[25] T. Tatuzawa, *On the number of integral ideals in algebraic number fields, whose norms not exceeding x*, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo, 23 (1973), S. 73–86.

[26] — *On the number of integral ideals, whose norms belonging to some norm residue class* mod q, ibid. 27 (1977), S. 1–8.

[27] R. Wilson, *The large sieve in algebraic number fields*, Mathematika 16 (1969), S. 189–204.

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT MARBURG
D-3550 Marburg/Lahn

Eingegangen am 18.1.1978 (1029)

ACTA ARITHMETICA
XXXVIII (1980)

Quelques résultats d'équirépartition liés aux nombres premiers généralisés de Beurling*

par

JEAN-PIERRE BOREL (Limoges)

1. Introduction et rappels.

1.1. Soit $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i\in N^*}$ un ensemble de nombres premiers généralisés de Beurling, c'est-à-dire que $\mathscr{P}$ est muni d'une norme $\| \ \|: \mathscr{P} \to \boldsymbol{R}$ telle que:

$$1 < \|p_1\| \leqslant \|p_2\| \leqslant \ldots \leqslant \|p_i\| \leqslant \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{i\to+\infty} \|p_i\| = +\infty.$$

Nous noterons $\mathscr{N}$ le semi-groupe multiplicatif libre engendré par $\mathscr{P}$ ($\mathscr{N}$ est l'ensemble des „entiers"), auquel on prolonge $\| \ \|$ de manière totalement multiplicative:

$$\|b\| = \Big\|\prod p_i^{a_i}\Big\| = \prod \|p_i\|^{a_i}, \quad a_i \in \boldsymbol{N},\ a_i = 0 \text{ sauf un nombre fini.}$$

Nous supposerons $\mathscr{N}$ ordonné: $\mathscr{N} = \{b_n\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ de telle manière que:

$$1 = \|b_0\| < \|b_1\| \leqslant \|b_2\| \leqslant \ldots \leqslant \|b_n\| \leqslant \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|b_n\| = +\infty,$$

$\mathscr{N}$ peut être ordonné ainsi, de plusieurs façons éventuellement. Nous supposerons dans la suite de ce travail qu'un tel ordre est fixé. Nous verrons plus tard que, dans les cas considérés, les résultats sont indépendants d'un tel ordre.

1.2. Soit f une application de $\mathscr{N}$ dans $\boldsymbol{C}$. Nous poserons alors:

$$B(x,f) = \sum_{\|b\|\leqslant x} f(b); \quad \pi(x,f) = \sum_{\|p\|\leqslant x} f(p); \quad \vartheta(x,f) = \sum_{\|p\|\leqslant x} \log\|p\|\cdot f(p)$$

où b (resp. p) représente l'élément générique de $\mathscr{N}$ (resp. $\mathscr{P}$). On sait définir sur $\mathscr{N}$ une fonction de von Mangoldt par:

$$\Lambda(b) = \begin{cases} \log\|p\| & \text{si } \exists\, p \in \mathscr{P}, \exists\, a \in \boldsymbol{N}^*, b = p^a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

* Ce travail correspond à une partie de ma thèse de 3ème cycle, effectuée à l'Université d'Aix-Marseille II sous la direction du professeur G. Rauzy.

On pose alors:

$$\psi(x,f) = B(x, \Lambda f) = \sum_{\|b\|\leqslant x} \Lambda(b) f(b).$$

Enfin, si f est la fonction constante $f = 1$, on pose:

$$B(x) = B(x,1); \quad \pi(x) = \pi(x,1); \quad \psi(x) = \psi(x,1)$$

qui généralisent à $\mathcal{N}$ les fonctions $[x]$, $\pi(x)$ et $\psi(x)$ classiques sur N^*.

1.3. Soit γ un nombre réel positif. Nous dirons que $f\colon \mathcal{N} \to C$ appartient à $\mathcal{F}_\gamma$ si:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists A(f) \in C, \quad B(x,f) = A(f)x + R(x,f) \text{ et } R(x,f) = O\left(\frac{x}{\log^{\gamma+\varepsilon} x}\right).$$

Alors la série $L(s,f) = \sum f(b)\|b\|^{-s}$ est absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ dès que $|f|$ appartient à un $\mathcal{F}_\gamma$, donc définit sur ce domaine une fonction holomorphe. Et, par un calcul classique, on obtient:

$$(1) \qquad L(s,f) = \int_1^\infty x^{-s} dB(x,f) = s\int_1^\infty x^{-s} \frac{B(x,f)}{x} dx$$

$$= \frac{A(f)}{s-1} + A(f) + s\int_1^\infty x^{-s} \frac{R(x,f)}{x} dx \qquad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1$$

et, par dérivation sous le signe $\int$, on obtient pour $j \geqslant 1$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$(2) \qquad L^{(j)}(s,f) = (-1)^j j! \frac{A(f)}{(s-1)^{j+1}} + (-1)^{j-1} \int_1^\infty x^{-s} \frac{R(x,f)}{x} \log^{j-1} x\, dx +$$

$$+ (-1)^j s \int_1^\infty x^{-s} \frac{R(x,f)}{x} \log^j x\, dx.$$

Nous supposerons dans ce qui suit qu'il existe $\gamma_0 > 0$ tel que $1 \in \mathcal{F}_{\gamma_0}$, avec $A = A(1) \neq 0$ et que, sauf indication contraire, $\gamma_0 \geqslant 2$. On sait que:

— si $\gamma_0 \geqslant 3/2$, le théorème des nombres premiers est vérifié:

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right) \qquad \text{d'après Beurling [3];}$$

— si $\gamma_0 \geqslant 1$, les inégalités de Čebičev sont vraies:

$$\exists c_1 > 0, \exists c_2 > 0, \qquad x \geqslant 2 \Rightarrow C_1 \frac{x}{\log x} \leqslant \pi(x) \leqslant C_2 \frac{x}{\log x}$$

(voir Diamond [7]). Les limites $3/2$ et 1 sont les meilleures possibles.

Nous noterons $\zeta(s) = L(s,1)$, holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

2. Résultats obtenus.

2.1. Soit X une application de $\mathcal{N}$ dans $D = \{z \in C \mid |z| \leqslant 1\}$, totalement multiplicative (i.e. $X(\prod p_i^{a_i}) = \prod X(p_i)^{a_i}$). Nous supposerons que X vérifie une condition de régularité, que nous noterons $X \in \mathcal{K}$. Cet ensemble $\mathcal{K}$, défini à l'aide des $\mathcal{F}_\gamma$, sera précisé au § 4.3. Nous obtenons alors:

Théorème 1. *Si $X \in \mathcal{K}$ et $X^2 \in \mathcal{F}_1$, il existe un entier $B(X) \in \{-1, 0, 1\}$ tel que $\psi(x, X) = B(X)x + o(x)$.*

Nous verrons que cela revient à dire:

$$\pi(x, X) = B(X)\frac{x}{\log x} + o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Des résultats analogues au théorème 1 ont déjà été obtenus (par exemple Müller [12] ou Amitsur [1] et [2]) mais avec des conditions sur X bien plus fortes que celles obtenues ici (cf. § 4).

2.2. Si $\{\theta_n\}_{n\in N}$ est une suite de nombres réels, nous dirons que la suite $\{e^{2\pi i\theta_n}\}_{n\in N}$ est équirépartie sur $U = \{z \in C \mid |z| = 1\}$ si la suite $\{\theta_n\}_{n\in N}$ est équirépartie modulo 1. Soit f une application de $\mathcal{N}$ dans U. Nous définissons alors E et Eq par:

$f \in E \Leftrightarrow$ la suite $\{f(b_n)\}_{n\in N}$ est équirépartie sur U,

$f \in Eq \Leftrightarrow$ la suite $\{f(p_i)\}_{i\in N^*}$ est équirépartie sur U.

Nous noterons $\langle f\rangle$ le groupe des puissances de f. Alors le théorème 1 entraîne:

Théorème 2. *Si X est totalement multiplicative et à valeurs dans U, et si $\langle X\rangle \in \mathcal{K}$, on a:*

$$X \in E \Leftrightarrow X \in Eq.$$

Nous obtiendrons une équivalence analogue pour des fonctions Y simplement multiplicatives (i.e. $Y(\prod p_i^{a_i}) = \prod Y(p_i^{a_i})$) et à valeurs dans U.

La condition $\langle X\rangle \in \mathcal{K}$ est assez contraignante. Le théorème 2 permet cependant d'obtenir un résultat très général, dont on déduit en particulier:

Théorème 3. *Soit $\mathcal{R}$ un sous-anneau distinct de Z de l'anneau des entiers de $Q(\sqrt{-d})$, $d = 1, 2, 3, 7, 11$. Soit m un élément non nul de $\mathcal{R}$, et Γ_m le groupe des classes de $\mathcal{R}$ modulo m formées d'éléments premiers à m. Alors:*

(1) *les éléments premiers p de $\mathcal{R}$ sont également répartis entre les classes de Γ_m, au sens:*

$$\forall H \in \Gamma_m, \qquad \lim_{x\to+\infty} \Big(\sum_{\substack{|p|\leqslant x\\ p\in H}} 1\Big)\Big(\sum_{\substack{|p|\leqslant x\\ p\in\mathcal{R}}} 1\Big)^{-1} = \mathrm{card}(\Gamma_m)^{-1}.$$

(2) *la suite $\{\arg p+\theta\log|p|\}$ est équirépartie modulo 2π, lorsque p décrit à module croissant les éléments premiers d'une classe $H\in\Gamma_m$, et ce pour tout $\theta\in\boldsymbol{R}$.*

Ce théorème est une généralisation du résultat obtenu lorsque $\mathscr{R}=\boldsymbol{Z}(i)$ et $\theta=0$ (voir Blanchard [4], chap. 6, pour une démonstration) et l'on obtient une nouvelle démonstration de ce dernier résultat.

Nous ne démontrerons pas le théorème 3 ici. Il est presque entièrement établi dans [5]. Pour l'obtenir exactement, il suffit de remarquer, en reprenant les notations de [5], que dans (H5) les termes erreurs sont en réalité $O(x^{1/3})$ d'après un résultat de van der Corput, comme me l'a fait observer M. Blanchard, donc que Γ_2 est vide.

3. Critère d'équirépartition sur *U*. Nous allons ici déduire du critère de Weyl (par exemple Kuipers–Niederreiter [11]) une caractérisation pratique des ensembles E et Eq:

THÉORÈME 4. *Soit f une application de $\mathscr{N}$ dans $\boldsymbol{U}$. Alors:*

$$f\in E\Leftrightarrow\forall k\in\boldsymbol{N}^*,\quad B(x,f^k)=o(x),$$

$$f\in Eq\Leftrightarrow\forall k\in\boldsymbol{N}^*,\quad \psi(x,f^k)=o(x)$$

dès que l'une des conditions suivantes est vérifiée:

$$\gamma_0\geqslant 3/2,$$

$$\gamma_0\geqslant 1\quad \text{et}\quad \sum_{\|p\|=x}1=o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

La démonstration de ce résultat nécessite quelques lemmes préliminaires.

LEMME 1. *Soit $\mathscr{M}$ une partie de $\mathscr{N}$, d'élément générique $\bar b$, f une application de $\mathscr{M}$ dans $\boldsymbol{C}$ et g une application absolument continue de $\boldsymbol{R}_+$ dans $\boldsymbol{C}$. Alors:*

$$\sum_{\|\bar b\|\leqslant x}g(\|\bar b\|)f(\bar b)=g(x)\sum_{\|\bar b\|\leqslant x}f(\bar b)-\int_0^x\Big(\sum_{\|\bar b\|\leqslant t}f(\bar b)\Big)g'(t)\,dt.$$

C'est tout simplement une sommation à la Abel (voir par exemple Ellison [8], p. 11).

LEMME 2. *Supposons que $\pi(x)=O(x/\log x)$. Alors pour toute application f de $\mathscr{N}$ dans D, on a (i.e. les trois limites existent et sont égales dès que l'une au moins existe):*

$$\lim_{x\to\infty}x^{-1}\psi(x,f)=\lim_{x\to\infty}x^{-1}\vartheta(x,f)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\log x}\right)^{-1}\pi(x,f).$$

Nous allons montrer que, avec les hypothèses faites:

$$\psi(x,f)-\vartheta(x,f)=O(x^{1/2}\log x),\tag{3}$$

$$\vartheta(x,f)-\log x\cdot\pi(x,f)=O\left(\frac{x}{\log x}\right).\tag{4}$$

En effet:

$$|\psi(x,f)-\vartheta(x,f)|=\Big|\sum_{\substack{\|p\|^a\leqslant x\\ a\geqslant 2}}\log\|p\|f(p)\Big|\leqslant\sum_{\|p\|^a\leqslant x}\log\|p\|$$

et, comme $\|p\|\geqslant\|p_1\|>1$, on a nécessairement $a\leqslant\left[\dfrac{\log x}{\log p_1}\right]$. D'où:

$$|\psi(x,f)-\vartheta(x,f)|\leqslant\left[\frac{\log x}{\log p_1}\right]\log x\cdot\pi(x^{1/2})=O(x^{1/2}\log x)$$

donc (3).

Et en utilisant le lemme 1 avec $\mathscr{M}=\mathscr{N}$ et $g(x)=\log x$, on obtient:

$$\vartheta(x,f)-\log x\cdot\pi(x,f)=-\int_{p_1}^x\pi(t,f)\frac{dt}{t}.$$

f étant à valeurs dans D, $|\pi(t,f)|\leqslant\pi(t)=O(t/\log t)$. L'intégrale est donc $O(\mathrm{li}(x))$, donc $O(x/\log x)$. Le lemme 2 est une conséquence immédiate de (3) et (4). ■

Le lemme 2 peut donc s'appliquer dès que $\gamma_0\geqslant 1$. On en déduit en particulier:

$$\text{si}\ \ \gamma_0\geqslant 3/2,\qquad \psi(x)=x+o(x).$$

LEMME 3. *Soit $\mathscr{M}=\{\bar b_n\}_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ une partie infinie de $\mathscr{N}$, avec $\|\bar b_n\|$ croissant au sens large, et d'élément générique $\bar b$. Soient $\bar B(x)$ et $\bar B^0(x)$ les entiers:*

$$\bar B(x)=\sum_{\|\bar b\|\leqslant x}1,\qquad \bar B^0(x)=\sum_{\|\bar b\|=x}1$$

alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes:

(i) *il existe une application $F:\boldsymbol{R}_+^*\to\boldsymbol{R}_+^*$ continue telle que:*

$$\bar B(x)=F(x)+o(F(x));$$

(ii) $\bar B^0(x)=o(\bar B(x))$;

(iii) *pour toute application g de $\mathscr{M}$ dans D, et en posant $\bar B(x,g)=\sum_{\|\bar b\|\leqslant x}g(\bar b)$:*

$$\lim_{N\to\infty}N^{-1}\sum_{n=1}^N g(\bar b_n)=c\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\bar B(x)^{-1}\bar B(x,g)=c.$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) en effet, d'après (i), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x_ε tel que:

$$x > x_\varepsilon \Rightarrow \bar{B}^0(x) + (1-\varepsilon)F(x) \leqslant \bar{B}^0(x) + \lim_{x' \to x^-} \bar{B}(x') \leqslant \bar{B}(x) \leqslant (1+\varepsilon)F(x)$$

d'où: $\bar{B}^0(x) \leqslant 2\varepsilon F(x)$ et (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii) si N et x sont quelconques et vérifient:

$$\begin{cases} \|\bar{b}_N\| \leqslant x, \\ \|\bar{b}\| \leqslant x \Rightarrow \|\bar{b}\| \leqslant \|\bar{b}_N\| \end{cases}$$

alors:

$$\Big|\sum_{n=1}^{N} g(\bar{b}_n) - \bar{B}(x, g)\Big| \leqslant \Big|\sum_{\|\bar{b}\|=x} g(\bar{b})\Big| \leqslant \bar{B}^0(x)$$

dès que g est à valeurs dans D.

D'où en particulier si $g = 1$, on obtient: $|N - \bar{B}(x)| \leqslant \bar{B}^0(x)$ et:

$$\Big|\Big(\sum_{n=1}^{N} g(\bar{b}_n) - cN\Big) - \big(\bar{B}(x, g) - c\bar{B}(x)\big)\Big| \leqslant (1+|c|)\bar{B}^0(x).$$

On en déduit (iii) facilement, car N et $\bar{B}(x)$ sont équivalents, et $\bar{B}^0(x)$ est négligeable devant eux.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que (ii) n'est pas vérifié, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $\{x_n\}_{n \in \boldsymbol{N}^*}$ croissante de nombres réels telle que:

$$\forall n \in \boldsymbol{N}^*, \quad \bar{B}^0(x_n) > \varepsilon \bar{B}(x_n) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = +\infty.$$

En supprimant au besoin les premiers termes de cette suite, on peut supposer:

$$\forall n \in \boldsymbol{N}^*, \quad \bar{B}^0(x_n) \geqslant 2 \quad (\text{car } \lim_{n\to\infty} \bar{B}(x_n) = +\infty).$$

Pour chaque n, il existe donc $i = i_n$ tel que $x_n = \|\bar{b}\|$ ait pour solutions:

$$\bar{b} = \bar{b}_{i+k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant \bar{B}^0(x_n).$$

On définit alors la fonction g de $\mathscr{M}$ dans D par:

$$\begin{cases} g(\bar{b}_{i+k}) = 1 & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant \left[\dfrac{\bar{B}^0(x_n)}{2}\right], \\ g(\bar{b}_{i+k}) = -1 & \text{si } 0 \leqslant \bar{B}^0(x_n) - k \leqslant \left[\dfrac{\bar{B}^0(x_n)}{2}\right] - 1, \\ g(\bar{b}) = 0 & \text{si } \bar{b} \text{ n'est pas parmi les précédents lorsque } n \text{ décrit } \boldsymbol{N}^*. \end{cases}$$

Il est alors immédiat que:

$$\forall x \in \boldsymbol{R}_+^*, \quad \bar{B}(x, g) = 0.$$

D'autre part, si n est quelconque et $N = i_n + \left[\dfrac{\bar{B}^0(x_n)}{2}\right]$, on obtient:

$$\sum_{k=1}^{N} g(\bar{b}_k) = \sum_{k=1}^{i_n} g(\bar{b}_k) + \sum_{k=1}^{\left[\frac{\bar{B}^0(x_n)}{2}\right]} g(\bar{b}_{i_n+k}) = \left[\frac{\bar{B}^0(x_n)}{2}\right] \geqslant \frac{\bar{B}^0(x_n)}{2} - 1$$

et comme N est inférieur ou égal à $\bar{B}(x_n) = i_n + \bar{B}^0(x_n)$, on obtient:

$$N^{-1} \sum_{k=1}^{N} g(\bar{b}_k) > \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{\varepsilon \bar{B}(x_n)}$$

donc en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\, N^{-1} \sum_{k=1}^{N} g(\bar{b}_k) \geqslant \varepsilon/2 \quad \text{et } g \text{ ne vérifie pas (iii).}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) en effet, si F est définie entre deux normes consécutives $\|\bar{b}_n\| < \|\bar{b}_{n+1}\|$ par:

$$\begin{cases} F(\|\bar{b}_{n+1}\|) = n, \\ F(\|\bar{b}_n\|) = n - \bar{B}^0(\|\bar{b}_n\|), \\ F \text{ affine entre } \|\bar{b}_n\| \text{ et } \|\bar{b}_{n+1}\|. \end{cases}$$

F est évidemment continue sur $\boldsymbol{R}_+$ (en posant $F(x) = 0$ si $x < \|\bar{b}_0\|$), et:

$$\forall x \in \boldsymbol{R}_+^*, \quad F(x) \leqslant \bar{B}(x) \leqslant F(x) + \bar{B}_0(x')$$

où x' est la plus grande norme $\|\bar{b}\|$ inférieure à x. Donc (ii) entraîne que F et $\bar{B}$ sont équivalents quand x tend vers $+\infty$. ■

Nous pouvons maintenant établir le théorème 4: le critère de Weyl s'énonce: une suite $\{\theta_n/2\pi\}_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si:

$$\forall k \in \boldsymbol{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} e^{ik\theta_n} = o(N).$$

donc:

$$f \in E \Leftrightarrow \forall k \in \boldsymbol{N}^*, \quad \sum_{n=0}^{N} f^k(b_n) = o(N),$$

$$f \in Eq \Leftrightarrow \forall k \in \boldsymbol{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} f^k(p_n) = o(N).$$

On peut alors appliquer le lemme 3 avec $\mathscr{M} = \mathscr{N}$, (i) étant vérifié dans les deux cas, et avec $\mathscr{M} = \mathscr{P}$, (i) étant vérifié si $\gamma_0 \geqslant 3/2$ et (ii) si $\gamma_0 \geqslant 1$.

Et, d'après le lemme 2:

$$\pi(x, f^k) = o\left(\frac{x}{\log x}\right) \Leftrightarrow \psi(x, f^k) = o(x).$$

Cela termine la démonstration du théorème 4. ■

θ étant un nombre réel, on définit une application totalement multiplicative L_θ de $\mathscr{N}$ dans $\boldsymbol{U}$ par:

$$\forall b \in \mathscr{N}, \quad L_\theta(b) = \|b\|^{i\theta} = e^{i\theta\log\|b\|}.$$

On déduit alors du lemme 1:

Lemme 4. *Soit g une application de $\mathscr{N}$ dans* $\boldsymbol{C}$. *Alors*:

$$B(x, g) = Cx^{1+ir} + o(x) \Rightarrow B(x, gL_\theta) = C\frac{1+ir}{1+i(r+\theta)}x^{1+i(r+\theta)} + o(x).$$

Posons $B(x, g) = Cx^{1+ir} + R(x, g)$. En appliquant le lemme 1 avec $g(x) = x^{i\theta}$, on obtient:

$$\begin{aligned} B(x, gL_\theta) &= B(x, g)x^{i\theta} - \int_1^x B(t, g)\,d(t^{i\theta}) \\ &= Cx^{1+ir}x^{i\theta} - \int_1^x Ct^{1+ir}\,d(t^{i\theta}) + R(x, g)x^{i\theta} - \int_1^x R(t, g)\,d(t^{i\theta}) \\ &= C\frac{1+ir}{1+i(r+\theta)}x^{1+i(r+\theta)} + o(x) + i\theta\int_1^x o(1)\,dt \\ &= C\frac{1+ir}{1+i(r+\theta)}x^{1+i(r+\theta)} + o(x). \ ■ \end{aligned}$$

Proposition 1. *Soit f une application de $\mathscr{N}$ dans* $\boldsymbol{U}$. *Alors*:

$$f \in E \Leftrightarrow \forall\theta \in \boldsymbol{R}, \quad fL_\theta \in E,$$
$$f \in Eq \Leftrightarrow \forall\theta \in \boldsymbol{R}, \quad fL_\theta \in Eq.$$

Il suffit en effet d'utiliser le théorème 4, et le lemme 4 avec $C = 0$, et en remarquant que:

$$(fL_\theta)^k = f^k L_{k\theta} \quad \text{pour } E,$$
$$\psi(x, g) = B(x, g\Lambda) \quad \text{et} \quad \Lambda(fL_\theta)^k = f^k\Lambda L_{k\theta} \quad \text{pour } Eq. \ ■$$

L'appartenance à E ou à Eq est donc inchangée en multipliant par un L_θ. Ce résultat généralise le résultat énoncé par Delange dans [6]: "si y est une fonction additive de $\boldsymbol{N}$ dans $\boldsymbol{R}$, $\{y(n)\}$ est équirépartie modulo 1 est équivalent à $\{y(n) + \theta\log n\}$ est équirépartie modulo 1 pour tout θ réel", le passage de fonctions dans $\boldsymbol{R}$ à fonctions dans $\boldsymbol{U}$ se faisant par $y \mapsto Y$ telle que $Y(b) = e^{iy(b)}$. La fonction $\theta\log\|b\|$ donne alors L_θ.

Cette proposition peut être reliée au théorème 2, donnant notamment:

Théorème 5. *Si X est totalement multiplicative et à valeurs dans* $\boldsymbol{U}$, *et s'il existe un réel θ tel que $\langle XL_\theta\rangle \subset \mathscr{K}$, on a*:

$$X \in E \Leftrightarrow X \in Eq.$$

Il suffit d'appliquer le théorème 2 avec $X' = XL_\theta$, puis la proposition 1.

4. Etude de la fonction $L(s, f)$.

4.1. Si $f = X$ est totalement multiplicative et à valeurs dans D, $L(s, X)$ a une écriture en produit eulerien:

$$L(s, X) = \prod(1 - X(p)\|p\|^{-s})^{-1} \quad \text{pour} \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

On en déduit facilement que:

$$-\frac{L'}{L}(s, X) = \sum \Lambda(b)X(b)\|b\|^{-s} = s\int_1^\infty x^{-s}\frac{\psi(x, X)}{x}\,dx$$

et, par un résultat classique:

$$\psi(x, X) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\frac{L'}{L}(s, X)x^s\frac{ds}{s} + O\left(\sum \Lambda(b)\frac{\left(\frac{x}{\|b\|}\right)^\sigma}{\log\frac{x}{\|b\|}}\cdot\frac{1}{T}\right)$$

où $\sigma > 1$, et le O est indépendant de σ, x et T.

Si X appartient à un $\mathscr{F}_\gamma$ avec $R(x, X) = O(x^\theta)$ pour un réel $\theta < 1$, $L(s, X) - A(X)/(s-1)$ est holomorphe pour $\operatorname{Re}(s) > \theta$. On peut donc ramener l'intégration précédente sur une droite $\sigma < 1$. L'intégrale entre $\sigma - iT$ et $\sigma + iT$ est alors $o(x)$. On peut montrer qu'alors $L(s, X)$ ne s'annule pas pour $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$. Le terme principal de $\psi(x, X)$ provient donc du résidu en $s = 1$, égal à $B(X)x$, où $B(X)$ est l'ordre du pôle $s = 1$ de $L(s, X)$. Il est facile de montrer que $s = 1$ est soit un pôle simple de $L(s, X)$ (si $A(X) \neq 0$), soit un point régulier ($L(1, X) \neq 0$), soit un zéro simple. C'est-à-dire que $B(X) \in \{-1, 0, 1\}$, et le résultat du théorème 1.

C'est cette méthode qui est utilisée par Müller dans [12], pour des X d'ordre fini (i.e. $\exists n \in \boldsymbol{N}^*, X^n = 1$). Mais cette dernière condition n'est utilisée que pour avoir $|X(b)| \leqslant 1$.

Si X appartient à $\mathscr{F}_\gamma$, Amitsur obtient le même résultat dès que $\gamma \geqslant 2$ ou $\gamma \geqslant 3$ suivant les X, mais en utilisant de manière essentielle $X^n = 1$

pour un entier n: la démonstration est „élémentaire", et utilise un long calcul sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Nous allons démontrer ici de manière analytique le résultat d'Amitsur, en enlevant l'hypothèse X d'ordre fini.

4.2. Si $f \in \mathscr{F}_\gamma$, on ne peut rien dire sur l'existence d'un prolongement de $L(s, f)$ sur une partie du demi-plan $\operatorname{Re}(s) \leqslant 1$. Cependant, si j est un entier tel que $0 \leqslant j \leqslant \gamma - 1$, l'intégrale $\int_1^\infty x^{-s} \frac{R(x, f)}{x} dx$ converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$, donc définit sur ce domaine une fonction continue et bornée. On posera pour $0 \leqslant j \leqslant \gamma - 1$:

$$L_j(f) = \int_1^\infty x^{-2} R(x, f) \log^j x \, dx$$

et si $0 \leqslant j \leqslant \gamma - 1$:

$$L^{(j)}(s, f) - (-1)^j j! \frac{A(f)}{(s-1)^{j+1}} \tag{5}$$

a un prolongement continu et borné sur $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$ (il suffit d'utiliser (1) et (2)).

Nous dirons que $L(s, f)$ a un "pseudo-pôle" en $s = 1$ d'ordre $B(f)$ si $\frac{L'}{L}(s, f) + \frac{B(f)}{s-1}$ a un prolongement continu au demi-plan $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$. Si $L(s, f)$ est méromorphe sur ce demi-plan, cela signifie que $L(s, f)$ n'a ni zéro ni pôle sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1$ sauf en $s = 1$, où elle admet un pôle d'ordre $B(f)$ (d'où $B(f) \in \mathbf{Z}$).

Cette notion de pseudo-pôle est intéressante pour la raison suivante:

THÉORÈME 6. *Si $\zeta(s)$ a un pseudo-pôle en $s = 1$ d'ordre B et si X est une application de $\mathscr{N}$ dans D totalement multiplicative et telle que $L(s, X)$ ait un pseudo-pôle en $s = 1$ d'ordre $B(X)$, alors*:

$$\psi(x, X) = B(X)x + o(x).$$

C'est à dire que l'on peut obtenir une estimation de $\psi(x, X)$ dès que l'on connaît le comportement de $L(s, X)$ sur la droite $\operatorname{Re}(s) = 1$. Ce résultat repose sur un théorème taubérien dû à Ikehara (on en trouvera une démonstration dans [13]):

THÉORÈME 7. *Soit f: $[1, \infty[\to \mathbf{R}$ positive, croissante et telle que*

$$F(s) = \int_1^\infty x^{-s} df(x)$$

soit absolument convergente pour $\operatorname{Re}(s) > 1$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $F(s) - C/(s-1)$ soit continue pour $\operatorname{Re}(s) \geqslant 1$. Alors:

$$f(x) = Cx + o(x).$$

En effet, on peut appliquer le théorème 7 à:

$$f_1(x) = 2\psi(x) + \operatorname{Re}(\psi(x, X)),$$
$$f_2(x) = 2\psi(x) + \operatorname{Im}(\psi(x, X)),$$
$$f_3(x) = \psi(x)$$

ces fonctions étant croissantes et positives, et correspondant à:

$$F_1(s) = -2\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \frac{1}{2}\left(\frac{L'}{L}(s, X) + \overline{\frac{L'}{L}(\bar{s}, X)}\right),$$

$$F_2(s) = -2\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{i}{2}\left(\frac{L'}{L}(s, X) - \overline{\frac{L'}{L}(\bar{s}, X)}\right),$$

$$F_3(s) = -\frac{\zeta'}{\zeta}(s).$$

En utilisant (1) et (2) avec $f = 1$, $j = 1$ et s réel, on obtient: si $\zeta(s)$ a un pseudo-pôle en $s = 1$ d'ordre B, nécessairement $B = 1$.

On obtient alors, comme X est à valeurs dans D:

$$\overline{\lim_{\sigma \to 1}} \left| (\sigma - 1)\frac{L'}{L}(\sigma, X) \right| = \overline{\lim_{\sigma \to 1}} \left| (\sigma - 1) \sum \Lambda(b) X(b) \|b\|^{-s} \right|$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\sigma \to 1}} (\sigma - 1) \sum \Lambda(b) \|b\|^{-s} \leqslant \overline{\lim_{\sigma \to 1}} (1 - \sigma) \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) = 1$$

ce qui entraîne:

$$|B(X)| = \lim_{\sigma \to 1} \left| (\sigma - 1)\frac{L'}{L}(\sigma, X) \right| \leqslant 1.$$

Donc $C_1 = 2 + \operatorname{Re}(B(X))$, $C_2 = 2 + \operatorname{Im}(B(X))$ et $C_3 = 1$ sont positives, et le théorème 7 s'applique. Ce qui donne:

$$2\psi(x) + \operatorname{Re}(\psi(x, X)) = 2x + \operatorname{Re}(B(X))x + o(x),$$
$$2\psi(x) + \operatorname{Im}(\psi(x, X)) = 2x + \operatorname{Im}(B(X))x + o(x),$$
$$\psi(x) = x + o(x)$$

d'où le résultat. ∎

4.3. Nous définissons l'ensemble $\mathscr{K}$ d'applications X de $\mathscr{N}$ dans D totalement multiplicatives par:

$$\mathscr{K} = \mathscr{K}_1 \cup \mathscr{K}_2 \cup \mathscr{K}_3,$$
$$\mathscr{K}_1 = \{X \in \mathscr{F}_2 \mid A(X) \neq 0\},$$
$$\mathscr{K}_2 = \{X \in \mathscr{F}_2 \mid A(X) = 0 \text{ et } L_0(X) \neq 0\},$$
$$\mathscr{K}_3 = \{X \in \mathscr{F}_3 \mid A(X) = L_0(X) = 0\}.$$

Soit $F(s)$ une fonction holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 1$. On dira que F a un prolongement continu au voisinage de $s = 1+it$ s'il existe un voisinage V de $1+it$ dans le demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ tel que F admette un prolongement continu sur V (on notera aussi F ce prolongement).

LEMME 5. *Soit $f\colon \mathcal{N} \to \boldsymbol{C}$ telle que $f \in \mathscr{F}_2$. On pose $L_{-1}(f) = A(f)$ et on suppose qu'il existe un entier d tel que:*

$$d \geqslant -1; \quad f \in \mathscr{F}_{d+2}; \quad L_d(f) \neq 0,$$

$$-1 \leqslant j \leqslant d-1 \Rightarrow L_j(f) = 0.$$

Alors $\dfrac{L'}{L}(s,f) - \dfrac{d}{s-1}$ *a un prolongement continu au voisinage de $s = 1$.*

Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, on pose:

$$c_1(s) = L'(s,f) - \frac{A(f)}{(s-1)^2} = -s\int_1^\infty x^{-s}\frac{R(x,f)}{x}\log x\,dx + \int_1^\infty x^{-s}\frac{R(x,f)}{x}\,dx,$$

$$c_2(s) = L(s,f) - \frac{A(f)}{s-1} = A(f) + s\int_1^\infty x^{-s}\frac{R(x,f)}{x}\,dx$$

d'après (1) et (2). L'hypothèse $f \in \mathscr{F}_2$ entraîne que $c_1(s)$ et $c_2(s)$ ont un prolongement continu dans le demi-plan fermé $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$, notés encore c_1 et c_2. Et:

— si $d = -1$,

$$\frac{L'}{L}(s,f) + \frac{1}{s-1} = \frac{c_2(s) + c_1(s)\cdot(s-1)}{A(f) + c_2(s)\cdot(s-1)}$$

a un prolongement continu dans $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ tel que sur V voisinage de $s = 1$

$$|c_2(s)(s-1)| < A(f) \quad \text{sur } V;$$

— si $d = 0$,

$$A(f) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{L'}{L}(s,f) = \frac{c_1(s)}{c_2(s)}$$

a un prolongement continu sur un voisinage V de $s = 1$ tel que $c_2(s)$ soit non nul sur V, ce voisinage existant car

$$c_2(1) = L(1,f) = L_0(f) \neq 0;$$

— si $d \in \boldsymbol{N}^*$, les fonctions $L^{(j)}(s,f)$, $0 \leqslant j \leqslant d+1$, sont continues sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$. Il existe donc deux fonctions continues sur

ce même domaine $c_3(s)$ et $c_4(s)$ telles que:

$$L(s,f) = \sum_{j=0}^{d}\frac{1}{j!}L^{(j)}(1,f)(s-1)^j + (s-1)^{d+1}c_3(s),$$

$$L'(s,f) = \sum_{j=0}^{d-1}\frac{1}{j!}L^{(j+1)}(1,s)(s-1)^j + (s-1)^d c_4(s).$$

Or, avec (1) et (2):

$$L(1,f) = L_0(f) = 0,$$

$$L^{(j)}(1,f)$$
$$= (-1)^{j-1}L_{j-1}(f) + (-1)^j L_j(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant d-1, \\ (-1)^d L_d(f) \neq 0 & \text{si } j = d \end{cases}$$

et

$$\frac{L'}{L}(s,f) - \frac{d}{s-1} = \frac{c_4(s) - c_3(s)}{\dfrac{(-1)^d}{d!}L_d(f) + (s-1)c_3(s)}$$

orsque $\mathrm{Re}(s) > 1$ a donc un prolongement continu sur V tel que:

$$|(s-1)c_3(s)| < \frac{1}{d!}L_d(f)$$

d'où le lemme. ∎

Deux sortes d'applications f échappent à ce lemme:

— les applications telles que $L_d(f)$ n'est défini que pour $0 \leqslant d \leqslant D$, et telles que:

$$0 = L_0(f) = L_1(f) = \ldots = L_D(f) = A(f);$$

— les applications telles que $L_d(f)$ est défini pour tout entier d, et toujours nul. Dans ce dernier cas, si $R(x,f) = O(x^\theta)$ pour un réel $\theta < 1$, le développement de Laurent de $L(s,f)$ autour de $s = 1$ a tous ses coefficients nuls, donc $f = 0$.

Mais ces applications ne peuvent être totalement multiplicatives. En effet:

LEMME 6. *Si X est totalement multiplicative, et vérifie: $X \in \mathscr{F}_2$ et $A(X) = L_0(X) = 0$, alors: $L_1(X) \neq 0$.*

Voir [1] ou [5] pour une démonstration détaillée. Le résultat provient de:

$$X \in \mathscr{F}_2 \quad \text{et} \quad A(X) = L_0(X) = 0 \Rightarrow \sum_{\|b\| \leqslant x}\frac{X(b)}{\|b\|}\log\frac{x}{\|b\|} = -L_1(X) + o(1)$$

d'où:

$$\log x = \sum_{\|b\| \leqslant x} \frac{X(b)\mu(b)}{\|b\|} \sum_{\|b'\| \leqslant \frac{x}{\|b\|}} \frac{X(b')}{\|b'\|} \log \frac{x}{\|bb'\|}$$
$$= -L_1(X) \sum_{\|b\| \leqslant x} \frac{X(b)\mu(b)}{\|b\|} + o(\log x)$$

où μ est la fonction de Möbius sur $\mathscr{N}$.

4.4. Nous allons maintenant nous intéresser à $L(s,f)$ au voisinage d'un point $s = 1+it$; $t \neq 0$.

LEMME 7. *Si X est totalement multiplicative de $\mathscr{N}$ dans D, et telle que: $X \in \mathscr{F}_2$ et $X^2 \in \mathscr{F}_1$, alors $\frac{L'}{L}(s, X)$ a un prolongement continu au demi-plan* $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ *privé point* $s = 1$.

En effet, $X \in \mathscr{F}_2$ et $X^2 \in \mathscr{F}_1$ entrainent que les fonctions $L(s, X)$, $L'(s, X)$ et $L(s, X^2)$ ont des prolongements continus sur $\mathrm{Re}(s) \geqslant 1$ privé de $s = 1$. Il reste donc à montrer que $L(s, X)$ ne s'annule pas sur ce domaine, ce que l'on sait déjà pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ à l'aide de l'écriture en produit eulerien.

Supposons que $L(1+it, X) = 0$, avec $t \neq 0$. En considérant les fonctions d'une variable réelle $L(\sigma+it, X)$ et $L'(\sigma+it, X)$ définies et continues pour $\sigma > 1$, on obtient:

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{L(\sigma+it, X)}{\sigma - 1} = L'(1+it, X).$$

Or, X étant totalement multiplicative, on sait montrer par une méthode classique que:

$$\forall \sigma > 1, \quad |\zeta(\sigma)^3 L(\sigma+it, X)^4 L(\sigma+2it, X^2)| \geqslant 1$$

et comme $\lim_{\sigma \to 1} L(\sigma+2it, X^2) = L(1+2it, X^2)$, on obtient: $\varliminf_{\sigma \to 1} \zeta(\sigma)^3 \times (\sigma-1)^4 > 0$ d'où une contradiction, car $B(x) = O(x)$ entraîne $\zeta(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma - 1}\right)$. ■

Remarque. On sait que si $f \in \mathscr{F}_\gamma$, $1 < \gamma < 2$, $L(s,f)$ est lipschitzienne d'ordre $\gamma - 1$ au voisinage de $1+it$, $t \neq 0$, d'où:

$$X \in \mathscr{F}_\gamma \Rightarrow \varlimsup_{\sigma \to 1} \frac{L(\sigma+it, X)}{(\sigma-1)^{\gamma-1}} < \infty.$$

Il est facile de voir que l'on peut remplacer la condition $X \in \mathscr{F}_2$ par $X \in \mathscr{F}_{7/8}$ (on obtient alors la même contradiction). On peut montrer par une méthode analogue mais plus compliquée que $L(1+it, X) \neq 0$ si $t \neq 0$ dès que $X \in \mathscr{F}_{3/2}$ et $X^n \in \mathscr{F}_1$ pour tout $n \geqslant 2$. On montre d'abord que pour tout nombre réel k tel que $1 < k < 2$, il existe un polynôme trigonométrique:

$$P(\varphi) = 1 + k\cos\varphi + \sum_{n=2}^{N} k^n 2^{1-n} \cos n\varphi$$

tel que $P(\varphi)$ soit toujours positif ou nul. On en déduit:

$$\forall \sigma > 1, \quad \left|\zeta(\sigma) L(\sigma+it, X)^k \prod_{n=2}^{N} L(\sigma+nit, X^n)^{k^n 2^{1-n}}\right| \geqslant 1$$

et une contradiction analogue à celle du lemme.

5. Fin des démonstrations des théorèmes 1 et 2.

5.1. Les lemmes 5, 6 et 7 entraînent immédiatement la:

PROPOSITION 2. *Si $X \in \mathscr{K}$ et $X^2 \in \mathscr{F}_1$, la fonction $L(s, X)$ a un pseudo-pôle en $s = 1$ d'ordre $B(X)$ avec:*

$$B(X) = \begin{cases} 1 & si \quad X \in \mathscr{K}_1, \\ 0 & si \quad X \in \mathscr{K}_2, \\ -1 & si \quad X \in \mathscr{K}_3. \end{cases}$$

Or l'hypothèse $\gamma_0 \geqslant 2$ entraîne que $1 \in \mathscr{K}_1$. On peut donc appliquer la proposition 2 avec $X = 1$, $B(1) = B = 1$, donc le théorème 6 avec X tel que $X \in \mathscr{K}$ et $X^2 \in \mathscr{F}_1$. Cela donne exactement le théorème 1. ■

5.2. Soit K un groupe multiplicatif d'applications de $\mathscr{N}$ dans $\mathbf{C}$ tel que $K \subset \mathscr{K}$. Alors $X \in K$ entraîne que X est totalement multiplicative et à valeurs dans $\mathbf{U}$. Si on note $K_i = K \cap \mathscr{K}_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$, on sait alors (voir [5] ou [9]) que:

$$(6) \qquad \begin{cases} K_i^{-1} = K_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{car dans } K, X^{-1} = \overline{X}), \\ K_1 \times K_1 \subset K_1; \quad K_1 \times K_3 \subset K_3; \quad K_3 \times K_3 \subset K_1, \\ K_1 \times K_2 \subset K_2; \quad K_3 \times K_2 \subset K_2 \end{cases}$$

donc en particulier K_1 et $K_1 K_3$ sont des sous-groupes de K, et que $(K_1 \cup K_3 : K_1) \leqslant 2$.

Supposons que $\langle X \rangle \subset \mathscr{K}$. On peut donc appliquer le théorème 1 à toutes les puissances X^k, ce qui donne:

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \psi(x, X^k) = B(X^k)x + o(x)$$

d'où:

$$
\begin{aligned}
X \in E \Leftrightarrow \forall k \in \boldsymbol{N}^*, &\quad A(X^k) = 0 && \text{d'après le théorème 4,}\\
\Leftrightarrow \forall k \in \boldsymbol{N}^*, &\quad X^k \in \mathscr{K}_2 \cup \mathscr{K}_3 && \text{car } A(X^k) \neq 0 \text{ caractérise } \mathscr{K}_1 \text{ dans } \mathscr{K},\\
\Leftrightarrow \forall k \in \boldsymbol{N}^*, &\quad X^k \in \mathscr{K}_2 && \text{car si } X^k \in \mathscr{K}_3, \text{ on obtient}\\
& && \qquad X^{2k} \in \mathscr{K}_1 \text{ avec (6),}\\
\Leftrightarrow \forall k \in \boldsymbol{N}^*, &\quad B(X^k) = 0,\\
\Leftrightarrow X \in Eq & && \text{d'après le théorème 4.}
\end{aligned}
$$

On a donc établi le théorème 2. ∎

Les propriétés (6) permettent aussi d'obtenir:

PROPOSITION 3. *Si X et X' vérifient $\langle X, X'\rangle \subset \mathscr{K}$ ($\langle X, X'\rangle$ est le groupe multiplicatif engendré par X et X'), alors:*

$$
\left.\begin{array}{l} X' \in E \\ X \notin E \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \boldsymbol{Z},\ n \neq 0 \Rightarrow XX'^n \in E.
$$

En effet, $X \notin E$ entraîne l'existence d'un entier $n_1 \in \boldsymbol{N}^*$ tel que $X^{n_1} \notin \mathscr{K}_2$ d'après le théorème 4. Alors $X^{2n_1} \in \mathscr{K}_1$.

De même, si $XX'^n \notin E$, il existe $n_2 \in \boldsymbol{N}^*$ tel que $(XX'^n)^{2n_2} \in \mathscr{K}_1$. Alors en utilisant encore (6):

$$
X^{2n_1n_2} X'^{2nn_1n_2} \in \mathscr{K}_1 \quad \text{et} \quad X^{2n_1n_2} \in \mathscr{K}_1 \Rightarrow X'^{2nn_1n_2} \in \mathscr{K}_1
$$

ce qui entraîne avec le théorème 4 et $X \in E$: $2nn_1n_2 = 0$ d'où $n = 0$. ∎

Mais, en pratique, la condition $\langle X, X'\rangle \subset \mathscr{K}$ est difficile à vérifier.

6. Cas des fonctions multiplicatives. Soit Y une fonction multiplicative de $\mathscr{N}$ dans $\boldsymbol{U}$ et $X = X(Y)$ la fonction totalement multiplicative de $\mathscr{N}$ dans $\boldsymbol{U}$ définie par:

$$
\forall p \in \mathscr{P}, \quad X(p) = Y(p).
$$

Il est alors immédiat que, d'après la définition de Eq, on a:

$$
X \in Eq \Leftrightarrow Y \in Eq.
$$

On peut d'autre part utiliser dans le cadre de la théorie des nombres premiers généralisés une technique employée par Halász dans [10] pour $\boldsymbol{N}^*$: comme Y est multiplicative, $L(s, Y)$ a une écriture en produit eulerien pour $\mathrm{Re}(s) > 1$:

$$
L(s, Y) = \prod \left(1 + Y(p)\|p\|^{-s} + Y(p^2)\|p\|^{-2s} + \ldots\right)
$$

et la fonction $H(s) = L(s, Y)/L(s, X)$ est une série de Dirichlet absolument convergente pour $\mathrm{Re}(s) > 1/2$, puisque Y est à valeurs dans $\boldsymbol{U}$. On utilise alors le lemme suivant, établi dans [10]:

LEMME 8. *Soient*

$$
F(s) = \sum f(b)\|b\|^{-s}, \qquad F^0(s) = \sum f^0(b)\|b\|^{-s}, \qquad H(s) = \sum h(b)\|b\|^{-s}
$$

trois séries de Dirichlet convergentes pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, et telles que sur ce domaine $F(s) = H(s)F^0(s)$. Supposons que la série $H(s)$ soit absolument convergente en $s = 1$, et que l'on ait:

$$
M^0(x) = \sum_{\|b\| \leqslant x} f^0(x) = Cx + o(x)
$$

alors on a:

$$
M(x) = \sum_{\|b\| \leqslant x} f(b) = C \sum \frac{h(b)}{\|b\|} x + o(x) = CH(1)x + o(x).
$$

En prenant $f = Y^k$ et $f^0 = X^k$, k décrivant $\boldsymbol{N}^*$. Comme $X(Y^k) = (X(Y))^k$, les fonctions $L(s, Y^k)/L(s, X^k)$ sont des séries de Dirichlet absolument convergentes en $s = 1$, donc avec le lemme 8 et le théorème 4 on obtient:

$$
\text{si } \langle X\rangle \subset \mathscr{K}, \quad X \in E \Leftrightarrow Y \in E
$$

e qui entraîne l'équivalence:

$$
Y \in E \Leftrightarrow Y \in Eq
$$

dès que $\langle X\rangle \subset \mathscr{K}$.

C'est-à-dire que l'on obtient un analogue du théorème 2 pour des fonctions simplement multiplicatives, mais l'hypothèse de régularité porte cette fois sur $X = X(Y)$ et non sur Y elle-même.

Bibliographie

[1] S. A. Amitsur, *Arithmetic linear transformations and abstract prime number theorem*, Canad. J. Math. 13 (1961), p. 83–109.

[2] — *Correction to „Arithmetic linear transformations...“*, ibid. 21 (1969), p. 1–5.

[3] A. Beurling, *Analyse de la loi asymptotique de distribution des nombres premiers généralisés*, Acta Math. 68 (1937), p. 255–291.

[4] A. Blanchard, *Théorie analytique des nombres premiers*, Dunod, 1969.

[5] J.-P. Borel, *Problèmes d'équirépartition liés aux nombres premiers généralisés de Beurling et aux systèmes d'entiers de Gauss généralisés*, Thèse de 3e cycle, Univ. Aix-Marseille II (1977).

[6] H. Delange, *Quelques résultats nouveaux sur les fonctions additives*, Bull. S.M.F. mémoire 25 (1971), p. 45–53.

[7] H. G. Diamond, *Chebychev estimates for Beurling generalized primes*, Proc. Amer. Math. Soc. 39 (1973), p. 503–508.

[8] W. J. Ellison, *Les nombres premier iers*, H mann, 1975.

[9] W. Forman and H. N. Shapiro, *Abstract prime number theorems*, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), p. 587–619.
[10] G. Halász, *Über die Mittelwerte multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 19 (1968), p. 365–403.
[11] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, 1974.
[12] H. Müller, *Ein Beitrag zur abstrakten Primzahltheorie*, J. Reine Angew. Math. 259 (1973), p. 171–182.
[13] D. V. Widder, *The Laplace transform*, Princeton University Press, 1946.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
U.E.R. DES SCIENCES
123, rue Albert Thomas
87100 Limoges, France

Reçu le 25.1.1978
et dans la forme modifiée le 2.5.1978 (1035)

ACTA ARITHMETICA
XXXVIII (1980)

A note on Dirichlet's L-functions

by

R. BALASUBRAMANIAN (Bombay)

1. Introduction. The aim of the paper is to prove an asymptotic formula for $\sum_{\chi}|L(\frac{1}{2}+it,\chi)|^2$ (see Theorem 1 below). This is an improvement of result of Gallagher [3], who proves an upper bound for the sum. He remarks that it is possible to get by his method an asymptotic formula in the range $|t|<q^{O(1)}$. (The condition $|t|<q^{o(1)}$ as given in the paper is a misprint.) He also remarks that Selberg and Paley have asymptotic formulae for $|t|<q^{1/4-\varepsilon}$. We prove below the asymptotic formula in the range $|t|<q^{3/4-\varepsilon}$. In the range $|t|>q^{3/4-\varepsilon}$, Gallagher's result is better than ours. It is no doubt possible to deduce Gallagher's result also by our method, but since the proof is essentially the same as that of Gallagher, we are not giving the proof. For some other results, see § 5.

This paper can be considered as a continuation of my paper *A note on Hurwitz's Zeta function* [1].

2. Statement of the theorem.

THEOREM. *The asymptotic formula*

$$\sum_{\chi}|L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^2 = \frac{\varphi^2(q)}{q}\log qt + O\big(q(\log\log q)^2\big) + O\big(te^{10\sqrt{\log q}}\big) + {} \\ + O\big(q^{1/2}t^{2/3}e^{10\sqrt{\log q}}\big)$$

holds uniformly for all values of q, and $t\geqslant 3$.

COROLLARY. *If $|t|\leqslant q^{3/4-\varepsilon}$, then*

$$\sum_{\chi}|L(\tfrac{1}{2}+it,\chi)|^2 \sim \frac{\varphi^2(q)}{q}\log qt \quad \textit{for all } t\geqslant 3.$$

3. Notation. To avoid minor complications, we make the following convention. A sum of the form $\sum_{a<m\leqslant b} f(m)$ is defined to be zero if either $b\leqslant a$ or the semiclosed interval $(a,b]$ does not contain even one integer. In