ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Transzendente Zahlen als Fourierkoeffizienten von Heckes Modulformen

von

JÜRGEN WOLFART (Frankfurt a. M.)

1. Die *Hecke-Gruppen* $G(\lambda)$ sind jene Untergruppen von $\mathrm{PSL}_2(\boldsymbol{R})$, welche von

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt werden ($\lambda > 0$). Sie operieren als Gruppen gebrochen-linearer Transformationen genau dann diskontinuierlich auf der oberen Halbebene $\mathfrak{H} \subset \boldsymbol{C}$, wenn entweder

$$\lambda = \lambda_q := 2\cos\frac{\pi}{q} \quad \text{mit } q \in \boldsymbol{N},\ q \geqslant 3$$

oder wenn $\lambda \geqslant 2$ ist ([6]). Für $\lambda = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ und 2 sind die $G(\lambda)$ arithmetisch definiert und zu $\mathrm{PSL}_2(\boldsymbol{Z}) = G(1)$ vergleichbar; in allen anderen Fällen ist nicht bekannt, wie und ob die Elemente $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\lambda)$ durch (z.B. arithmetische) Eigenschaften der Koeffizienten $a, b, c, d \in \boldsymbol{Z}[\lambda]$ charakterisiert werden können, vgl. dazu [9], [10] und [12].

2. Die *Modulformen* zu den Hecke-Gruppen $G(\lambda_q)$ mit $q = 5$ oder $q \geqslant 7$, welche im folgenden untersucht werden sollen, lassen sich daher nicht mit arithmetischen, sondern ausschließlich mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln behandeln. Modulformen zu $G(\lambda)$ von der „Signatur" (λ, k, C) sind definiert als holomorphe Funktionen $f\colon \mathfrak{H} \to \boldsymbol{C}$ mit den Transformationseigenschaften

$$\left.\begin{aligned} f(z+\lambda) &= f(z) \\ f(-1/z) &= C(z/i)^k f(z) \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } z \in \mathfrak{H}$$

(für $f \not\equiv 0$ ist notwendig $C = \pm 1$) und einer Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} nz}.$$

Sie bilden einen C-Vektorraum $M(\lambda, k, C)$, der für $\lambda = \lambda_q$ genau dann $\neq \{0\}$ ist, wenn

$$k = \frac{4m}{q-2} + 1 - C \quad \text{mit ganzrationalem } m \geqslant 0$$

ist; dann ist ([6])

$$\dim M(\lambda_q, k, C) = 1 + \left[\frac{m + (C-1)/2}{q}\right]. \tag{1}$$

Nach Hecke [6], Bogo, Kuyk und van Oystayen [3] gibt es zwei Modulformen

$$f_0 := \left(\frac{(j')^2}{j(j-1)}\right)^{1/(q-2)} \quad \text{und} \quad f_i := \left(\frac{(j')^q}{j^{q-1}(j-1)}\right)^{1/(q-2)} \tag{2}$$

mit den Signaturen $(\lambda_q, 4/(q-2), 1)$ bzw. $(\lambda_q, 2q/(q-2), -1)$, welche den graduierten Ring aller Modulformen zu $G(\lambda_q)$ erzeugen; dabei bezeichnet j die „absolute Invariante" von $G(\lambda_q)$, d.h. die $G(\lambda_q)$-invariante holomorphe Funktion $j\colon \mathfrak{H} \to C$, welche das Innere des hyperbolischen Dreiecks $\tau_0 := -e^{-\pi i/q}, i, \infty$ auf $\mathfrak{H}$ und die Eckpunkte τ_0, i, ∞ auf $0, 1, \infty$ abbildet.

3. Im folgenden soll gezeigt werden, daß man nicht nur für die arithmetisch definierten Hecke-Gruppen Aussagen über die zahlentheoretische Natur der Fourierkoeffizienten von Modulformen machen kann:

Satz 1. *Jedes $M(\lambda_q, k, C)$ besitzt eine Basis aus Modulformen mit Fourierentwicklungen vom Typ*

$$\sum_{n\geqslant 0} r_n a^n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} nz}, \tag{3}$$

wobei die r_n rationale Zahlen sind und $a = a(\lambda_q)$ nur von $G(\lambda_q)$ abhängt.

Der Beweis (§ 5) beruht auf den in § 2 bereitgestellten Hilfsmitteln und auf einem analogen Satz von J. Raleigh [11] über die Fourierentwicklung der j-Funktionen. Die dort bereits aufgeworfene Frage nach der arithmetischen Natur der $a(\lambda_q)$ wird beantwortet durch

Satz 2. *$a(\lambda_q)$ ist rational für $q = 3, 4$ und 6 (also $\lambda_q = 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$) und transzendent in allen anderen Fällen.*

Der Beweis (§§ 6 bis 14) folgt aus einer schon von Raleigh angegebenen expliziten Darstellung der $a(\lambda_q)$ und den Bakerschen Resultaten [1] über die Transzendenz von Potenzprodukten $\alpha_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_m^{\beta_m}$. In unserem Fall liegen die α_ν, β_ν jeweils in $Q(\lambda_q) \subset Q(e^{\pi i/q})$.

4. Folgerungen. (A) Für die Dirichletreihen mit Funktionalgleichung, welche den Modulformen der Signatur (λ_q, k, C) nach der Heckeschen Theorie [6] entsprechen, gelten damit entsprechende Koeffizientengesetze.

(B) Durch einen Wechsel der Uniformisierenden lassen sich die Basismodulformen aus Satz 1 als Fourierreihen mit rationalen Koeffizienten schreiben:

$$\sum_{n\geqslant 0} r_n a^n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} nz} = \sum_{n\geqslant 0} r_n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} n\left(z + \frac{\lambda}{2\pi i}\log a\right)}.$$

(C) Nach J. Lehner ([8], S. 282) lassen sich auch zu den $G(\lambda_q)$ Eisensteinreihen — jedenfalls für alle geraden Gewichte $k \geqslant 4$ — definieren:

$$E_k(z) := \sum_{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G(\lambda_q)_\infty \setminus G(\lambda_q)} (cz+d)^{-k}.$$

Summiert wird über ein Vertretersystem aller Rechtsrestklassen von $G(\lambda_q)$ nach der Fixuntergruppe des Punktes ∞, also

$$G(\lambda_q)_\infty := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G(\lambda_q)\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in Z\right\}. \tag{4}$$

Für jedes q haben E_4 und E_6 die Signatur $(\lambda_q, 4, 1)$ bzw. $(\lambda_q, 6, -1)$, die zugehörigen Vektorräume von Modulformen sind nach (1) eindimensional, aus (4) folgt $\lim\limits_{s\to\infty} E_k(is) = 1$, also gilt wenigstens für $k = 4$ und 6 die „Rationalität" der Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen, d.h. E_4 und E_6 besitzen Fourierentwicklungen vom Typ

$$1 + \sum_{n\geqslant 1} r_n a^n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} nz} \quad \text{mit} \quad r_n \in Q.$$

5. Beweis von Satz 1. Die j-Funktion zu $G(\lambda_q)$ genügt als Umkehrfunktion einer Schwarzschen Dreiecksfunktion der Differentialgleichung

$$\frac{3(j'')^2 - 2j'j'''}{(j')^4} = \frac{4q^2j^2 - (5q^2-4)j + 4q^2 - 4}{4q^2j^2(j-1)^2},$$

die durch Umkehrung der Differentiation aus der Schwarzschen Differentialgleichung entsteht. Durch Einsetzen der Fourierreihe von j in diese Differentialgleichung folgt durch Koeffizientenvergleich, daß

$$j(z) = a^{-1} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda} z} + \sum_{n\geqslant 0} r_n a^n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} nz} \tag{5}$$

mit rationalen r_n sein muß ([11], S. 110).

j' besitzt bis auf den konstanten Faktor $2\pi i/\lambda$ eine Reihenentwicklung gleichen Typs, und nach (2) damit auch — wieder bis auf konstante

Faktoren – die erzeugenden Modulformen f_0 und f_i sowie alle Potenzprodukte $f_0^s f_i^t$. Diese erzeugen aber alle Vektorräume $M(\lambda_q, k, C)$.

6. Beweis von Satz 2. Nach (5) und dem Beweis von Satz 1 ist $a(\lambda_q)^{-1}$ das Residuum der zu $G(\lambda_q)$ gehörigen j-Funktion. Dieses hängt von der Normierung $j(i) = 1$, $j(-e^{\pi i/q}) = 0$ ab, sodaß zu seiner Berechnung die explizite Beschreibung der Umkehrfunktion von j als Quotient hypergeometrischer Reihen herangezogen werden muß. Das Ergebnis ist ([11], S. 108)

$$a^{-1} = 2^{-4+2(-1)^q} q^{-2} \prod_{\nu=1}^{q-1} \left(2 - 2\cos\frac{\pi\nu}{q}\right)^{2(-1)^\nu \cos\frac{2\pi\nu}{q}}. \tag{6}$$

Für $q = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ ([11], S. 110 f.) sowie für $q = 12$ folgt damit die Gültigkeit des Satzes direkt bzw. aus dem Schneider-Gelfondschen Satz:

$$a(\lambda_3) = 2^6 3^3; \quad a(\lambda_4) = 2^8; \quad a(\lambda_6) = 2^2 3^3;$$

$$a(\lambda_5) = 2^6 5^{5/2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{3\sqrt{5}}; \quad a(\lambda_8) = 2^{10}(\sqrt{2}-1)^{2\sqrt{2}};$$

$$a(\lambda_{10}) = 2^2 5^{5/2} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\sqrt{5}}; \quad a(\lambda_{12}) = 2^8 3^3 (2-\sqrt{3})^{2\sqrt{3}}.$$

7. Für die hier nicht erfaßten $q \geqslant 7$ benötigen wir den

Satz (A. Baker [1]). *Das Produkt*

$$\alpha = \alpha_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_m^{\beta_m}$$

ist transzendent, wenn alle $\alpha_\nu \neq 0$, alle α_ν, β_ν algebraisch sind, wenn ein $\alpha_\nu \neq 1$ ist, und wenn $1, \beta_1, \ldots, \beta_m$ linear unabhängig über Q sind.

Da die letzte Voraussetzung für das Produkt in (6) sicher nicht erfüllt ist, brauchen wir folgende formal schärfere Version dieses Satzes (es sei $M := \{1, \ldots, m\}$, und mit $[\gamma_\varrho; \varrho \in I]$ sei der von den $\gamma_\varrho \in C$, $\varrho \in I$, erzeugte Q-Vektorraum bezeichnet):

Seien α_ν, β_ν für alle $\nu \in M$ algebraisch, alle $\alpha_\nu \neq 0$; sei $r_\mu := (r_{\mu 1}, \ldots, r_{\mu m}) \in Q^m$, $\mu \in I \subset M$, eine Basis des Lösungsraums des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{\nu \in M} x_\nu \beta_\nu = 0 \tag{7}$$

und seien diese r_μ durch weitere $r_\mu \in Q^m$, $\mu \in M - I$, zu einer Basis von Q^m ergänzt, sodaß also zu der Matrix $R := (r_{\mu\nu})_{\mu,\nu \in M}$ eine inverse $R^{-1} = (s_{\mu\nu})_{\mu,\nu \in M}$

$\in \mathrm{GL}(m, Q)$ existiert. Das Produkt

$$\alpha = \prod_{\nu \in M} \alpha_\nu^{\beta_\nu}$$

ist transzendent, wenn gilt:

$$\dim_Q \Big[\sum_{\mu \in M} s_{\mu\nu} \log \alpha_\mu;\ \nu \in M - I\Big] > 1. \tag{8}$$

Zum Beweis setzt man $\gamma_\varkappa := \sum_{\nu=1}^{m} r_{\varkappa\nu}\beta_\nu$ für $\varkappa \in M - I$; diese $\gamma_\varkappa$ sind linear unabhängig über Q und algebraisch, also ist

$$\alpha = \prod_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu^{\beta_\mu} = \prod_{\nu \in M-I} \Big(\prod_{\mu \in M} \alpha_\mu^{s_{\mu\nu}}\Big)^{\gamma_\nu}$$

höchstens dann algebraisch, wenn

$$\dim_Q \Big[\log \prod_{\mu \in M} \alpha_\mu^{s_{\mu\nu}};\ \nu \in M - I\Big] \leqslant 1$$

ist. Wenn $Q \subset [\beta_\mu; \mu \in M] = [\gamma_\varkappa; \varkappa \in M - I]$ ist, sieht man das leicht ein, indem man die $\gamma_\varkappa$ durch eine Q-Basis ersetzt, welche 1 enthält. Im Fall $Q \cap [\beta_\mu; \mu \in M] = \{0\}$ darf man in (8) sogar „0" anstelle von „1" setzen.

8. Selbst wenn man eine Lösungsbasis von (7) explizit bestimmen kann, wie dies hier in § 9 geschieht, kann die Ergänzung zur Matrix R und die Berechnung von R^{-1} ein sehr unübersichtliches Problem sein. Deswegen seien zunächst zwei wichtige Vereinfachungen des Transzendenzkriteriums (8) behandelt:

(A) *Sei M die disjunkte Vereinigung von Untermengen M_a, sodaß $[\beta_\nu; \nu \in M]$ die direkte Summe der Unterräume $[\beta_\nu; \nu \in M_a]$ ist. Dann genügt es, für eines der M_a die Transzendenz des Teilprodukts $\prod_{\nu \in M_a} \alpha_\nu^{\beta_\nu}$ nachzuweisen.*

Man kann dann nämlich eine Lösungsbasis von (7) aus den Basen der Lösungsräume von

$$\sum_{\nu \in M_a} x_\nu \beta_\nu = 0$$

zusammensetzen und diese so zu einer Matrix $R \in \mathrm{GL}(m, Q)$ ergänzen, daß sie in Teilmatrizen zerfällt, welche der Zerlegung von M in die M_a entsprechen, d.h. $r_{\mu\nu} \neq 0$, nur wenn μ und ν dem gleichen M_a angehören. R^{-1} hat die gleiche Eigenschaft; für $\nu \in M_a$ gilt also

$$\prod_{\mu \in M} \alpha_\mu^{s_{\mu\nu}} = \prod_{\mu \in M_a} \alpha_\mu^{s_{\mu\nu}},$$

und daraus ergibt sich die Behauptung.

(B) *Sei $M_b \subset M$ so gewählt, daß die β_ν^1, $\nu \in M_b$, eine Q-Basis von $[\beta_\nu; \nu \in M]$ bilden. α ist transzendent, wenn*

$$\dim_Q[\log \alpha_\nu; \nu \in M] > 1 + \dim_Q[\log \alpha_\nu; \nu \in M - M_b] \tag{9}$$

ist; wenn $Q \cap [\beta_\nu; \nu \in M] = \{0\}$ ist, genügt sogar

$$\dim_Q[\log \alpha_\nu; \nu \in M] > \dim_Q[\log \alpha_\nu; \nu \in M - M_b]. \tag{10}$$

Eine Lösungsbasis r_μ von (7) mit $\mu \in I = M - M_b$ läßt sich nämlich in Form von Lösungen des Typs

$$\beta_\mu - \sum_{\nu \in M_b} r_{\mu\nu}\beta_\nu = 0$$

angeben. Sie läßt sich durch die Einheitsvektoren $r_\mu = e_\mu$, $\mu \in M_b$, zu einer invertierbaren Matrix R ergänzen. Für $R^{-1} = (s_{\mu\nu})$ gilt dann

$$\begin{aligned} s_{\mu\mu} &= 1 \quad \text{für alle } \mu \in M, \\ s_{\mu\nu} &= r_{\mu\nu} \quad \text{für alle } \mu \in I = M - M_b \text{ und } \nu \in M_b, \\ s_{\mu\nu} &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned}$$

Nach (8) ist α also transzendent, wenn

$$\dim_Q\Big[\log \alpha_\nu + \sum_{\mu \in M - M_b} r_{\mu\nu} \log \alpha_\mu; \nu \in M_b\Big] > 1$$

ist. Das ist sicher erfüllt, wenn die Codimension von $[\log \alpha_\mu; \mu \in M - M_b]$ in $[\log \alpha_\nu; \nu \in M]$ mindestens 2 ist. Das Kriterium (10) ergibt sich analog aus der Schlußbemerkung von § 7.

9. Das fragliche Produkt (6) kann bis auf rationale Faktoren in der Form $\alpha = \prod_{\nu \in \bar M} \alpha_\nu^{\beta_\nu}$ mit $\beta_\nu := \cos(2\pi\nu/q)$, $\bar M := Z/qZ$, geschrieben werden. Um das Kriterium (7) anwenden zu können, muß also zunächst eine Basis für alle linearen Relationen mit rationalen Koeffizienten zwischen den $\cos(2\pi\nu/q)$ bestimmt werden:

Zu jedem $r \in \bar M$ und jeder Primzahl $p \,\Big|\, \dfrac{q}{(r, q)}$ gibt es eine Relation

$$f_{r,p}(\beta_0, \ldots, \beta_{q-1}) = \sum_{\substack{\mu \equiv r \bmod q/p \\ \mu \in \bar M}} \cos \frac{2\pi\mu}{q} = 0. \tag{11}$$

Diese Relationen (man identifiziere $f_{r,p}$ mit $f_{s,p}$ für $s \equiv r \bmod q/p$) enthalten zusammen mit den Relationen

$$\cos \frac{2\pi r}{q} - \cos \frac{2\pi(-r)}{q} = 0 \quad \textit{für alle } r \textit{ mit } 0 < r < q/2 \tag{12}$$

eine Q-Basis des Lösungsraums von

$$\sum_{\mu \in \bar M} x_\mu \beta_\mu = 0. \tag{13}$$

Den Beweis führt man auf einen entsprechenden Satz über die Einheitswurzeln $e(\mu/q) := e^{2\pi i \mu/q}$ zurück, daß nämlich für alle $r \in \bar M$ und alle Primzahlen $p \,\Big|\, \dfrac{q}{(r, q)}$ Relationen

$$\sum_{a \in Z/pZ} e\left(\frac{r}{q} + \frac{a}{p}\right) = 0 \tag{11'}$$

gelten — was klar ist — und daß die Relationen (11′) eine Q-Basis des Lösungsraums von

$$\sum_{\mu \in \bar M} x_\mu e\left(\frac{\mu}{q}\right) = 0 \tag{13'}$$

enthalten: Für Primpotenzen $q = p^\sigma$ folgt das daraus, daß die p^σ Einheitswurzeln $e(\mu/p^\sigma)$ den Einheitswurzelkörper F_{p^σ} vom Grad $p^{\sigma-1}(p-1)$ erzeugen, daß durch (11′) genau $p^{\sigma-1}$ Lösungen von (13′) gegeben werden, und daß diese Lösungen offensichtlich linear unabhängig sind, da jedes $e(\mu/p^\sigma)$ in genau einer dieser Lösungen einen nichtverschwindenden Koeffizienten hat.

Für zusammengesetzte $q = \prod_P p^{\sigma_p}$ (P sei die Menge der Primteiler von q) führt man den Beweis darauf zurück, indem man mit Hilfe der Zerlegung

$$e\left(\frac{\mu}{q}\right) = \prod_P e\left(\frac{\mu_p}{p^{\sigma_p}}\right), \qquad \text{alle} \quad \mu_p \equiv \mu \bmod p^{\sigma_p},$$

den Körper F_q als Q-Tensorprodukt der $F_{p^{\sigma_p}}$ beschreibt.

10. Wenn $p^\sigma \,\Big|\, \dfrac{q}{(r, q)}$ mit $\sigma > 1$ ist, dann gilt sogar $(r, q) = (\mu, q)$ für alle $\mu \in \bar M$ mit $\mu \equiv r \bmod q/p$, also insbesondere wieder $p^\sigma \,\Big|\, \dfrac{q}{(\mu, q)}$. Für jeden anderen Primteiler $p' \,\Big|\, \dfrac{q}{(r, q)}$ gilt erst recht

$$p^\sigma \,\Big|\, \frac{q}{(\mu, q)} \qquad \text{für alle } \mu \in \bar M \text{ mit } \mu \equiv r \bmod q/p'.$$

Es gibt also keine Relation (11) oder (12), welche zugleich Summanden

$\cos\frac{2\pi\mu}{q}$ mit $p^\sigma \Big| \frac{q}{(\mu, q)}$ und solche mit $p^\sigma \nmid \frac{q}{(\mu, q)}$ enthält. Sei $\bar{M}_0 :=$ $= \left\{\mu \in \bar{M} \,\Big|\, \frac{q}{(\mu, q)} \text{ quadratfrei}\right\}$ und für jeden Teiler u von q, der nur aus höheren Primpotenzen zusammengesetzt ist, d.h. $p|u \Rightarrow p^2|u$ erfüllt, sei

$$\bar{M}_u := \left\{\mu \in \bar{M} \,\Big|\, \frac{q}{(\mu, q)} = uv \text{ mit } v \text{ quadratfrei, } (u, v) = 1\right\};$$

dann heißt das:

Der Raum $E_q := [\cos(2\pi\nu/q);\ \nu \in \bar{M}]$ $(= \boldsymbol{Q}(\cos(2\pi/q))$, *der maximale reelle Teilkörper von* F_q) *ist die direkte Summe der Unterräume* $[\cos(2\pi\mu/q);$ $\mu \in \bar{M}_u]$ *und des Unterraums*

$$\left[\cos\frac{2\pi\mu}{q}\,;\ \mu \in \bar{M}_0\right] = \left[\cos\frac{2\pi\nu}{q_0}\,;\ \nu \in \boldsymbol{Z}/q_0\boldsymbol{Z}\right],$$

wenn man mit $q_0 := \prod_P p$ *den maximalen quadratfreien Teiler von* q *bezeichnet.*

Aus § 8 (A) folgt nun, daß es zum Beweis von Satz 2 *genügt, die Transzendenz eines der Teilprodukte* $\prod_{\nu\in\bar{M}_0} \alpha_\nu^{\beta_\nu}$ *oder* $\prod_{\nu\in\bar{M}_u} \alpha_\nu^{\beta_\nu}$ *zu beweisen.*

11. Setzen wir zunächst voraus, daß q nicht nur aus den Primteilern 2 und 3 zusammengesetzt ist (dieser Fall wird in § 14 behandelt). Dann kann man bereits zeigen, daß das erste Teilprodukt

$$\prod_{\nu\in\bar{M}_0} \alpha_\nu^{\beta_\nu} = \prod_{\mu=1}^{q_0-1}\left(2-2\cos\frac{\pi\mu}{q_0}\right)^{2(-1)^{\mu q/q_0}\cos\frac{2\pi\mu}{q_0}}$$

transzendent ist. Entfernen wir aus diesem Produkt rationale Faktoren und fassen andere in naheliegender Weise zusammen, so steht hier im Fall $4|q$, also $2|\,q/q_0$ und $q_0 = 2q'$, $2\nmid q'$,

$$b(q) := \prod_{0<\nu<q'/2}\left(\frac{\left(2-2\cos\frac{2\pi\nu}{q'}\right)^2}{2-2\cos\frac{4\pi\nu}{q'}}\right)^{2\cos\frac{2\pi\nu}{q'}}, \tag{14}$$

im Fall $2|q$, $4\nmid q$, d.h. für $2\nmid q/q_0$ und $q_0 = 2q'$, $2\nmid q'$,

$$c(q) := \prod_{0<\nu<q'/2}\left(2-2\cos\frac{4\pi\nu}{q'}\right)^{2\cos\frac{2\pi\nu}{q'}}, \tag{15}$$

und schließlich erhält man für ungerade q mit $q' := q_0$

$$d(q) := \prod_{\substack{0<\nu<q'\\ 2|\nu}}\left(\frac{\left(2-2\cos\frac{2\pi}{q'}\cdot\frac{\nu}{2}\right)^2}{2-2\cos\frac{2\pi\nu}{q'}}\right)^{2\cos\frac{2\pi\nu}{q'}}. \tag{16}$$

Dies sind wieder Produkte der Form $\prod_{\nu\in M} \alpha_\nu^{\cos\frac{2\pi\nu}{q'}}$. Aus der neuen Indexmenge $M = \{0<\nu<q'/2\}$ bzw. $\{0<\nu<q'$ mit $2|\nu\}$ läßt sich leicht eine Untermenge $M_b := \{\nu\in M|\ (\nu, q') = 1\}$ auswählen mit der Eigenschaft, daß die $\cos(2\pi\nu/q')$, $\nu \in M_b$, eine Basis von $[\cos(2\pi\nu/q');\ \nu\in M]$ bilden: Wie in § 9 beweist man das mit Hilfe eines entsprechenden Satzes über den Kreisteilungskörper $F_{q'}$: Für Primzahlen p bilden die $e\left(\frac{\nu}{p}\right)$, $\nu = 1, \ldots, p-1$, sicher eine Basis von F_p. Da q' quadratfrei und $F_{q'}$ darum das $\boldsymbol{Q}$-Tensorprodukt der F_p ist, wenn p die Menge P' der Primteiler von q' durchläuft, bilden die $e\left(\frac{\nu}{q'}\right)$, $\nu\in\boldsymbol{Z}/q'\boldsymbol{Z}$ mit $(\nu, q') = 1$, eine Basis von $F_{q'}$.

Diese Auswahl von M_b gestattet also die Anwendung von § 8 (B): *Das fragliche Produkt ist transzendent, wenn*

$$\dim_{\boldsymbol{Q}}[\log\alpha_\nu;\ \nu\in M] > 1+\dim_{\boldsymbol{Q}}[\log\alpha_\nu;\ \nu\in M,\ (\nu, q')\neq 1] \tag{17}$$

erfüllt ist.

12. Um die Ungleichung (17) zu verifizieren, setzen wir

$$\gamma\left(\frac{\nu}{m}\right) := \log\left(2-2\cos\frac{2\pi\nu}{m}\right);$$

dann ist

$$\log\alpha_\nu = \begin{cases} 4\gamma\left(\frac{\nu}{q'}\right) - 2\gamma\left(\frac{2\nu}{q'}\right) & \text{für } 4|\,q,\\ 2\gamma\left(\frac{2\nu}{q'}\right) & \text{für } 2|\,q,\ 4\nmid q,\\ 4\gamma\left(\frac{\nu/2}{q'}\right) - 2\gamma\left(\frac{\nu}{q'}\right) & \text{für } 2\nmid q. \end{cases}$$

In allen drei Fällen gelten

$$[\log\alpha_\nu;\ \nu\in M] = \left[\gamma\left(\frac{\nu}{q'}\right);\ 0<\nu<q'\right]$$

und

$$[\log \alpha_\nu;\, \nu \in M,\ (\nu, q') \neq 1] = \left[\gamma\left(\frac{\nu}{q'}\right);\, 0 < \nu < q',\, (\nu, q') \neq 1\right].$$

Das ist klar für $2|q$, $4\nmid q$, da $\gamma(\nu/q') = \gamma\big((q'-\nu)/q'\big)$ und q' stets ungerade ist. In den anderen Fällen folgt es aus einem Lemma von Minkowski ([5], S. 523), daß eine Matrix $(a_{\mu\nu})$, $\mu, \nu = 1, \ldots, n$, invertierbar ist, wenn für $\mu \neq \nu$ alle $a_{\mu\nu} \leqslant 0$ sind und wenn alle $\sum\limits_{\mu} a_{\mu\nu} > 0$ sind.

Zum Beweis von (17) *genügt es also zu zeigen, daß*

$$\text{(18)}\quad \dim_Q\left[\gamma\left(\frac{\nu}{q'}\right);\, 0 < \nu < q'\right] > 1 + \dim_Q\left[\gamma\left(\frac{\nu}{q'}\right);\, 0 < \nu < q',\, (\nu, q') \neq 1\right]$$

richtig ist. Die Zahlen $2 - 2\cos(2\pi\nu/m) \in E_m$ sind bis auf Multiplikation mit einer Einheitswurzel gleich

$$\left(1 - e\left(\frac{\nu}{m}\right)\right)^2 \in F_m;$$

von diesen $1 - e\left(\frac{\nu}{m}\right)$, $0 < \nu < m$, weiß man, daß sie in der (multiplikativen) Gruppe, die von den Einheiten von F_m und den Primteilern von m in F_m erzeugt wird, eine Untergruppe von endlichem Index erzeugen ([7], Satz **144**, [2]). Mit anderen Worten ist also

$$\left[\gamma\left(\frac{\nu}{q'}\right);\, 0 < \nu < q'\right] = [\log|\varepsilon|;\, \varepsilon \text{ Einheiten in } E_{q'}] \oplus [\log p;\, p \text{ Teiler von } q'].$$

Wenn q' eine Primzahl > 3 ist, folgt daraus bereits die Gültigkeit von (18), weil die Dimension auf der rechten Seite verschwindet und die Einheitengruppe von $E_{q'}$ nichttrivial ist. Wenn q' zusammengesetzt ist, kann man den Vektorraum $[\gamma(\nu/q');\, 0 < \nu < q'$ mit $(\nu, q') \neq 1]$ beschreiben als Summe der Räume $[\gamma(\nu/s);\, 0 < \nu < s]$ über alle echten Teiler s von q'. Dann kommen auf beiden Seiten der Ungleichung (18) die gleichen $\log p$ vor, $p|q'$, sodaß es genügt, einen entsprechenden Satz über die Einheiten zu beweisen:

13. *Sei* $U(s) := [\log|\varepsilon|;\, \varepsilon$ Einheiten von $E_s]$. *Dann gilt für alle nichtprimen quadratfreien ungeraden* q':

$$\dim_Q U(q') - \dim_Q \sum_{s|q',\, s\neq q'} U(s) > 1.$$

Zum Beweis sei wieder P' die Menge der Primteiler von q', t die Anzahl der Primteiler, φ sei die Eulersche Funktion. Dann ist nach einer bekannten

kombinatorischen Schlußweise ([4], Thm. 260) und dem Dirichletschen Einheitensatz

$$\dim_Q U(q') - \dim_Q \sum_{s|q',\, s\neq q'} U(s)$$

$$= \dim_Q U(q') - \sum_{P'} \dim_Q U\left(\frac{q'}{p}\right) + \sum_{p\neq p'\in P'}\sum \dim_Q U\left(\frac{q'}{pp'}\right) - + \ldots + (-1)^t \dim_Q U(1)$$

$$= \frac{1}{2}\varphi(q') - 1 - \sum_{P'} \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{q'}{p}\right) + t + \sum_{p\neq p'\in P'}\sum \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{q'}{pp'}\right) - \frac{t(t-1)}{2} - + \ldots + (-1)^t\left(\frac{1}{2}\varphi(1) - 1\right) + \frac{(-1)^t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\prod_{P'}(p-1)\cdot\left(1 - \sum_{P'}\frac{1}{p-1} + \sum_{p\neq p'\in P'}\sum \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{p'-1} - + \ldots + (-1)^t \prod_{P'}\frac{1}{p-1}\right) - (1-1)^t + \frac{(-1)^t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\prod_{P'}(p-1)\prod_{P'}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right) + \frac{(-1)^t}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\prod_{P'}(p-2) + (-1)^t\right) > 1.$$

14. Es bleiben noch die Fälle zu betrachten, in denen q nur die Primteiler 2 und 3 enthält. Hier ist in der Tat das Teilprodukt $\prod\limits_{\nu\in\overline{M}_0} \alpha_\nu^{\beta_\nu}$ algebraisch, da die Exponenten rational sind. Für diejenigen $q = 2^\sigma 3^\varrho$, welche nicht schon in § 6 erfaßt sind, kann man für einen Transzendenzbeweis nach § 8(A) geeignete Teilprodukte folgendermaßen angeben ($\overline{M}_u$ ist dabei wie in § 10 definiert):

(a) $\sigma \geqslant 4$, $\varrho = 0$, wähle $u = 8 \Rightarrow$

$$\prod_{\nu\in\overline{M}_8} \alpha_\nu^{\beta_\nu} = \prod_{\mu=1,3,5,7}\left(2 - 2\cos\frac{\pi\mu}{8}\right)^{2\cos\frac{2\pi\mu}{8}} = (\sqrt{2}-1)^{2\sqrt{2}};$$

(b) $\sigma \geqslant 3$, $\varrho \geqslant 1$, wähle $u = 4 \Rightarrow$

$$\prod_{\nu\in\overline{M}_4} \alpha_\nu^{\beta_\nu} = \prod_{\substack{0<\mu<12\\ 2\nmid\mu}}\left(2 - 2\cos\frac{\pi\mu}{12}\right)^{2\cos\frac{2\pi\mu}{12}} = (2-\sqrt{3})^{2\sqrt{3}};$$

(c) $\sigma = 2,\ \varrho \geqslant 1,\ u = 4 \Rightarrow$

$$\prod_{\nu \in \bar{M}_4} \alpha_\nu^{\beta_\nu} = \prod_{\substack{0<\mu<12 \\ 2\nmid\mu}} \left(2 - 2\cos\frac{\pi\mu}{12}\right)^{-2\cos\frac{2\pi\mu}{12}} = (2-\sqrt{3})^{-2\sqrt{3}};$$

(d) $\sigma = 1,\ \varrho > 1,\ u = 9 \Rightarrow$

$$\prod_{\nu \in \bar{M}_9} \alpha_\nu^{\beta_\nu} = \prod_{\substack{0<\mu<18 \\ 3\nmid\mu}} \left(2 - 2\cos\frac{\pi\mu}{18}\right)^{2(-1)^\mu \cos\frac{2\pi\mu}{18}} = \prod_{\substack{0<\mu<9/2 \\ 3\nmid\mu}} \left(2 - 2\cos\frac{4\pi\mu}{9}\right)^{2\cos\frac{2\pi\mu}{9}}$$

(e) $\sigma = 0,\ \varrho > 1,\ u = 9 \Rightarrow$

$$\prod_{\nu \in \bar{M}_9} \alpha_\nu^{\beta_\nu} = \prod_{\substack{0<\mu<9 \\ 3\nmid\mu}} \left(2 - 2\cos\frac{\pi\mu}{9}\right)^{2(-1)^\mu \cos\frac{2\pi\mu}{9}} = \prod_{\substack{0<\mu<9 \\ 2\mid\mu,\, 3\nmid\mu}} \left(\frac{\left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\frac{\mu}{2}\right)^2}{2 - 2\cos\frac{2\pi\mu}{9}}\right)^{2\cos\frac{2}{}}$$

Die beiden letzten Produkte — jeweils mit 3 Faktoren — sind aus fo gendem Grund transzendent: Je zwei der Exponenten bilden eine Ba des Raumes $[\cos(2\pi\mu/9);\ 3\nmid\mu]$ (vgl. § 9). Für die Basiszahlen überträ sich die Argumentation des § 12 : Es ist

$$\left[\gamma\left(\frac{\mu}{9}\right);\ 0 < \mu < 9,\ 3\nmid\mu\right] = U(9) \oplus [\log 3]$$

dreidimensional, also ist das Transzendenzkriterium (9) anwendbar.

Literatur

[1] A. Baker, *Linear forms in the logarithms of algebraic numbers II*, Mathematika (1967), S. 102–107.

[2] H. Bass, *Generators and relations for cyclotomic units*, Nagoya Math. J. 27 (196 S. 401–407.

[3] J. Bogo, W. Kuyk, F. van Oystayen, *The graded algebras generated by t modular forms for the Hecke groups* $G(\lambda)$, $1 \leqslant \lambda < 2$, Bull. Soc. Math. Belgique (1974), S. 371–382.

[4] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 4. Auf London 1960.

[5] H. Hasse, *Zahlentheorie*, 3. Aufl., Berlin 1969.

[6] E. Hecke, *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktion gleichung*, Math. Ann. 112 (1936), S. 664–699.

[7] D. Hilbert, *Die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Jber. DMV 4 (1897), S. 175–546.

[8] J. Lehner, *Discontinuous groups and automorphic functions*, Providence, Rhode Island 1964.

[9] A. Leutbecher, *Über die Heckeschen Gruppen* $G(\lambda)$, Abh. Math. Sem. Hamburg 31 (1967), S. 199–205.

[10] — *Über die Heckeschen Gruppen* $G(\lambda)$, *II*, Math. Ann. 211 (1974), S. 63–86.

[11] J. Raleigh, *On the Fourier coefficients of triangle functions*, Acta Arith. 8 (1962/63), S. 107–111.

[12] J. Wolfart, *Eine Bemerkung über Heckes Modulgruppen*, Arch. Math. 29 (1977), S. 72–77.

FACHBEREICH MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT
FRANKFURT a. M.
Robert-Mayer-Str. 6-10
D-6000 Frankfurt a. M. 11

Eingegangen am 26. 8. 1978 (1095)