ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Scharen quadratischer Zahlkörper mit gleichgebauten Einheiten

von

MICHAEL NEUBRAND (Bonn)

Einleitung. Explizite Formeln für Einheiten in einer Serie reell-quadratischer Zahlkörper $\boldsymbol{Q}(\sqrt{D_N})$, $D_N \in \boldsymbol{Z}$, $N \in \boldsymbol{Z}$ erhält man sicher dann, wenn die Entwicklung von $\sqrt{D_N}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch für alle $N \in \boldsymbol{Z}$ gemeinsam fortschreitet, wie das etwa für $\sqrt{N^2+1} = [N, \overline{2N}]$ gilt. Solche Entwicklungen sind seit Euler [4] in großer Zahl bekannt (vgl. etwa neuerdings [1], [3], [8]).

Demgegenüber werden im folgenden(¹) auf algebraischen Wege, also unabhängig vom Algorithmus, solche Einheitenformeln hergeleitet. Die für die betrachteten Zahlkörperklassen (§ 1) notwendigerweise zu machenden Ansätze ergeben sich dabei – basierend auf [11] und wertvollen Gesprächen mit Herm. Schmidt, wofür ich sehr danke – aus funktionentheoretischen Überlegungen (§ 2). Sodann werden einige wichtige Sonderfälle aufgezählt, die bereits eine Vielzahl der in der Literatur vorkommenden Einheitenformeln umgreifen (§ 3). Die allgemeine Bedingung dafür, daß für die Zahlkörper des Typs $\boldsymbol{Q}(\sqrt{aN^2+bN+c})$, $N \geqslant N_0$, $N \in \boldsymbol{Z}$ Einheiten in geschlossener Form angegeben werden können, gibt Satz 2 in § 4 an. Vermittels eines Satzes von Schinzel [9] und Bemerkungen von Herm. Schmidt [12] läßt sich daraufhin der Zusammenhang mit der Kettenbruchtheorie vollständig aufklären (§ 5).

1. Jedes Polynom

$$D(X) = aX^2+bX+c \in \boldsymbol{Z}[X] \tag{1}$$

mit $a > 0$, $\Delta := b^2-4ac \neq 0$ definiert vermöge

$$\mathrm{kl}(a, b, c) := \{\boldsymbol{Q}(\sqrt{aN^2+bN+c}) \mid N \in \boldsymbol{Z}, N \geqslant N_0\} \tag{2}$$

(¹) Es handelt sich um die Überarbeitung eines Abschnittes der Dissertation des Verf.: *Einheiten in algebraischen Funktionen- und Zahlkörpern*, Würzburg 1976.

eine Klasse reell-quadratischer Zahlkörper, wobei $N_0 \in \boldsymbol{Z}$ so zu wählen ist, daß $D(N) > 0$ ausfällt für alle $N \geqslant N_0$. Jede solche Klasse enthält unendlich viele verschiedene Zahlkörper; denn andernfalls dürften die Quadratzahlen $(N_0 \leqslant)\ N = K^2$, $K \in \boldsymbol{Z}$ nur endlich viele verschiedene quadratfreie Kerne D_j $(j = 1, \ldots, J)$ von $D(K^2)$ erzeugen. Wenigstens eine der Gleichungen

$$D_j Y^2 = aK^4 + bK^2 + c$$

hätte dann aber unendlich viele ganzzahlige Lösungen, gegen einen bekannten Satz von Siegel.

Im folgenden wird sich als notwendige Bedingung $a = \alpha^2$ mit $\alpha \in \boldsymbol{Z}$ herausstellen. Dann sieht man leicht, daß der Trivialfall $\boldsymbol{Q}\big(\sqrt{D(N)}\big) = \boldsymbol{Q}$ höchstens endlich oft eintreten kann. Denn die diophantische Gleichung $M^2 = D(N)$ läßt sich zu

$$(2aN + b)^2 - 4a^2M^2 = \Delta$$

umformen und hat daher ersichtlich höchstens endlich viele Lösungen $(N, M) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$.

Unter den Zahlkörperklassen $\mathrm{kl}(a, b, c)$ sollen nun diejenigen bestimmt werden, in denen man für jeden Zahlkörper $\boldsymbol{Q}\big(\sqrt{D(N)}\big) \in \mathrm{kl}(a, b, c)$ eine Einheit

$$(3)\qquad \varepsilon(N) = p(N) + q(N)\sqrt{D(N)}$$

angeben kann mit für die gesamte Klasse gemeinsamen, d.h. von N unabhängigen Polynomen $p(\cdot)$, $q(\cdot) \in \boldsymbol{Q}[\cdot]$. Eine solche Klasse wollen wir kurz *Klasse mit gleichgebauten Einheiten* nennen.

2. Da also die Normgleichung

$$(4)\qquad \mathrm{Norm}_{\boldsymbol{Q}(\sqrt{D(N)})/\boldsymbol{Q}}\big(\varepsilon(N)\big) = p(N)^2 - q(N)^2 D(N) = \pm 1$$

für unendlich viele $N \in \boldsymbol{Z}$ gelten soll, muß diese Gleichung als Polynomgleichung auch identisch in einer Variablen z über $\boldsymbol{C}$ erfüllt sein:

$$(5)\qquad p(z)^2 - q(z)^2 D(z) = \pm 1.$$

Den Ausdruck in (5) kann man — nun Herm. Schmidt [11], S. 186 ff. folgend — als Norm

$$(6)\qquad \mathrm{Norm}_{\boldsymbol{C}(z,w)/\boldsymbol{C}(z)}(u) = \big(p(z) + q(z)\sqrt{D(z)}\big)\big(p(z) - q(z)\sqrt{D(z)}\big)$$

der algebraischen Funktion

$$u = p(z) + q(z)w$$

des durch

$$w^2 = D(z).$$

definierten algebraischen Funktionenkörpers $\boldsymbol{C}(z, w)$ interpretieren. Dann sagt die Gleichung

$$(7)\qquad \mathrm{Norm}_{\boldsymbol{C}(z,w)/\boldsymbol{C}(z)}(u) = \mathrm{const.},$$

die wegen (5) besteht, aus, daß die Funktion $u \in \boldsymbol{C}(z, w)$ höchstens an den über $z = \infty$ gelegenen Stellen der Riemannschen Fläche (RFl.) von $\boldsymbol{C}(z, w)$ Pole bzw. Nullstellen haben kann (betrachte die Gleichung für u über $\boldsymbol{C}[z]$). Der Divisor, der zu u gehört, hat also die Form

$$(8)\qquad \mathrm{div}\, u = \mathfrak{u}_1^m \mathfrak{u}_2^{-m}, \quad m \in \boldsymbol{Z},$$

wo $\mathfrak{u}_1$ und $\mathfrak{u}_2$ die zwei verschiedenen über $z = \infty$ gelegenen Stellen der RFl. bezeichnen(²). Da diese Divisoren eine unendliche zyklische Gruppe bilden, ergibt sich ohne weiteres, daß alle Funktionen u mit (8) aus einer Funktion u_1 mit

$$(9)\qquad \mathrm{div}\, u_1 = \mathfrak{u}_1^1 \mathfrak{u}_2^{-1}$$

hervorgehen durch

$$(10)\qquad u = Cu_1^k, \quad k \in \boldsymbol{Z},\ C \in \boldsymbol{C}.$$

Eine Funktion u_1 mit (9) ist z. B.

$$(11)\qquad u_1 = (2az + b) + 2\sqrt{a}\,w,$$

die wegen der bekannten Identität

$$(12)\qquad (2az + b)^2 - 4aD(z) = \Delta$$

die Norm Δ hat. Daraus ergibt sich die normierte Funktion

$$(13)\qquad u^* = \frac{2az + b}{\sqrt{|\Delta|}} + \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{|\Delta|}}\,w$$

mit Divisor wie in (9) und mit

$$(14)\qquad \mathrm{Norm}_{\boldsymbol{C}(z,w)/\boldsymbol{C}(z)}(u^*) = \mathrm{sg}\,\Delta.$$

Es kommt aber für die Gewinnung von gleichgebauten Zahlkörpereinheiten zusätzlich auf rationale Koeffizienten in den Komponenten der Funktionen u_1 bzw. u an. Aus (10) und (11) erkennt man, daß hierfür notwendig

$$(15)\qquad a = \alpha^2 \quad \text{mit} \quad \alpha \in \boldsymbol{Z}$$

(²) Solche Funktionen werden in [7] „z-Einheiten" genannt und auch für allgemeinere Funktionenkörper untersucht. Doch kann hier auf eine generelle Theorie verzichtet und alles ad hoc entwickelt werden.

ist. Ist dann noch $\Delta = \pm\delta^2$ mit einem $\delta \in N$, dann hat u^* die gewünschten Eigenschaften; andernfalls gehe man zu

$$u^{*2} = \frac{2(2a^2z+b)^2}{|\Delta|} - \operatorname{sg}\Delta + \frac{4a(2a^2z+b)}{|\Delta|}w \tag{16}$$

über. Das bisherige wird zusammengefaßt in

Satz 1. *Dafür, daß* $\mathrm{kl}(a, b, c)$ *eine Klasse reell-quadratischer Zahlkörper mit gleichgebauten Einheiten ist, ist notwendig* $a = \alpha^2$ *mit* $\alpha \in \mathbf{Z}$. *Sodann kommen als Einheitenformeln nur Potenzen der folgenden Ausdrücke in Betracht:*

(i) *falls* $\Delta = \pm\delta^2$ *mit* $\delta \in N$

$$\varepsilon^* := \frac{2\alpha^2N+b}{\delta} + \frac{2\alpha}{\delta}\sqrt{D(N)},$$

$$\mathrm{Norm}(\varepsilon^*) = \operatorname{sg}\Delta;$$

(ii) *sonst*

$$\varepsilon^{**} := \frac{2(2\alpha^2N+b)^2}{|\Delta|} - \operatorname{sg}\Delta + \frac{4\alpha(2\alpha^2N+b)}{|\Delta|}\sqrt{D(N)},$$

$$\mathrm{Norm}(\varepsilon^{**}) = 1.$$

3. ε^* und ε^{**} haben zwar die für Einheiten verlangten Normwerte ±1, doch muß noch dafür gesorgt werden, daß ε^* bzw. ε^{**} ganzalgebraisch in den Zahlkörpern $Q(\sqrt{D(N)})$ sind. Dies ist ersichtlich in den folgenden Sonderfällen (a), (b), (c), (d) erfüllt, wo die Koeffizienten α^2, b, c von $D(N)$ durch Gleichungen vom Typ der Pellschen Gleichung verbunden sind.

(a) $\Delta = 1$, $\delta = 1$: $b^2 - 4\alpha^2c = 1$

$$\varepsilon^* = 2\alpha^2N + b + 2\alpha\sqrt{D(N)} \in \mathbf{Z}[\sqrt{D(N)}]. \tag{17}$$

Im folgenden wird wegen $\Delta \equiv 0(4)$ stets $b = 2b'$ mit $b' \in \mathbf{Z}$ gesetzt.

(b) $\Delta = \pm4$, $\delta = 2$: $b'^2 - \alpha^2c = \pm1$

$$\varepsilon^* = \alpha^2N + b' + \alpha\sqrt{D(N)} \in \mathbf{Z}[\sqrt{D(N)}]. \tag{18}$$

(c) $\Delta = \pm8$: $b'^2 - \alpha^2c = \pm2$

$$\varepsilon^{**} = (\alpha^2N+b')^2 - \operatorname{sg}\Delta + \alpha(\alpha^2N+b')\sqrt{D(N)} \in \mathbf{Z}[\sqrt{D(N)}]. \tag{19}$$

(d) $\Delta = \pm16$, $\delta = 4$: $b'^2 - \alpha^2c = \pm4$

$$\varepsilon^* = \frac{\alpha^2N+b'}{2} + \frac{\alpha}{2}\sqrt{D(N)}. \tag{20}$$

Auch in diesem Fall ist ε^* ganzalgebraisch, da Norm und Spur ganzrational sind.

Die Trivialfälle der Pellschen Gleichungen (a), ..., (d) führen auf die folgenden Zahlkörperklassen:

$b = 0$:

	$D(N)$	Einheit	Norm
(21)	(b) $N^2 \pm 1$	$\varepsilon^* = N + \sqrt{N^2 \pm 1}$	∓1
(22)	(c) $N^2 \pm 2$	$\varepsilon^{**} = N^2 \pm 1 + N\sqrt{N^2 \pm 2}$	$+1$
(23)	(d) $N^2 \pm 4$	$\varepsilon^* = \frac{N}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{N^2 \pm 4}$	∓1

Das sind die von Herm. Schmidt [11] unter anderem Aspekt (vgl. Satz 3 in § 5) behandelten Polynome. Degert [2] hat gezeigt, daß es sich jeweils um die Grundeinheiten in den zugehörigen Zahlkörpern handelt, falls $D(N) = N^2 \pm c$ quadratfrei und $-N < c \leqslant N$ ist.

$c = 0$: Nun ist jeweils α als weiterer ganzzahliger Parameter frei wählbar. Um dies anzudeuten schreiben wir $\alpha = K$, $K \in \mathbf{Z}$.

	$D(N)$	Einheit	Norm
(24)	(a) $K^2N^2 \pm N$	$\varepsilon^* = 2K^2N \pm 1 + 2K\sqrt{D(N)}$	$+1$
(25)	(b) $K^2N^2 \pm 2N$	$\varepsilon^* = K^2N \pm 1 + K\sqrt{D(N)}$	$+1$
(26)	(d) $K^2N^2 \pm 4N$	$\varepsilon^* = \frac{K^2N}{2} \pm 1 + \frac{K}{2}\sqrt{D(N)}$	$+1$

Aus (26) erhält man alle von Degert [2] betrachteten Fälle, nämlich die Zahlkörper $Q(\sqrt{D(N)})$ mit

$$D(N) = N^2 \pm c, \quad c > 0 \quad \text{mit} \quad c|4N.$$

Schreibt man die Teilbarkeitsbeziehung als $cc' = 4N$ mit einem $c' \in N$ aus, dann kommt nämlich

$$c'^2D(N) = c'^2N^2 \pm 4c'N = (c'N)^2 \pm 4(c'N) =: N'^2 \pm 4N'.$$

Also existiert nach (26) die Einheit

$$\varepsilon^* = \frac{N'}{2} \pm 1 + \frac{1}{2}\sqrt{N'^2 \pm 4N'} = \frac{c'N}{2} \pm 1 + \frac{c'}{2}\sqrt{N^2 \pm c}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4N^2}{c} \pm 2 + \frac{4N}{c}\sqrt{N^2 \pm c}\right),$$

wie sie Degert angibt. Degert zeigt darüberhinaus, daß dies, abgesehen von den vorhin schon einbegriffenen Fällen $c = 1, 4$, die Grundeinheit im zugehörigen Zahlkörper liefert, falls $D(N)$ quadratfrei und $-N < c \leqslant N$ ist.

4. Die Formeln aus Satz 1 liefern genau dann Einheiten in den Zahlkörpern von $\mathrm{kl}(a, b, c)$, wenn ε^* und ε^{**} ganzalgebraische Größen sind. Die Bedingung hierfür gibt

SATZ 2. *Genau dann, wenn*

$$\Delta \mid 4(2a^2, b)^2 \tag{27}$$

gilt, gibt es in der Klasse $\mathrm{kl}(a^2, b, c)$ *reell-quadratischer Zahlkörper gleichgebaute Einheiten. Diese sind von der Form* ε^{*j} *bzw.* ε^{**j} $(j \in \boldsymbol{Z})$ *gemäß der Fallunterscheidung in Satz* 1.

Beweis. Die notwendigen Ansätze für gleichgebaute Einheiten liegen nach Satz 1 fest. Es genügt zu untersuchen, wann ε^{**} ganzalgebraisch in allen Zahlkörpern aus $\mathrm{kl}(a^2, b, c)$ ist. In diesem Falle sind nämlich sowohl die ε^{**j} $(j \in \boldsymbol{Z})$, als auch ε^*, falls es Element der Zahlkörper ist, wegen $\varepsilon^{*2} = \varepsilon^{**}$ ganzalgebraisch. Da $\mathrm{Norm}(\varepsilon^{**}) = 1$ bereits erfüllt ist, ist notwendig und hinreichend für die Ganzheit von ε^{**}, daß

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}(\varepsilon^{**}) &= 2\cdot\frac{2(2a^2N+b)^2}{|\Delta|} - 2\,\mathrm{sg}\,\Delta \\ &= \frac{4(2a^2, b)^2}{|\Delta|}\left(\frac{2a^2}{(2a^2, b)}N + \frac{b}{(2a^2, b)}\right)^2 - 2\,\mathrm{sg}\,\Delta\end{aligned} \tag{28}$$

für alle $N \in \boldsymbol{Z}$, $N \geqslant N_0'$ ganzrational ist. N_0' wähle man dabei so, daß $D(N_0') > 0$ und für kein $N \geqslant N_0'$ mehr $D(N) = M^2$ mit $M \in \boldsymbol{N}$ eintritt (vgl. § 1). Da aber die arithmetische Progression

$$A(N) = \frac{2a^2}{(2a^2, b)}N + \frac{b}{(2a^2, b)}$$

teilerfremde Koeffizienten hat, stellt sie nach Dirichlet bei passendem $N \geqslant N_0'$ auch zu Δ teilerfremde Zahlen dar. Ganzheit in (28) tritt also genau dann ein, wenn wie behauptet $\Delta \mid 4(2a^2, b)^2$ (vgl. auch Schinzel [9], Beweis zu Th. 5.). ∎

Satz 2 enthält auch Nathansons [6] Satz, daß die Gleichung („polynomial Pell's equation") (5) mit $D(z) = z^2 + c$ genau für $c = \pm 1, \pm 2$ Lösungen $p, q \in \boldsymbol{Z}[z]$ hat. Ganzzahlige Koeffizienten in $p(z)$ und $q(z)$ erhält man ja offenbar bei $\Delta \mid 2(2a^2, b)^2$, also bei $c \mid 2$ im Spezialfall. Mit dieser Teilbarkeitsbeziehung ist auch das in [6] offen gelassene Problem, alle Polynome $D(z)$ mit in $\boldsymbol{Z}[z]$ lösbarer Pell-Gleichung (5) zu finden, wenigstens für $\mathrm{grad}\, D(z) = 2$ vollständig gelöst.

5. Die gleiche Teilbarkeitsbeziehung wie in Satz 2 für die Existenz gleichgebauter Einheiten in einer Klasse $\mathrm{kl}(a^2, b, c)$ reell-quadratischer Zahlkörper angegeben, gewann Schinzel [9] als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die primitiven Perioden der regelmäßigen Kettenbruchentwicklungen von $\sqrt{D(N)}$ bei $N \to \infty$ beschränkt bleiben. Dies wiederum ist nach Herm. Schmidt [12] gleichbedeutend damit, daß sich „die Zahlen $N \geqslant \bar{N}$ in eine endliche Anzahl von Klassen der Art aufteilen, daß für jede einzelne von ihnen eine einheitliche Entwicklung" von $\sqrt{D(N)}$ in einen regelmäßigen Kettenbruch mit ganzwertigen Polynomen von N als Teilnennern besteht (vgl. Herm. Schmidt [11], S. 186). Beispiel für eine solche Klasseneinteilung wäre etwa

$$\sqrt{N^2+4} = [N, \overline{N/2, 2N}] \quad \text{für} \quad N \equiv 0(2),$$

$$\sqrt{N^2+4} = [N, \overline{(N-1)/2, 1, 1, (N-1)/2, 2N}] \quad \text{für} \quad N \equiv 1(2).$$

Zusammengenommen ergibt sich also der

SATZ 3. *Genau dann kann man die ganzen Zahlen* $N \geqslant N_0$ *so in endlich viele Klassen* $\mathfrak{K}_j$ *aufteilen, daß für alle* $N \in \mathfrak{K}_j$ *eine gemeinsame Kettenbruchentwicklung*

$$\sqrt{D(N)} = [b_0(N), \overline{b_1(N), \ldots, b_k(N)}]$$

mit für $N \in \mathfrak{K}_j$ *ganzwertigen Polynomen* $b_i(N)$ *besteht, wenn* $\mathrm{kl}(a^2, b, c) = \{Q(\sqrt{D(N)})\}$ *eine Klasse reell-quadratischer Zahlkörper mit gleichgebauten Einheiten ist.*

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des Satzes 10 von Herm. Schmidt [11]. Dort werden die Polynome

$$D(N) = N^2 + c$$

untersucht, für die sich — nun auch aus Satz 2 mittels $c \mid 4$ — nur die Werte $c = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ als zulässig herausstellen. Daß $c = 1, 2$ dazugehören, findet man übrigens schon in der erwähnten Arbeit von Euler [4].

6. Erzeugt man die Zahlkörper $Q(\sqrt{D(N)})$ durch ein Polynom $D(N)$ mit $\mathrm{grad}\, D > 2$, dann gelangt man auf die beschriebene Weise zu elliptischen bzw. hyperelliptischen Funktionenkörpern. An die Stelle der hier ($\mathrm{grad}\, D = 2$, rationaler Funktionenkörper) leicht angebbaren Beziehungen (9)–(11) tritt nun das Problem der Existenz von „z-Einheiten". Der elliptische Fall wird in [7] durch Bezugnahme auf Mazurs Satz [5] über die Torsionspunkte auf elliptischen Kurven über Q behandelt. Für hyperelliptische „z-Einheiten" findet man in [7] gewisse Berechnungsmöglichkeiten, aber keinen generellen Existenzsatz.

Zusatz bei der Korrektur: 1. Inzwischen hat H. J. Stender (J. Reine Angew. Math. 311/312 (1979), S. 301–306) gezeigt: Ist $D(N)$ quadratfrei, dann ist ε^* bzw. ε^{**} aus Satz 1 — von einigen explizit angebbaren Anfangswerten für N abgesehen — stets die Grundeinheit in $Q(\sqrt{D(N)})$.

2. Seit Abel (J. Reine Angew. Math. 1 (1826), S. 185–221) ist bekannt, daß mit der Lösbarkeit der Pellschen Gleichung (5) in Polynomen $p(z)$, $q(z)$ äquivalent die logarithmische Integrierbarkeit gewisser algebraischer Differentiale ist. Zur expliziten Lösung dieses Problems sind soeben von J. H. Davenport („On the integration of algebraic functions", Lecture Notes in Computer Science Nr. 102, Springer: Berlin–Heidelberg–New York 1981) zum Einsatz in Computern geeignete Algorithmen angegeben worden. Damit kann man also nun auch die Frage nach der Existenz von z-Einheiten im Falle $w^2 = D(z)$ mit grad $D \geq 4$ entscheiden (vgl. Abschnitt 6. dieser Arbeit).

Literatur

[1] L. Bernstein und H. Hasse, *Ein formales Verfahren zur Herstellung parameterabhängiger Scharen quadratischer Grundeinheiten*, J. Reine Angew. Math. 276 (1975), S. 206–212.

[2] G. Degert, *Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reell-quadratischer Zahlkörper*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22 (1958), S. 92–97.

[3] Ch. Denenberg, *Periodic expansions and units in quadratic and cubic number fields*, J. Reine Angew. Math. 278/279 (1975), S. 266–277.

[4] L. Euler, *De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo*, Werke, ser. I, vol. 3 (1765).

[5] B. Mazur, *Rational points on modular curves*, in: Serre and Zagier (Ed.), *Modular functions of one variable. V.* Proceedings Int. Conf. Bonn 1976. Lecture Notes in Math. 601 (1977).

[6] M. B. Nathanson, *Polynomial Pell's equation*, Proc. Amer. Math. Soc. 56 (1976), S. 89–92.

[7] M. Neubrand, *Einheiten in algebraischen Funktionen- und Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. 303/304 (1978), S. 170–204.

[8] H. U. Nordhoff, *Explizite Darstellung von Einheiten und ihre Anwendung auf Mehrklassigkeitsfragen bei reell-quadratischen Zahlkörpern. I*, ibid. 268/269 (1974), S. 131–149.

[9] A. Schinzel, *On some problems of the arithmetical theory of continued fractions*, Acta Arith. 6 (1961), S. 393–413.

[10] —, —. *II*, ibid. 7 (1962), S. 287–298.

[11] Herm. Schmidt, *Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen*, Math. Z. 52 (1948), S. 168–192.

[12] — *Über einheitliche Kettenbruchentwicklungen für die Quadratwurzel aus einem Polynom in einer ganzzahligen Variablen*, Manuskript 1975.

SEMINAR FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT, Bonn

Eingegangen am 17.4.1978
und in revidierter Form am 30.8.1978 (1064)

ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Propriétés arithmétiques de séries rationnelles et ensembles denses

par

C. Reutenauer (Paris)

1. Introduction. Une *série rationnelle* (cf. G. Pólya 10]) est le développement en série de Taylor d'une fraction rationnelle régulière à l'origine. De nombreuses propriétés de la fraction rationnelle se déduisent de propriétés arithmétiques des coefficients de la série associée. Il en est ainsi du lemme de Fatou: si les coefficients de la série sont entiers alors la fraction rationnelle est un quotient P/Q de deux polynômes premiers entr'eux à coefficients entiers avec $Q(0) = 1$.

G. Rauzy a montré que la même conclusion subsiste avec une hypothèse plus faible: il suffit de supposer que l'ensemble des coefficients qui sont entiers rencontre toute progression arithmétique [12]. Un tel ensemble est appelé arithmétiquement dense par Rauzy; dans d'autres problèmes des ensembles de cette nature on été considérés (voir par exemple Lewis, Davenport et Schinzel [15]). Un tel ensemble est dense pour la topologie sur $\boldsymbol{N}$ qui rend continues les injections $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z}_p$. Une fonction continue qui s'annule sur un ensemble dense est donc nulle. Parallèlement, on déduit d'un théorème de Skolem (voir [9]) que si les coefficients d'une série sont nuls sur un ensemble dense, cette série se réduit à un polynôme.

Dans cet article, nous étudions des propriétés arithmétiques des séries rationnelles en plusieurs variables non commutatives (cf. S. Eilenberg [3]). Remarquons que si $\sum a_n t^n$ est une série rationnelle, le coefficient a_n est égal à une combinaison linéaire fixe des coefficients de la puissance $n$ème d'une matrice fixe; la matrice en question n'est autre que la matrice compagnon de la relation de récurrence vérifiée par la suite (a_n). Ainsi est on amené à généraliser la notion de séries rationnelles (définition 1). On se donne un nombre fini $A_1, \ldots, A_r$ de matrices carrées et l'on étudie une combinaison linéaire fixée des coefficients des matrices éléments du semigroupe engendré par les $A_1, \ldots A_r$; si $t_1, \ldots, t_r$ désignent des variables non commutatives, on obtient ainsi une série formelle en les t_i: le coefficient de $t_{i_1} t_{i_2} \ldots t_{i_k}$ est combinaison linéaire des coefficients de $A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}$. Les séries obtenus de cette façon seront appelées les séries rationnelles; M. P. Schützenberger a montré (voir par exemple S. Eilenberg [3], th. 5.1,