ACTA ARITHMETICA
XXXIX (1981)

Lois de répartition des diviseurs, 3

par

GÉRALD TENENBAUM* (Talence)

1. Introduction. Soit (λ, t) un couple de réels appartenant à $[0,1]\times\times[1,+\infty[$; nous avons étudié dans l'article précédent [3] quelques propriétés des diviseurs d'un entier n qui sont dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$. Nous avons montré en particulier:

1) L'existence pour tout entier positif ou nul k d'une fonction continue $f_k(\lambda, t)$ égale à la densité asymptotique de la suite des entiers n ayant dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ exactement k diviseurs premiers. On a pour $t\geqslant k+1$

$$f_k(\lambda, t) = \frac{\lambda}{k!}(\log 1/\lambda)^k\left(1+\frac{a_k(\lambda, t)}{\Gamma(t-k)}\right) \tag{1}$$

avec $|a_k(\lambda, t)|\leqslant 2$.

2) L'existence d'une fonction continue $h(\lambda, t)$ égale à la densité asymptotique de la suite des entiers n ayant dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ au moins un diviseur, premier ou non.

La fonction $h(\lambda, t)$ est donc l'analogue, pour les diviseurs quelconques, de $1-f_0(\lambda, t)$. Nous montrerons dans un prochain article que le cas $k=0$ est en fait le seul non trivial, l'analogue de $f_k(\lambda, t)$ pour $k\geqslant 1$ étant identiquement nul. Comme la fonction $1-f_0(\lambda, t)$ tend vers une limite (égale à $1-\lambda$) lorsque t tend vers l'infini nous sommes portés à conjecturer l'existence d'une limite

$$h(\lambda) := \lim_{t\to\infty} h(\lambda, t) \tag{2}$$

qui soit une fonction continue de λ; c'est ce que nous nous proposons de démontrer dans cet article.

Notations. Outre celles introduites ci-dessus, nous utiliserons les notations suivantes:

Pour toute suite $\mathscr{A}$ d'entiers, nous désignerons par $\operatorname{dens}(\mathscr{A})$ la densité asymptotique, lorsqu'elle existe, de la suite $\mathscr{A}$.

---

* Laboratoire associé au C. N. R. S. n° 226.

Pour tout couple de réels (λ, y) de $[0,1]\times[1,+\infty[$ nous noterons $d(\lambda, y)$ la densité asymptotique de la suite des entiers ayant au moins un diviseur dans $[y^\lambda, y[$.

Les lettres $a, b, c, d, k, l, m, n, z$ désigneront des entiers naturels positifs alors que les lettres p et q désigneront exclusivement des nombres premiers.

Pour tout entier n, nous noterons:

$p(n)$ (resp. $q(n)$) le plus grand (resp. le plus petit) des facteurs premiers de n;

$\Omega(n)$ (resp. $\omega(n)$) le nombre de facteurs premiers de n comptés avec (resp. sans) leur ordre de multiplicité;

$\mu(n)$ la valeur en n de la fonction de Möbius.

Le plus petit commun multiple à k entiers $a_1, \dots, a_k$ sera noté $[a_1, \dots, a_k]$.

La fonction $t\mapsto\varrho(t)$ est définie pour $t\geqslant 0$ par

$$\begin{cases}\varrho(t)=1 & \text{pour } 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \varrho \text{ continue à droite en } & t=1,\\ t\varrho'(t)+\varrho(t-1)=0 & \text{pour } t>1.\end{cases}$$

La fonction $s\mapsto\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann.

Enfin dans tout cet article, nous poserons:

$$\delta = 1-\frac{\log(e\log 2)}{\log 2} = 0.0860\dots$$

Notre résultat principal s'énonce ainsi:

THÉORÈME. *Soit λ un réel fixé dans $[0,1]$; alors la fonction $y\mapsto d(\lambda, y)$, égale à la densité des entiers ayant au moins un diviseur dans $[y^\lambda, y[$, admet une limite $h(\lambda)$ lorsque y tend vers l'infini.*

La fonction $\lambda\mapsto h(\lambda)$ est continue et vérifie

$$h(\lambda) = \lim_{t\to\infty} h(\lambda, t) \tag{2}$$

où $h(\lambda, t)$ désigne la densité des entiers n ayant au moins un diviseur dans $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$.

De plus, on a pour tout λ de $[0,1]$ l'encadrement:

$$1-\lambda\leqslant h(\lambda)\leqslant 6(1-\lambda)^\delta. \tag{3}$$

Notons que l'encadrement (3) est une conséquence immédiate de la relation (1) appliquée pour $k=0$ et de la majoration de $h(\lambda, t)$ démontrée dans [3] (formule (34)).

2. Cinq lemmes. La preuve du théorème repose sur les cinq lemmes suivants:

LEMME 1. *Soit y un nombre réel supérieur ou égal à 1, et soient $\mathcal{K}$, $\mathcal{I}$ deux ensembles d'entiers contenus dans $[1, y[$ et tels que $\mathcal{I}\not\subset\mathcal{K}$. On désigne par $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}_y$) la suite des entiers positifs qui sont multiples d'au moins un nombre de $\mathcal{I}$ mais ne sont multiples d'aucun nombre de $\mathcal{K}$ (resp. et tels que $p(a)\leqslant y$). Alors $\mathcal{A}$ possède une densité et l'on a*

$$\mathrm{dens}(\mathcal{A}) = \prod_{p\leqslant y}(1-p^{-1})\sum_{a\in\mathcal{A}_y} a^{-1}.$$

Démonstration. $\mathcal{A}$ est une réunion finie (dans N^*) de classes de congruence, donc $\mathcal{A}$ possède une densité, égale à la densité analytique:

$$\mathrm{dens}(\mathcal{A}) = \lim_{\substack{s\to 1\\ s>1}} \zeta^{-1}(s)\sum_{a\in\mathcal{A}} a^{-s}.$$

Posons, pour $s>1$:

$$\Delta(s) := \zeta^{-1}(s)\sum_{a\in\mathcal{A}} a^{-s}$$

on a:

$$\Delta(s) = \prod_{p\leqslant y}(1-p^{-s})\sum_{d\geqslant 1}\hat\mu(d)d^{-s}\sum_{a\in\mathcal{A}} a^{-s}$$

où l'on a posé:

$$\hat\mu(d) := \begin{cases}\mu(d) & \text{si } q(d)>y \ (\hat\mu(1)=1),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

De plus, on peut écrire:

$$\sum_{d\geqslant 1}\hat\mu(d)d^{-s}\sum_{a\in\mathcal{A}} a^{-s} = \sum_{n\geqslant 1} g(n)n^{-s}$$

avec:

$$g(n) = \sum_{\substack{d\mid n\\ n/d\in\mathcal{A}}}\hat\mu(d).$$

En particulier, $g(n)=0$ si n n'est pas dans $\mathcal{A}$. Décomposons chaque n de $\mathcal{A}$ sous la forme $n=bc$ avec:

$$b = \prod_{\substack{p^\nu\| n\\ p\leqslant y}} p^\nu.$$

Comme le plus grand diviseur de n appartenant à $\mathcal{I}\setminus\mathcal{K}$ est formé de facteurs premiers $\leqslant y$, il divise b et donc b est dans $\mathcal{A}$. Alors, si d est un diviseur de n, $\hat\mu(d)$ ne peut être non nul que si d divise c; mais, dans ce cas, n/d est multiple de b, donc appartient à $\mathcal{A}$. D'où, pour n dans $\mathcal{A}$:

$$g(n) = \sum_{d\mid c}\mu(d) = \begin{cases}1 & \text{si } c=1,\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

on en déduit l'expression de $\Delta(s)$
$$\Delta(s) = \prod_{p\leqslant y}(1-p^{-s})\sum_{a\in\mathscr{A}_y} a^{-s}$$
et, finalement, le résultat en faisant tendre s vers 1.

LEMME 2. *Soit $\mathscr{L}$ une suite, finie ou non, d'entiers distincts. On définit pour tous entiers n, k la quantité $r_k(n)$ comme le nombre de représentations de n sous la forme $n = [z_1, \ldots, z_k]$ avec $z_j \in \mathscr{L}$ pour $j = 1, \ldots, k$ et $z_1 < \ldots < z_k$; on pose*
$$r(n) := \sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k-1} r_k(n).$$
Alors on a l'inégalité:
$$|r(n)| \leqslant 2^{\omega(n)}.$$

Démonstration. Posons, pour n et k entiers positifs:
$$a_k(n) := \sum_{d|n} r_k(d).$$
On voit que si n possède exactement l diviseurs distincts dans $\mathscr{L}$, on a:
$$a_k(n) = \binom{l}{k}$$
avec la convention $\binom{l}{k} = 0$ si $l < k$.

On en déduit la relation:
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} a_k(n) = \varepsilon_n$$
où ε_n vaut 1 si n a au moins un diviseur dans $\mathscr{L}$ et vaut 0 sinon. Cela équivaut à l'égalité suivante, valable pour tout entier positif n
$$\sum_{d|n} r(d) = \varepsilon_n,$$
on peut encore l'écrire:
$$r(n) = \sum_{d|n}\mu(d)\varepsilon_{n/d}.$$
On a donc, finalement:
$$|r(n)| \leqslant \sum_{d|n}|\mu(d)| = 2^{\omega(n)}.$$

LEMME 3. *Soit k un entier positif et soit $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{2k})$ un $2k$-uple de nombres réels tel que pour tout $i = 1, \ldots, k)$ on ait $0 < a_{2i-1} \leqslant a_{2i} < 1$. On pose*
$$N = N(\bar{a}; x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x:\ \forall d\ \ (d|n \Rightarrow \forall i (i = 1, \ldots, k)\ \ d \notin [x^{a_{2i-1}}, x^{a_{2i}}[)\}.$$

Alors il existe une fonction continue f: $]0,1[^{2k} \to [0,1]$ telle que:
$$(*) \qquad N(\bar{a}; x) = xf(\bar{a}) + o(x)$$
où la quantité $o(x)$ est uniforme en $\bar{a}$ lorsque $\bar{a}$ appartient à un compact inclus dans $]0,1[^{2k}$.

De plus la relation $(*)$ est encore valable si l'on remplace dans la définition de N, pour chaque i, les intervalles fermés-ouverts $[x^{a_{2i-1}}, x^{a_{2i}}[$ par des intervalles fermés, ouverts ou ouverts-fermés.

Démonstration. Il suffit de prouver le lemme dans le cas particulier où les intervalles $[x^{a_{2i-1}}, x^{a_{2i}}[$ sont fermés-ouverts et où on a pour tout i $(i = 1, \ldots, k)$
$$a_{2i} \leqslant 1/2.$$
En effet, en utilisant la continuité de f, on étend sans peine le résultat à des intervalles quelconques, puis, en utilisant la symétrie des diviseurs de n autour de $n^{1/2}$ (qu'on peut remplacer par $x^{1/2}$, quitte à faire une erreur qui est $o(x)$, comme on l'a montré au lemme 7 de [3]) on obtient l'énoncé général.

Nous allons voir que le lemme se démontre à partir du cas $k = 1$, traité dans [3]. Nous avons, en effet, montré dans [3] l'existence, pour tout a de $]0,1[$ d'une quantité $c(a)$, ne dépendant que de a, telle que l'on ait
$$(4) \qquad \forall \varepsilon > 0 \quad \left(1 - c(a)\varepsilon^{\delta} \leqslant f(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon) \leqslant 1\right).$$
Considérons donc $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_{2k})$. Pour tout $\varepsilon \geqslant 0$, on pose:
$$N'_\varepsilon = N'_\varepsilon(\bar{a}; x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x:\ \exists d|n,\ \exists i\ (1 \leqslant i \leqslant k)\ \ d \in [x^{a_{2i-1}}, x^{a_{2i}}[\text{ et } q(d) \geqslant x^{\varepsilon}\}.$$
Alors $N'_0 = [x] - N$; de plus, si un entier $n \leqslant x$ est compté dans N'_0 mais pas dans N'_ε pour $\varepsilon > 0$, il existe un entier i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ pour lequel n possède au moins un diviseur d dans $[x^{a_{2i-1}}, x^{a_{2i}}[$ mais tel que tous les diviseurs d de n dans $[x^{a_{2i-1}}, x^{a_{2i}}[$ vérifient également $q(d) < x^{\varepsilon}$.

Si on pose, pour un tel n
$$d^* := \min\{d:\ d|n \text{ et } x^{a_{2i-1}} \leqslant d < x^{a_{2i}}\},$$
on a alors $d^*/q(d^*) < x^{a_{2i-1}}$, donc:
$$x^{a_{2i-1}} \leqslant d^* < x^{a_{2i-1}+\varepsilon}.$$
D'après (4) le nombre de tels n est donc majoré, pour x assez grand, par $2c(a_{2i-1})\varepsilon^{\delta}x$ et on a, en posant $D(\bar{a}) := 2\max_{1\leqslant i\leqslant k} c(a_{2i-1})$, pour x assez grand:
$$0 \leqslant N'_0 - N'_\varepsilon \leqslant D(\bar{a})\varepsilon^{\delta}x.$$

Cela montre qu'on peut se ramener pour prouver l'existence de f à prouver, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une fonction g_ε vérifiant:

$$N'_\varepsilon(\bar{a}; x) = xg_\varepsilon(\bar{a}) + o(x).$$

En effet g_ε sera une fonction décroissante de ε et on aura $f = 1 - \lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon$. D'autre part, si f existe c'est nécessairement une fonction continue de $\bar{a}$ car, si $\bar{\beta} := (\beta_1, \ldots, \beta_{2k})$ est tel que $\max|a_i - \beta_i| < \gamma$, on montre à l'aide de (4) qu'il existe une constante $E(\bar{a})$ telle que, pour x assez grand, on ait:

$$(5) \qquad |N(\bar{a}; x) - N(\bar{\beta}; x)| \leqslant E(\bar{a})\gamma^\delta x.$$

Il ne nous reste plus qu'à prouver l'existence de g_ε pour tout $\varepsilon > 0$ fixé Si nous posons

$$(6) \qquad Z_\varepsilon = \Big\{\bigcup_{i=1}^{k} [x^{a_{2i-1}}, x^{a_{2i}}[\Big\} \cap \{z \leqslant x: q(z) \geqslant x^\varepsilon\}$$

on a:

$$N'_\varepsilon(\bar{a}; x) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} B_m(x),$$

avec:

$$B_m(x) = \sum_{\substack{z_1 < \ldots < z_m \\ z_j \in Z_\varepsilon}} \left[\frac{[x]}{[z_1, \ldots, z_m]}\right].$$

On montre alors exactement comme dans le cas $k = 1$ (traité dans [3], page 31 — la seule modification consistant à remplacer la définition de Z_ε dans [3] par la définition (6)) que la sommation sur m est en fait finie, que le nombre de valeurs de m est borné indépendamment de x, et que, pour tout m, $x^{-1}B_m(x)$ tend vers une limite lorsque x tend vers l'infini.

Cela achève donc de prouver l'existence de f; montrons que dans l'égalité:

$$N(\bar{a}; x) = xf(\bar{a}) + o(x)$$

a quantité $o(x)$ est uniforme lorsque $\bar{a}$ parcourt un compact K de $]0, 1[^{2k}$. S'il n'en était pas ainsi, il existerait une constante c, une suite x_n de réels tendant vers $+\infty$ et une suite $\bar{a}_n$ de points de K tels que pour tout entier n, on ait

$$(7) \qquad |N(\bar{a}_n, x_n) - x_n f(\bar{a}_n)| \geqslant cx_n.$$

Comme $\bar{a}_n$ est dans K pour tout n on peut supposer qu'il existe un $\bar{a}$ dans K tel que:

$$\lim_n \bar{a}_n = \bar{a}.$$

Posons $\varepsilon_n = \max_i |a_{n,i} - a_i|$; ε_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. D'après (5) on a pour x_n assez grand:

$$|N(\bar{a}_n, x_n) - x_n f(\bar{a}_n)| \leqslant |N(\bar{a}_n, x_n) - N(\bar{a}, x_n)| + |N(\bar{a}, x_n) - x_n f(\bar{a})| + \\ + x_n |f(\bar{a}) - f(\bar{a}_n)| \leqslant 2E(\bar{a})\varepsilon_n^\delta x_n + o(x_n),$$

ce qui contredit (7) pour n assez grand, et achève la démonstration.

Lemme 4. *Soit f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann dont le support est inclus dans un compact de* $]0, +\infty[^n$. *Alors*:

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{p_1, \ldots, p_n} \frac{1}{p_1 \ldots p_n} f\left(\frac{\log p_1}{\log x}, \ldots, \frac{\log p_n}{\log x}\right) = \int_{\mathbf{R}^n} f(u_1, \ldots, u_n) \frac{du_1}{u_1} \ldots \frac{du_n}{u_n}.$$

La démonstration de ce lemme a été donnée dans [3] (lemme 9). Le lemme suivant a été montré par Bovey dans [1] (lemma 4).

Lemme 5. *Pour tous réels $y \geqslant 3$ et $t > 0$, on a*:

$$\sum_{\substack{n > y^t \\ p(n) \leqslant y}} \frac{1}{n} = \log y \int_t^\infty \varrho(u)\,du + o(\log y).$$

3. Démonstration de la première partie du théorème. Nous nous proposons de démontrer dans ce paragraphe l'existence et la continuité en λ de la limite

$$h(\lambda) = \lim_{y \to \infty} d(\lambda, y).$$

D'après un résultat d'Erdös [2] on sait qu'il existe deux fonctions $R_1(\varepsilon)$ et $R_2(y)$ telles que:

$$(8) \qquad d(1-\varepsilon, y) \leqslant R_1(\varepsilon) + R_2(y), \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} R_1(\varepsilon) = \lim_{y \to \infty} R_2(y) = 0.$$

Posons, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$d_\varepsilon(\lambda, y) := \operatorname{dens}\{n: \exists d | n, y^\lambda \leqslant d < y^{1-\varepsilon}, \text{ non } \exists d | n, y^{1-\varepsilon} \leqslant d \leqslant y\}.$$

D'après (8), on a:

$$(9) \qquad d_\varepsilon(\lambda, y) \leqslant d(\lambda, y) \leqslant d_\varepsilon(\lambda, y) + R_1(\varepsilon) + R_2(y) + 1/y.$$

Il suffit donc de prouver l'existence de la limite

$$h_\varepsilon(\lambda) := \lim_{y \to \infty} d_\varepsilon(\lambda, y);$$

en effet, en faisant tendre y vers l'infini puis ε vers 0 dans (9); nous obtiendrons l'existence de $h(\lambda)$ et nous allons voir que si $h(\lambda)$ existe, c'est nécessairement une fonction continue de λ:

en un point $\lambda \neq 0$ on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$0 \leqslant d(\lambda, y) - d(\lambda+\varepsilon, y) \leqslant d\left(\frac{1}{1+\varepsilon/\lambda}, y^{\lambda+\varepsilon}\right) \leqslant R_1\left(\frac{\varepsilon}{\lambda+\varepsilon}\right) + R_2(y^{\lambda+\varepsilon})$$

d'où la continuité en λ;

la continuité en $\lambda = 0$ découle simplement de la majoration pour tout $\varepsilon > 0$ de $1-d(\varepsilon, y)$ par la densité des entiers n'ayant pas de facteur premier dans $[y^\varepsilon, y[$:

$$1-d(\varepsilon, y) \leqslant \prod_{y^\varepsilon \leqslant p < y} (1-p^{-1}) = \varepsilon + o(1).$$

Appliquons le lemme 1 avec $\mathscr{I} = [y^\lambda, y]$, $\mathscr{K} = [y^{1-\varepsilon}, y]$; nous obtenons l'expression de $d_\varepsilon(\lambda, y)$:

$$d_\varepsilon(\lambda, y) = \prod_{p \leqslant y} (1-p^{-1}) \sum_{(10)} a^{-1}$$

où la sommation porte sur les entiers a vérifiant les conditions:

$$(10) \qquad \begin{cases} p(a) \leqslant y, \\ \exists d \mid a,\ y^\lambda \leqslant d < y^{1-\varepsilon}, \\ \text{non } \exists d \mid a,\ y^{1-\varepsilon} \leqslant d \leqslant y. \end{cases}$$

D'après le théorème de Mertens, il suffit d'étudier l'existence de la limite en y de la quantité

$$(\log y)^{-1} \sum_{(10)} a^{-1}.$$

Fixons $t > 1$ (grand); on pose

$$\sum_{(10)} a^{-1} = \sum_{\substack{(10) \\ a < y^t}} a^{-1} + H(y, t).$$

D'après le lemme 5, on a:

$$H(y, t) \ll \log y \int_t^\infty \varrho(u)\,du;$$

comme $\int_t^\infty \varrho(u)\,du$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, il nous suffit de montrer que pour tout t fixé la quantité suivante admet une limite en y

$$(\log y)^{-1} \sum_{\substack{(10) \\ a < y^t}} a^{-1}.$$

Pour chaque entier a considérons la décomposition $a = bc$ où c est le plus grand diviseur de a dans l'intervalle $[y^\lambda, y^{1-\varepsilon}[$. Alors $q(b) \geqslant y^\varepsilon$, et, puisque $b \leqslant a < y^t$, le nombre des facteurs premiers de b est inférieur à t/ε. Cela montre que nous pouvons nous ramener à étudier, pour tout entier k fixé, la limite en y des quantités suivantes:

$$S_k := (\log y)^{-1} \sum_{(11)} b^{-1} \sum_{(12)} c^{-1}$$

où la sommation en b porte sur les entiers vérifiant

$$(11) \qquad \begin{cases} \Omega(b) = k, \\ y^\varepsilon \leqslant q(b) \leqslant p(b) \leqslant y^{1-\varepsilon}, \\ b \leqslant y^{t-\lambda} \end{cases}$$

et où la sommation en c porte sur les entiers vérifiant

$$(12) \qquad \begin{cases} y^\lambda \leqslant c < y^{1-\varepsilon} \\ c \leqslant y^t b^{-1}, \\ \forall d\ (d \mid bc \Rightarrow d \notin]c, y]). \end{cases}$$

Pour tout entier $j \geqslant 1$, on écrit alors:

$$\sum_{(12)} c^{-1} = \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{(12,i)} c^{-1}$$

où la sommation intérieure porte sur les entiers c qui vérifient, outre les conditions (12),

$$(13) \qquad \theta_{i,j} \leqslant \frac{\log c}{\log y} < \theta_{i+1,j}$$

avec, pour tout i $(1 \leqslant i \leqslant j)$

$$\theta_{i,j} = \lambda + \frac{i}{j}(1-\lambda-\varepsilon).$$

Considérons un entier b fixé vérifiant (11). La dernière condition de (12) s'écrit

$$\forall \beta \mid b\ (\beta \neq 1)\ \forall d\ (d \mid c \Rightarrow d \notin]c\beta^{-1}, y\beta^{-1}[).$$

Cela permet l'encadrement suivant, valable pour $0 \leqslant i \leqslant j-1$,

$$\sum_{(12,i)}^{*} c^{-1} \leqslant \sum_{(12,i)} c^{-1} \leqslant \sum_{(12,i)}^{**} c^{-1}$$

où $\sum\limits_{(12,i)}^{*}$ (resp. $\sum\limits_{(12,i)}^{**}$) désigne la sommation sur les entiers c de l'intervalle $[y^{\theta_{i,j}}, y^{\theta_{i+1,j}}[\cap [y^\lambda, y^t b^{-1}]$ qui n'ont pas de diviseur dans $\bigcup\limits_{\substack{\beta \mid b \\ \beta \neq 1}}]y^{\theta_{i,j}}\beta^{-1}, y\beta^{-1}]$ (resp. $\bigcup\limits_{\substack{\beta \mid b \\ \beta \neq 1}}]y^{\theta_{i+1,j}}\beta^{-1}, y\beta^{-1}]$).

Posons

$$\varphi := \min\left(1, t-\frac{\log b}{\log y}\right) \quad \text{et} \quad \psi := \min\left(1, \frac{\varphi-\lambda}{1-\lambda-\varepsilon}\right).$$

Pour tous les entiers i tels que $i/j \leqslant \psi$ sauf au plus un, la somme $\sum^*_{(12,i)}$ (resp. $\sum^{**}_{(12,i)}$) est étendue aux entiers de l'intervalle $[y^{\theta_{i,j}}, y^{\theta_{i+1,j}}[$ qui n'ont pas de diviseur dans chacun des intervalles $]y^{\alpha_{2r-1}}, y^{\alpha_{2r}}]$ $(1 \leqslant r \leqslant h)$ où $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2h})$ est la valeur d'une fonction continue

$$\bar{\alpha}\left(\frac{i}{j}, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right) \quad \left(\text{resp. } \bar{\alpha}\left(\frac{i+1}{j}, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right)\right)$$

où $p_1, \ldots, p_k$ désignent les facteurs premiers distincts ou non de b. D'après le lemme 3 il existe une fonction continue $f\colon]0,1[^{2h} \to [0,1]$ vérifiant:

$$(14) \qquad \sum_{(12,i)}{}^{*} c^{-1} = \frac{1-\lambda-\varepsilon}{j} f\left(\bar{\alpha}\left(\frac{i}{j}, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right)\right) + \eta_i(y)\log y,$$

$$(15) \qquad \sum_{(12,i)}{}^{**} c^{-1} = \frac{1-\lambda-\varepsilon}{j} f\left(\bar{\alpha}\left(\frac{i+1}{j}, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right)\right) + \eta_i'(y)\log y$$

où $\eta_i(y)$ et $\eta_i'(y)$ sont des fonctions de y tendant vers 0 lorsque y tend vers l'infini et ne dépendant pas de b puisque les $\log p_l/\log y$ $(1 \leqslant l \leqslant k)$ sont tous dans l'intervalle $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Posons alors $F = f\circ\bar{\alpha}\colon]0,1[^{k+1} \to [0,1]$; F est une fonction continue et pour tous les entiers i tels que $i/j \leqslant \psi$ sauf au plus un on a:

$$(16) \qquad \sum_{(12,i)}{}^{*} c^{-1} = \frac{1-\lambda-\varepsilon}{j} F\left(\frac{i}{j}, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right) + \eta_i(y)\log y,$$

$$(17) \qquad \sum_{(12,i)}{}^{**} c^{-1} = \frac{1-\lambda-\varepsilon}{j} F\left(\frac{i+1}{j}, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right) + \eta_i'(y)\log y.$$

Pour les entiers i tels que $i/j > \psi$ la somme $\sum^*_{(12,i)}$ (resp. $\sum^{**}_{(12,i)}$) est vide sauf pour au plus une valeur de i.

Soit alors $g\colon]0,1[^{k+1} \to [0,1]$ la fonction intégrable au sens de Riemann définie par:

$$g(u, u_1, \ldots, u_k) = \begin{cases} F(u, u_1, \ldots, u_k) & \text{si} \quad u \leqslant \min\left(1, \dfrac{t-\sum_{r=1}^{k} u_r - \lambda}{1-\lambda-\varepsilon}\right), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on a l'encadrement

$$(18) \qquad \frac{1-\lambda-\varepsilon}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{(11)} b^{-1} g\left(\frac{i}{j}, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right) - \frac{2(1-\lambda-\varepsilon)}{j} \sum_{(11)} b^{-1} - j \max_{i=1,\ldots,j-1} \eta_i(y) \sum_{(11)} b^{-1}$$

$$\leqslant S_k \leqslant \frac{1-\lambda-\varepsilon}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{(11)} b^{-1} g\left(\frac{i+1}{j}, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right) + \frac{2(1-\lambda-\varepsilon)}{j} \sum_{(11)} b^{-1} + j \max_{i=1,\ldots,j-1} \eta_i'(y) \sum_{(11)} b^{-1}.$$

Or d'après le lemme 5, on a:

(a) $\lim\limits_{y\to\infty} \sum\limits_{(11)} b^{-1} = \int\limits_{\Delta} \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_k}{u_k}$,

(b) pour u dans $[0,1]$

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{(11)} b^{-1} g\left(u, \frac{\log p_1}{\log y}, \ldots, \frac{\log p_k}{\log y}\right) = \int_{\Delta} g(u, u_1, \ldots, u_k) \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_k}{u_k}$$

où Δ est le domaine de $\boldsymbol{R}^k$ défini par la condition

$$\varepsilon \leqslant u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_k \leqslant 1-\varepsilon.$$

En faisant tendre y puis j vers l'infini dans (18), on obtient:

$$\lim_{y\to\infty} S_k = (1-\lambda-\varepsilon) \int_0^1 du \int_{\Delta} g(u, u_1, \ldots, u_k) \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_k}{u_k},$$

ce qui achève la démonstration.

4. Fin de la démonstration du théorème. Nous allons maintenant montrer que $\lambda \mapsto h(\lambda)$ vérifie (2). Posons:

$$h_\varepsilon(\lambda, t) := \operatorname{dens}\{n\colon \exists d \,|\, n, n^{\lambda/t} \leqslant d < n^{1/t}, \text{ et } q(d) > n^{\varepsilon/t}\};$$

nous avons vu dans [3] (pages 30 et 31) que, pour $\lambda \neq 0$, on a:

$$(19) \qquad |h(\lambda, t) - h_\varepsilon(\lambda, t)| \ll_\lambda \varepsilon^\delta$$

et

$$h_\varepsilon(\lambda, t) \sim \sum_{n\leqslant x} \frac{r(n, x)}{n} \tag{20}$$

où $r(n, x)$ est égale à la fonction $r(n)$ du lemme 2 lorsqu'on choisit $\mathscr{L} = \{z\colon x^{\lambda/t} \leqslant z < x^{1/t}$ et $q(z) > x^{\varepsilon/t}\}$. Comme on a:

$$d_\varepsilon(\lambda, x^{1/t}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n, x)}{n},$$

on peut écrire:

$$h_\varepsilon(\lambda, t) = d_\varepsilon(\lambda, x^{1/t}) - \sum_{n>x} \frac{r(n, x)}{n} + o(1). \tag{21}$$

Décomposons alors:

$$\sum_{n>x} \frac{r(n, x)}{n} = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

où Σ_1 (resp. Σ_2) correspond aux entiers sans (resp. ayant au moins un) facteur carré.

En utilisant le lemme 2, on a:

$$|\Sigma_2| \leqslant \sum_{x^{\varepsilon/t} < p < x^{1/t}} p^{-2} \sum_{\substack{n\geqslant 1 \\ x^{\varepsilon/t} \leqslant q(n) \leqslant p(n) < x^{1/t}}} 2^{\omega(n)} n^{-1}$$

$$\ll x^{-\varepsilon/t} \prod_{x^{\varepsilon/t} \leqslant p < x^{1/t}} (1 - 2p^{-1})^{-1} \ll x^{-\varepsilon/t} \prod_{x^{\varepsilon/t} \leqslant p < x^{1/t}} (1 - p^{-1})^{-2} \ll_\varepsilon x^{-\varepsilon/t}.$$

D'autre part, on a:

$$|\Sigma_1| = \Big| \sum_{j\geqslant t} \sum_{\substack{n>x \\ \omega(n) = \Omega(n) = j}} r(n, x) n^{-1} \Big| \leqslant \sum_{j\geqslant t} \frac{2^j}{j!} \Big\{ \sum_{x^{\varepsilon/t} \leqslant p < x^{1/t}} p^{-1} \Big\}^j$$

$$\leqslant \sum_{j\geqslant t} \frac{2^j}{j!} \log^j 1/\varepsilon = R(t, \varepsilon)$$

avec $\lim\limits_{t\to\infty} R(t, \varepsilon) = 0$.

En faisant tendre dans (21) x puis t tend vers l'infini on obtient:

$$\lim_{t\to\infty} h_\varepsilon(\lambda, t) = h_\varepsilon(\lambda).$$

En faisant tendre ε vers 0 et en utilisant (19) on obtient donc (2).

Bibliographie

[1] J. D. Bovey, *On the size of prime factors of integers*, Acta Arith. 33 (1977), p. 65–80.

[2] P. Erdös, *A generalization of a theorem of Besicovitch*, J. London Math. Soc. 11 (1936), p. 92–98.

[3] G. Tenenbaum, *Lois de répartition des diviseurs, 2*, Acta Arith. 38 (1980), p. 1–36.

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex

Reçu le 6. 2. 1978 (1042)