ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Ensembles normaux et équirépartition complète

par

JEAN COQUET (Valenciennes)

I. Introduction.

I.1. Notations. $\boldsymbol{R}$ est l'ensemble des nombres réels, $\boldsymbol{Z}$ celui des entiers, $\boldsymbol{N}$ celui des entiers non négatifs. $\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R} - \{0\}$, $\boldsymbol{Z}^* = \boldsymbol{Z} - \{0\}$, $\boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{N} - \{0\}$. Pour tout x réel, on pose $e(x) = e^{2i\pi x}$. Pour tout $q \in \boldsymbol{N}^*$, G_q désigne $\{0, \ldots, q-1\}$.

I.2. Résultat. Un sous-ensemble B de $\boldsymbol{R}^*$ est dit *normal* s'il existe une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ de nombres réels telle que, pour tout $x \in \boldsymbol{R}^*$,

$$x \in B \Leftrightarrow x\Lambda \text{ est équirépartie modulo } 1.$$

Les sous-ensemb es normaux de $\boldsymbol{R}^*$ ont été caractérisés par G. Rauzy [2]. Sans utiliser cette caractérisation, nous prouvons le

THÉORÈME 1. *Soit B un ensemble normal. Il existe une suite $\Theta = (\theta_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ de nombres réels telle que, pour tout $x \in \boldsymbol{R}^*$,*

$x \notin B \Rightarrow x\Theta$ n'est pas équirépartie modulo 1,

$x \in B \Rightarrow x\Theta$ est complètement équirépartie modulo 1 ([3], p. 22).

II. Construction de Θ. B étant normal, il existe une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ de nombres réels telle que $x\Lambda$ soit équirépartie modulo 1 si et seulement si $x \in B$.

Pour tout entier $q \geqslant 2$, soit $(m(q, n))_{n \in \boldsymbol{N}}$ une suite d'éléments de G_q complètement équirépartie dans G_q. Une telle suite existe! ([3], p. 23).

On peut donc trouver $n_q \in \boldsymbol{N}$ tel que: $\forall N \in \boldsymbol{N}$,

$$N \geqslant n_q \Rightarrow \forall (a_1, \ldots, a_q) \in G_q^q,$$

$$\left| \operatorname{Card}\{n' < N, (m(q, n'), \ldots, m(q, n'+q-1)) = (a_1, \ldots, a_q)\} - \frac{N}{q^q} \right| \leqslant \frac{N}{2^q q^q}.$$

Soit alors $(N_q)_{q \in \boldsymbol{N}^*}$ une suite d'entiers telle que:

$$\forall q \geqslant 2, \quad N_{q-1} \geqslant q n_q \quad \text{et} \quad N_q \geqslant q(N_1 + \ldots + N_{q-1}).$$

On pose $M_q = \sum_{1\leqslant j\leqslant q} N_j$. Soit $A_1 = \boldsymbol{N}\cap[0, M_1[$ et, pour $q\geqslant 2$,

$$A_q = \boldsymbol{N}\cap[M_{q-1}, M_q[, \quad \text{de sorte que Card } A_q = N_q.$$

On pose $\theta_n = \lambda_0$ si $n\in A_1$ et $\theta_n = \lambda_{m(q,n-M_{q-1})}$ si $n\in A_q$, $q\geqslant 2$.

III. Démonstration du théorème 1. En vertu du critère de Weyl, nous devons montrer que:

$$(1) \qquad x\notin B \Rightarrow \exists c\in \boldsymbol{Z}^* \text{ tel que } \overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\Big|\sum_{n<N} e(cx\theta_n)\Big| > 0$$

et que:

(2) $x\in B \Rightarrow \forall k\in\boldsymbol{N}^*$, $\forall(c_1,\ldots,c_k)\in\boldsymbol{Z}^k-\{(0,\ldots,0)\}$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n<N} e\big(x(c_1\theta_n+\ldots+c_k\theta_{n+k-1})\big)\xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

III.1. Preuve de (1). Puisque $x\notin B$, il existe $c\in\boldsymbol{Z}^*$ tel que

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\Big|\sum_{n<N} e(cx\lambda_n)\Big| > 0.$$

$$\sum_{n<M_q} e(cx\theta_n) = \sum_{n<M_{q-1}} e(cx\theta_n) + \sum_{n'<N_q} e(cx\lambda_{m(q,n')})$$
$$= O(M_{q-1}) + \sum_{a\in G_q} e(cx\lambda_a)\cdot\text{Card}\{n'<N_q,\ m(q,n')=a\}$$
$$= o(M_q) + N_q\Big(\frac{1}{q}\sum_{a=0}^{q-1} e(cx\lambda_a)+\frac{\varepsilon}{2^q}\Big) \quad \text{avec } |\varepsilon|\leqslant 1.$$

Donc

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\frac{1}{M_q}\Big|\sum_{n<M_q} e(cx\theta_n)\Big| = \overline{\lim_{q\to\infty}}\frac{1}{q}\Big|\sum_{a=0}^{q-1} e(cx\lambda_a)\Big| > 0.$$

A fortiori,

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{N}\Big|\sum_{n<N} e(cx\theta_n)\Big| > 0.$$

III.2. Preuve de (2). Soit $q\geqslant k$. Soit N entier tel que $N-1\in A_{q+1}$. Soit $x\in B$. Posons $z_n = e\big(x(c_1\theta_n+\ldots+c_k\theta_{n+k-1})\big)$

$$\sum_{n<N} z_n = \sum_{n<M_{q-1}} z_n + S_1 + S_2$$

où

$$S_1 = \sum_{n\in A_q} z_n \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{M_q\leqslant n<N} z_n.$$

D'abord,

$$\sum_{n<M_{q-1}} z_n = O(M_{q-1}) = o(M_q) = o(N).$$

D'autre part,

$$S_1 = O(k) + \sum_{n'<N_q-(k-1)} e\big(x(c_1\lambda_{m(q,n')}+\ldots+c_k\lambda_{m(q,n'+k-1)})\big)$$
$$= O(k) + \sum_{(a_1,\ldots,a_k)\in G_q^k} e\big(x(c_1\lambda_{a_1}+\ldots+c_k\lambda_{a_k})\big)\ \text{Card}\big\{n'<N_q,\ \big(m(q,n'),\ldots$$
$$\ldots, m(q,n'+k-1)\big) = (a_1,\ldots,a_k)\big\}$$
$$= o(N) + N_q\Big(\frac{1}{q^k}\sum_{(a_1,\ldots,a_k)\in G_q^k} e\big(x(c_1\lambda_{a_1}+\ldots+c_k\lambda_{a_k})\big)+\frac{\varepsilon}{2^q}\Big) \quad \text{avec } |\varepsilon|\leqslant 1$$
$$= o(N) + N_q\prod_{r=1}^{k}\Big(\frac{1}{q}\sum_{a_r=0}^{q-1} e(xc_r\lambda_{a_r})\Big) = o(N).$$

Enfin, si $N-M_q<n_{q+1}$,

$$|S_2|\leqslant n_{q+1} = o(N_q) = o(N).$$

Et, si $N-M_q\geqslant n_{q+1}$, on a, comme pour S_1,

$$S_2 = O(k)+(N-M_q)\Big(\prod_{r=1}^{k}\Big(\frac{1}{q+1}\sum_{a_r=0}^{q} e(xc_r\lambda_{a_r})\Big)+\frac{\varepsilon}{2^{q+1}}\Big) \quad \text{avec } |\varepsilon|\leqslant 1$$
$$= o(N).$$

Finalement,

$$\sum_{n<N} z_n = o(N).$$

IV. Remarques.

IV.1. A l'aide des idées développées dans [1], il est possible de prouver le

THÉORÈME 2. *Soit B un ensemble normal. Soit φ: $\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{R}$ à valeurs $\geqslant 0$ et telle que $\varphi(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.*
Il existe une suite $U=(u_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de réels telle que:
1) $0\leqslant|u_n|\leqslant\varphi(n)$ *pour tout $n\in\boldsymbol{N}$.*
2) *Si $x\notin B$, xU ne soit pas équirépartie modulo* 1.
3) *Si $x\in B$, xU soit complètement équirépartie modulo* 1.

Principe de la démonstration: Soit Θ la suite construite dans la preuve du théorème 1. Comme il est remarqué dans [1], on peut supposer que φ est non décroissante. On applique alors à Θ l'algorithme décrit dans [1], pour construire U par „blocs".

Soit $m_0 = \operatorname{Inf}\{n \in N \mid \varphi(n) \geqslant |\theta_0|\}$. Pour $n < m_0$, on pose $u_n = 0$.

Soit $m_1 = \operatorname{Inf}\{n \in N \mid \varphi(n) \geqslant |\theta_1|$ et $n \geqslant m_0+1\}$. Pour $n \in \{m_0, \ldots, m_1-1\}$, on pose $u_n = \theta_0$.

On définit, par récurrence sur k, la suite (m_k) suivante:

$$\forall k \geqslant 1, \quad m_{k+1} = \operatorname{Inf}\{n \in N \mid \varphi(n) \geqslant |\theta_{k+1}| \text{ et } n \geqslant (1+k)m_k \text{ et } n - m_k \equiv 0 \bmod k+1\}$$

de sorte que (m_k) est strictement croissante.

On pose, pour $n \in \{m_k, \ldots, m_{k+1}-1\}$,

$$u_n = \theta_j$$

où j est le reste de la division euclidienne de $n - m_k$ par $k+1$.

Il est clair que $U = (u_n)$ satisfait à la condition 1) du théorème 2. Le fait que $x\Theta$ et xU soient complètement équiréparties ou non équiréparties pour les mêmes valeurs de x est démontré dans [1].

IV.2. La méthode utilisée pour démontrer le théorème 1 se généralise à la répartition selon une mesure μ dans un compact S métrisable ([3]).

Addendum: le théorème 1 a été amélioré par l'auteur dans un article paru aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (vol. 2, 1980, p. 137–155).

Bibliographie

[1] J. Coquet, *Une remarque sur les suites équiréparties à croissance lente*, Acta Arith. 36 (1980), p. 143–146.

[2] G. Rauzy, *Caractérisation des ensembles normaux*, Bull. Soc. Math. France 98 (1970), p. 401–414.

[3] — *Propriétés statistiques de suites arithmétiques*, PUF, Collection SUP. Le mathématicien, n° 15.

Reçu le 29. 3. 1978
et dans la forme modifiée le 6. 6. 1978 (1057)

ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Integers without large prime factors, II

by

JOHN B. FRIEDLANDER (Toronto)

1. Let a and q be relatively prime positive integers. For m a positive integer, let $P(m)$ (respectively $Q(m)$) denote its largest (resp. smallest) prime factor. This paper is concerned with the sum

$$S = S(X, Y, a, q) = \sum_{\substack{m \leqslant X \\ m \equiv a \pmod q \\ P(m) \leqslant Y}} 1,$$

where $X \geqslant Y \geqslant 2$.

In the case where q is less than a fixed power of $\log Y$, fairly precise results are known (see [8]) and, in particular, if $q = 1$ and $u = \dfrac{\log X}{\log Y} < (\log Y)^{1/2}$ (this restriction can be weakened somewhat), then $S \sim X\varrho(u)$, where $\varrho(u)$ is the Dickman function (see [1] for details).

The situation is less satisfactory in the case where q is larger, say a fixed power of Y. In [4] a result was given which yielded a non-trivial lower bound provided that $\beta = \log Y/\log q$ was fixed, exceeding $\sqrt{e}/(\sqrt{e}-1)$.

In this paper we give the following upper bound.

THEOREM. *If $X \geqslant q^2 Y^5$ and $u \leqslant (\log Y)^{1/4}$, then*

$$\sum_{\substack{m \leqslant X \\ m \equiv a \pmod q \\ P(m) \leqslant Y}} 1 \ll \frac{X}{q}\varrho(u - \beta^{-1} - 4).$$

The constants $2, 5, \frac{1}{4}$ and 4 are all susceptible to improvement. Unlike the result in [4], the above estimate remains nontrivial when $Y < q$.

An estimate in [10], stated without proof, is in fact superior to the above. Unfortunately, the method of proof in that paper is flawed and, barring a completely new idea, seems incapable of being modified to give the stated results. Our method of proof does, however, owe its origin to one of the ideas in that paper as well as to the earlier work [7] of Hmyrova.