/10)(2\log n)^{-h}$.

Quand $j \leqslant 3/2$, (15) et (16) montrent que cette quantité satisfait à:

$$\mathrm{card}\,Z > C_{18}(\log k)^{-C_{19}} k^{1/3}.$$

Quand $j > 3/2$, (6) s'écrit, pour $k_0$ assez grand (c'est le premier usage de (6)),

$$k/x < 3\cdot j^{3cj}(\log k)^6 \exp((\log k)^{6/7});$$

comme (17) montre que $j^{6cj}$ est majoré par $\exp(6cC_{17}(\log k)^{C_{17}}\log_2 k)$ et comme on connait la forme de $C_{17}$ en fonction de $c$ (cf. fin de E), on voit que cette dernière inégalité peut être écrite: $k/x < \exp(C_{20}(\log k)^{6/7})$ (pour $c$ assez grand). De cela, on déduit:

$$k/x = \inf(k^{1/3}, k/x), \tag{18.1}$$

et, pour $k_0$ et $c$ assez grands, en appliquant (10) et (14),

$$\log n < \exp((\log k)^{0,9}), \tag{18.2}$$

$$(\log n)^h < \exp((\log k)^{0,91}), \tag{18.3}$$

$$\mathrm{card}\,Z > k\exp(-(\log k)^{0,92}). \tag{18.4}$$

Soient $i_1, i_2, \ldots, i_z$ les valeurs de $i$ pour lesquelles $n+ia$ appartient à $Z$. En choisissant $i, i'$ parmi ces valeurs, on obtient une forme linéaire de logarithmes de type (L.1); on prouve maintenant que ce choix peut être fait en sorte que les quantités $|w/\log(m_i/m_{i'})|$ et $|\log P(X)/\log(q_g/q'_g)|$ $(1 \leqslant g \leqslant h)$ soient minorées par $\frac{1}{2}z^{1/(1+h)}$ en appliquant à la matrice dont la première ligne est $\log m_{i_1}, \log m_{i_2}, \ldots, \log m_{i_z}$ et les suivantes $\log q_g(i_1)$, $\log q_g(i_2), \ldots, \log q_g(i_z)$ $(1 \leqslant g \leqslant h)$ (pour $u = 1, 2, \ldots, z$, on indexe arbitrairement par $g = 1, 2, \ldots, h$ les facteurs premiers (auxquels on adjoint éventuellement 1) de $(n+i_u a)/m_{i_u}$) le lemme combinatoire général suivant:

Lemme 4. *Soit* $(d_{g,u})$ *(avec* $0 \leqslant g \leqslant h$, $1 \leqslant u \leqslant z$*) une matrice à coefficients réels positifs ou nuls. Soit* $D_g$ *un majorant des coefficients de la* $g^{\text{ème}}$ *ligne* $(g = 0, 1, 2, \ldots, h)$. *Pour tout entier* $s < z$, *il existe une partie* $S$ *de cardinal* $1+s$ *de* $\{1, 2, \ldots, z\}$ *avec*

$$\sup_{(g,r,r')\in[0,h]\times S^2} D_g^{-1}|d_{g,r} - d_{g,r'}| \leqslant 2(s/z)^{1/(1+h)}.$$

Démonstration. Soient $v = (s/z)^{1/(1+h)}$, $(s_g)$ la suite définie par $s_0 = z-1$, $s_{g+1} = [v(1+s_g)]$ (d'où $\big(s_{g+1}/(1+s_g)\big) \leqslant v < (1+s_{g+1})/(1+s_g)$ et donc $1+s_{1+h} > s$). En supposant traité le cas $h = 0$, on extrait de la première ligne une partie $S_1$ à $1+s_1$ éléments telle que

$$\sup_{(r,r')\in S_1^2} D_1^{-1}|d_{0,r} - d_{0,r'}| \leqslant 2s_2/(1+s_1)$$

puis on itère ce calcul afin d'extraire une partie $S$ à $1+s_{1+h}$ $(> s)$ éléments avec

$$\sup_{0\leqslant g\leqslant h}\ \sup_{(r,r')\in S^2} D_g^{-1}|d_{g,r} - d_{g,r'}| \leqslant 2v.$$

On est donc ramené au cas $h = 0$. La suite $(d_{0,u})$ peut être supposée non décroissante et il suffit donc de trouver un entier $u$ parmi $1, 2, \ldots, z-s$ satisfaisant à

$$d_{0,g+s} - d_{0,g} \leqslant 2(s/z)\, d_{0,z}.$$

Or

$$\sum_{1\leqslant u\leqslant z-s} (d_{0,u+s} - d_{0,u}) \leqslant d_{0,z}\big(z - \sup(s, z-s)\big),$$

et on conclut en observant que

$$(z-s)^{-1}\big(z - \sup(s, z-s)\big) \leqslant 2(s/z).$$

G. *Fin de la démonstration.* Des inégalités relatives à $z$, on déduit:

(19) $$\tfrac{1}{2}z^{1/(1+h)} > C_{21}(\log k)^{-C_{22}}k^{1/6} \quad \text{si} \quad j \leqslant 3/2,$$

(20) $$\tfrac{1}{2}z^{1/(1+h)} > k^{6/13j}\exp\big(-(\log k)^{0,93}\big) \quad \text{si} \quad j > 3/2.$$



On vérifie aisément que poser, lorsque $j \leqslant 3/2$ (resp. $j > 3/2$), $m = 2$ (resp. $1+h$), $A_1$ (resp. $A_1 = \ldots = A_h$) $= k^2$, $A_m = \exp\big(3^3\log k\cdot\inf(k^{1/3}, k/x)\big)$ (resp. $\exp\big(20(k/x)\log k\big)$), $B = C_{15}(\log k)^{C_{16}}k^{1/3}$ (resp. $\exp\big((\log k)^{0,91}\big)$), $E = k^{1/6}(\log k)^{-C_{22}}$ (resp. $k^{6/13j}\exp\big(-(\log k)^{0,93}\big)$) est à la fois justifié (appliquer (12), (16), (19) (resp. (17), (10), (18), (20))) et compatible avec les hypothèses du lemme 3; ce dernier donne alors, si $j \leqslant 3/2$ (resp. $j > 3/2$):

$$\log n < C_{23}(\log k)\inf(k^{1/3}, k/x) \qquad (\text{resp. } C_{24}j^{C_{25}j}\log k(k/x))$$

ce qui contredit (5) (joint à (18.1) quand $j > 3/2$) pour $C$ et $c$ assez grands.

**Bibliographie**


[1] P. Erdös et J. L. Selfridge, *Some problems on the prime factors of consecutive integers, II*, Proc. Washington St. Univ. Conf. on Number Theory, Pullman (Wash.), 1971, p. 13–21.

[2] P. Hall, *On representatives of subsets*, J. London Math. Soc. 10 (1935), p. 26–30.

[3] D. Hanson, *On the product of the primes*, Canad. Math. Bull. 15 (1972), p. 33–37.

[4] M. Jutila, *On numbers with a large prime factor II*, J. Indian Math. Soc. 38 (1974), p. 125–130.

[5] M. Langevin, *Quelques applications de nouveaux résultats de Van der Poorten*, Sém. Delange–Pisot–Poitou, 1975-76, G12, 11p.

[6] M. Mignotte, *Sur les facteurs premiers distincts d'entiers consécutifs*, Sém. Delange–Pisot–Poitou, 1974-75, G5, 6p.

[7] K. Ramachandra, *Application of Baker's theory to two problems considered by Erdös and Selfridge*, J. Indian Math. Soc. 37 (1973), p. 25–34.

[8] K. Ramachandra and T. N. Shorey, *On gaps between numbers with a large prime factor*, Acta Arith. 24 (1973), p. 99–111.

[9] [10] K. Ramachandra, T. N. Shorey, R. Tijdeman, *On Grimm's problem relating to factorisation of a block of consecutive integers, I, II*, J. Reine Angew. Math. 273, 288, (1975-1976), p. 109–124 and 192–201.

[11] T. N. Shorey, *On gaps between numbers with a large prime factor II*, Acta Arith. 25 (1974), p. 365–373.

[12] — *On linear forms in the logarithms of algebraic numbers*, ibid. 30 (1976), p. 27–42.

[13] T. N. Shorey and R. Tijdeman, *On the greatest prime factors of polynomials at integer points*, Compositio Math. 33 (1976), p. 187–195.

[14] R. Tijdeman, Math. Rev., 54, nº 1, 7/1977, 246.

[15] M. Waldschmidt, *Simultaneous approximation of numbers connected with the exponential function*, J. Austr. Math. Soc., A, 25 (1978), p. 466–478.


*Reçu le 27. 7. 1978*
*et dans la forme modifiée le 19. 1. 1979* (1089)