Conspectus materiae tomi XXXVIII, fasciculi 3

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange	Address of the Editorial Board and of the exchange	Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches	Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

ISBN 83-01-01335-4 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A

ACTA ARITHMETICA
XXXVIII (1980)

Eine Erweiterung des nullstellenfreien Bereiches der Heckeschen Zetafunktion und Primideale in Idealklassen

von

Jürgen G. Hinz (Marburg)

1. Es sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n und der Diskriminante d über dem Körper der rationalen Zahlen. Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ in K bedeute $N\mathfrak{a}$ seine Norm. Ferner bezeichne $\zeta_K(s)$ die Dedekindsche Zetafunktion in K.

Im Jahre 1968 bewiesen T. Mitsui [21] und A. V. Sokolovskiĭ [24] unabhängig voneinander, daß keine Nullstelle von $\zeta_K(\sigma+it)$ im Bereich

$$\sigma \geqslant 1-\frac{c(K)}{(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}}, \qquad |t|\geqslant t_0(K)$$

liegt, wobei $c(K)>0$ und $t_0(K)>0$ nur vom Körper K abhängige Konstanten sind.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst im zweiten Paragraphen entsprechende Untersuchungen für die Heckeschen Zetafunktionen $\zeta_K(s,\chi)$ durchgeführt. Dabei bezeichnet χ die Charaktere der engeren Idealklassengruppe modulo eines festen Ideals $\mathfrak{q}$ in K, wie sie E. Landau in [18] definiert hat. Man erhält das folgende Resultat:

Satz 1.1. *Bei passendem $c=c(K)>0$ liegen im Bereich*

$$\sigma\geqslant 1-\frac{c}{M(\mathfrak{q},t)},$$

$$M(\mathfrak{q},t)=\max\{\log N\mathfrak{q},\ (\log(|t|+3))^{2/3}(\log\log(|t|+3))^{1/3}\}$$

außer der eventuell vorhandenen einfachen reellen Ausnahmenullstelle keine Nullstellen irgendeines $\zeta_K(\sigma+it,\chi)$, χ modulo $\mathfrak{q}$.

Das zur Zeit offenbar beste, bekannte Resultat bei entsprechenden Problemen im Körper der rationalen Zahlen ist in diesem Satz enthalten. Es wird ferner eine entscheidende Verschärfung des bisherigen Ergebnisses im Zahlkörper erreicht, welches in [20] mit $M(\mathfrak{q},t)=\log\{N\mathfrak{q}(|t|+2)\}$

T. Mitsui bewiesen hat. Man vergleiche hierzu auch die Arbeit [2] von E. Fogels, der ein ähnliches Resultat wie T. Mitsui zeigt.

Zum Beweis von Satz 1.1 wird die in [21] für $\zeta_K(s)$ entwickelte Methode auf Zetafunktionen mit Charakteren verallgemeinert. Es gelingt, das Problem über Gitterpunktbetrachtungen auf die Abschätzung einer gewissen trigonometrischen Summe zurückzuführen. Diese Abschätzung erhält man in der bekannten Weise unter Verwendung eines Satzes von I. M. Vinogradov.

Der Satz 1.1 gestattet verschiedene Anwendungen auf die Verteilung von Primidealen in einer Idealklasse $\mathfrak{C}$ der engeren Idealklassengruppe $\bmod \mathfrak{q}$. Ein erstes Resultat dieser Art wird im Abschnitt 3 bewiesen. Dazu überträgt man die in [22], Kap. IX angegebene Methode von T. Tatuzawa für den Fall von rationalen Primzahlen in arithmetischen Progressionen auf Zahlkörper. Es ergibt sich der

Satz 1.2. *Es sei A eine beliebige positive reelle Zahl und $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^A$. Für jedes $\varepsilon > 0$ und $x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K)$ existiert mindestens eine rationale Primzahl p im Intervall $[x, x+x^{\theta+\varepsilon}]$ und ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{C}$ mit $N\mathfrak{p} = p$. Man kann $\theta = 1-1/(2n+1)$ wählen.*

Korollar 1.1. *Sei $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^A$, $A > 0$ und $a \in K$ eine ganze Zahl mit $(a, \mathfrak{q}) = 1$. Für jedes $\varepsilon > 0$ und $x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K)$ gibt es mindestens eine Primzahl ω des Körpers K mit*

$$\omega \equiv a \bmod \mathfrak{q}, \quad |N\omega| = p \in [x, x+x^{\theta+\varepsilon}].$$

Falls a total positiv ($a \succ 0$) ist, dann gilt auch $\omega \succ 0$. Insbesondere folgt mit $\mathfrak{q} = (1)$ und $a = 1$, daß für $x \geqslant x_0(\varepsilon, K)$ stets eine Primzahl p im Intervall $[x, x+x^{\theta+\varepsilon}]$ liegt, die Norm einer total positiven Primzahl aus K ist.

Eine Zahl ω aus K heißt hierbei Primzahl, wenn das von ihr erzeugte Hauptideal ein Primideal in K ist.

Korollar 1.2. *Sei $q \geqslant 2$ eine natürliche Zahl und $1 \leqslant q^n N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^A$, $A > 0$. Ferner sei l eine zu q teilerfremde ganze rationale Zahl, zu der es ein Ideal $\mathfrak{a}$ in K gibt, so daß $N\mathfrak{a} \equiv l \bmod q$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}) = 1$. Dann existiert für $\varepsilon > 0$ und $x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K)$ mindestens eine Primzahl p in $[x, x+x^{\theta+\varepsilon}]$ mit den Eigenschaften:*

$$p \equiv l \bmod q, \quad p = N\mathfrak{p},$$

$\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{a}$ liegen in derselben Idealklasse modulo $(q)\mathfrak{q}$.

Entsprechende Folgerungen aus einem zu Satz 1.2 ähnlichen Satz findet man auch bei E. Fogels in [3]. Es sollen hier kurze direkte Beweise angegeben werden.

Die Existenz einer solchen nur vom Körpergrad n abhängigen Konstanten $0 < \theta < 1$ in Satz 1.2 wurde 1965 von E. Fogels ([5]) für $|d| N\mathfrak{q} \geqslant D_0$ und $x \geqslant (|d| N\mathfrak{q})^c$, $c = c(K)$ hinreichend groß, bewiesen.

Für den Spezialfall, daß man statt Primideale in einer Klasse $\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}$ alle Primideale ersten Grades in K betrachtet, gelang es 1968 A. V. Sokolovskiĭ ([24]), einen Wert für θ anzugeben. Dieses Resultat ist in einer kürzlich erschienenen Arbeit von D. R. Heath-Brown ([9]) verbessert worden.

Eine weitere Anwendung von Satz 1.1 findet man im vierten Paragraphen. Es wird wie bei entsprechenden Problemen im Körper der rationalen Zahlen ([22], Kap. IX) eine asymptotische Abschätzung für die Anzahl $\Pi(x; \mathfrak{C})$ der Primideale $\mathfrak{p}$ mit $N\mathfrak{p} \leqslant x$ in einer Idealklasse $\mathfrak{C}$ der engeren Idealklassengruppe $\bmod \mathfrak{q}$ bewiesen. Man erhält den

Satz 1.3. *Sei $\Delta = \max\{\log N\mathfrak{q}, (\log x)^{2/5}(\log\log x)^{1/5}\}$. Es gibt positive Konstanten $c_1 = c_1(K)$ und $c_2 = c_2(K)$, so daß gleichmäßig in $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant \exp\left(c_1 \frac{\log x}{\log\log x}\right)$ gilt:*

$$\Pi(x; \mathfrak{C}) = \frac{1}{h(\mathfrak{q})} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left\{\frac{1}{h(\mathfrak{q})} \frac{x^{\beta_1}}{\log x} + \frac{x}{h(\mathfrak{q})} \exp\left(-c_2 \frac{\log x}{\Delta}\right)\right\}.$$

Dabei bezeichnet $h(\mathfrak{q})$ die Anzahl der Idealklassen $\bmod \mathfrak{q}$ *und $\beta_1 = \beta_1(\mathfrak{q})$ die eventuell existierende reelle Ausnahmenullstelle von $\zeta_K(s, \chi_1)$, χ_1 Ausnahmecharakter* $\bmod \mathfrak{q}$.

Dieser Zusammenhang zwischen einem nullstellenfreien Bereich der Funktion $\prod_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \zeta_K(s, \chi)$ und dem Restglied im Primidealsatz wird auch von W. Staś und K. Wiertelak in [23] untersucht.

Korollar 1.3. *Es sei $A > 0$ eine beliebige reelle Zahl und $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^A$. Dann folgt mit einer geeigneten Konstanten $c_3 = c_3(A, K) > 0$:*

$$\Pi(x; \mathfrak{C}) = \frac{1}{h(\mathfrak{q})} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O_A\left\{\frac{x}{h(\mathfrak{q})} \exp\left(-c_3 \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right\}.$$

Insbesondere ergibt sich für eine zu $\mathfrak{q}$ teilerfremde total positive ganze Zahl a in K:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} = (\omega) \\ \omega \succ 0 \\ \omega \equiv a \bmod \mathfrak{q} \\ N\omega \leqslant x}} 1 = \frac{1}{h(\mathfrak{q})} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O_A\left\{\frac{x}{h(\mathfrak{q})} \exp\left(-c_3 \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right\}.$$

Korollar 1.4. *Es sei $1 \leqslant q \leqslant (\log x)^A$, $A > 0$ und l ein Idealnormenrest* $\bmod q$, *d.h. $(l, q) = 1$, $l \equiv N\mathfrak{a} \bmod q$, wobei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal in K ist.*

Dann gilt:

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p} \leqslant x \\ N\mathfrak{p} \equiv l \bmod q}} 1 = \frac{1}{\varphi_1(q)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O_A\left\{\frac{x}{\varphi_1(q)} \exp\left(-c_3 \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right\},$$

wobei $\varphi_1(q)$ die Anzahl der $\bmod q$ *inkongruenten Idealnormen $N\mathfrak{a}$ mit $(\mathfrak{a}, q) = 1$ bzw. die Ordnung der Gruppe der Idealnormenreste* $\bmod q$ *ist.*

Ein Korollar 1.4 entsprechendes Resultat mit dem schwächeren Restglied

$$O\left\{\frac{x}{\varphi_1(q)}\exp\left(-c_3(\log x)^{1/2}\right)\right\}$$

gibt schon T. Tatuzawa in der in Kürze erscheinenen Arbeit [26] an. Man vergleiche zu ähnlicher Problemstellung auch die Untersuchungen von E. Fogels in [7] und [8].

E. Landau ([18]) bewies als erster im Zahlkörper eine asymptotische Abschätzung für den Ausdruck $\Pi(x; \mathfrak{C})$. Im Jahre 1956 veröffentlichte T. Mitsui ([20]) das bisher beste Resultat dieser Art. Er zeigte Korollar 1.3 mit dem Restglied

$$O_A\left\{x\exp\left(-c_3(\log x)^{1/2}\right)\right\}.$$

Für die Anzahl $\Pi(x)$ aller Primideale $\mathfrak{p}$ in K mit $N\mathfrak{p} \leqslant x$ gilt nach [21] als beste Abschätzung:

$$\Pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left\{x\exp\left(-c_4(K)\,\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right\}.$$

Dieses Ergebnis ist in Korollar 1.3 enthalten.

Im fünften Abschnitt dieser Arbeit soll auf eine letzte Anwendung von Satz 1.1 eingegangen werden. Der Primzahlsatz von E. Bombieri ([1]) wurde von M. N. Huxley ([15]) und in einer schwächeren Form von R. Wilson ([27]) auf algebraische Zahlkörper übertragen. Im Jahre 1969 bewies M. Jutila ([16]) ein ähnliches Resultat für rationale Primzahlen in „kurzen" arithmetischen Reihen. Unter Verwendung von Satz 1.1 und Lemma 3.5 kann man dieses Ergebnis auf Zahlkörper verallgemeinern:

Satz 1.4. *Es seien $x \geqslant 2$ und $y = x^a \geqslant 2$ mit festem $1-\dfrac{2n-1}{4n^2} < a < 1$. Man setze für $\varepsilon > 0$:*

$$b = \frac{2n-1-4n^2(1-a)}{4n^2+12n-6} - \varepsilon.$$

Dann gilt für $A > 0$

$$\sum_{N\mathfrak{q}\leqslant x^b} \frac{h(\mathfrak{q})}{\Phi(\mathfrak{q})} \max_{\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}} \max_{z\leqslant y} \left|\Pi(x+z;\ \mathfrak{C}) - \Pi(x;\ \mathfrak{C}) - \frac{1}{h(\mathfrak{q})}\int_x^{x+z}\frac{du}{\log u}\right| \ll_{\varepsilon,A} y(\log x)^{-A},$$

wobei $\Phi(\mathfrak{q})$ die Eulersche Funktion für Ideale ist.

Für eine beliebige Körperzahl α seien im folgenden die n Konjugierten von α mit $\alpha^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$, und die Norm von α mit $N\alpha = \alpha^{(1)}\ldots\alpha^{(n)}$ bezeichnet. Die Zahlen r_1 und r_2 haben die in der algebraischen Zahlentheorie übliche Bedeutung, insbesondere ist also $n = r_1+2r_2$. Kleine deutsche Buchstaben werden für ganze Ideale in K verwendet. Alle auftretenden Konstanten sind positiv und nur vom Körper K abhängig, falls nichts anderes gesagt ist.

Die wesentlichsten Resultate der vorliegenden Arbeit sind in [12] angekündigt worden.

2. Das Ziel dieses Paragraphen ist es, die in der Einleitung angegebene Erweiterung des nullstellenfreien Bereiches für die Heckeschen Zetafunktionen zu beweisen. Man verfährt zunächst wie bei dem entsprechenden Problem im Körper der rationalen Zahlen. Es wird gezeigt, daß sich Satz 1.1 aus dem folgenden Satz 2.1 ergibt. Die in [22], Kap. VIII, 6 angewandte Methode läßt sich auf Zahlkörper übertragen und soll hier nur skizziert werden.

Satz 2.1. *Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$. Dann gilt bei passendem $c_5(K) > 0$ im Bereich*

$$\sigma \geqslant \sigma_0 := 1 - c_5(K)\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}, \qquad |t| \geqslant 3 \tag{2.1}$$

die Abschätzung:

$$\zeta_K(s, \chi) \ll \exp\left\{c_5(K)\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}\log N\mathfrak{q} + c_6(K)\log\log|t|\right\}.$$

Beweis von Satz 1.1. Die Behauptung folgt für $|t| < 4$, $|d|N\mathfrak{q} > D_0$ nach [2] und für $|t| < 4$, $|d|N\mathfrak{q} \leqslant D_0$ wegen $\zeta_K(1+it, \chi) \neq 0$. Da die Nullstellen von $\zeta_K(s,\chi)\zeta_K(s,\bar\chi)$ zur reellen Achse symmetrisch liegen, kann man $t \geqslant 4$ annehmen. Sei $\varrho = \beta+i\gamma$ eine Nullstelle von $\zeta_K(s, \chi)$ und $\gamma \geqslant 4$. Man setze

$$M_0 = M_0(\mathfrak{q}, \gamma) = \max\{\log N\mathfrak{q},\ (\log\gamma)^{2/3}(\log\log\gamma)^{1/3}\},$$

$$\beta = 1 - \frac{b}{M_0}, \tag{2.2}$$

$$\alpha_0 = 1 + \frac{a}{M_0}, \qquad \text{wo } 0 < a < \tfrac{1}{2} \text{ später bestimmt wird.}$$

Ferner sei $c_7 = c_7(K)$ so klein gewählt, daß für jedes $a > 0$ und jedes $\gamma \geqslant 4$ die Kreisscheiben

$$|s-\alpha_0-i\gamma| \leqslant r_0, \qquad |s-\alpha_0-i2\gamma| \leqslant r_0, \qquad r_0 = c_7\frac{(\log\log\gamma)^{2/3}}{(\log\gamma)^{2/3}} \leqslant 1$$

im Bereich (2.1) liegen.

Nach Satz 2.1 folgt dann

$$\zeta_K(s,\chi)\zeta_K^{-1}(a_0+i\gamma,\chi) \ll R_0 \quad \text{für} \quad |s-a_0-i\gamma| \leqslant r_0$$

und

$$\zeta_K(s,\chi)\zeta_K^{-1}(a_0+i2\gamma,\chi) \ll R_0 \quad \text{für} \quad |s-a_0-i2\gamma| \leqslant r_0,$$

wobei

$$R_0 = \frac{M_0}{a}\exp\left\{c_8(K)\left(\frac{(\log\log\gamma)^{2/3}}{(\log\gamma)^{2/3}}\log N\mathfrak{q}+\log\log\gamma\right)\right\}.$$

Es gilt mit (2.2):

$$\log R_0 \ll \frac{(\log\log\gamma)^{2/3}}{(\log\gamma)^{2/3}} M_0 \log\frac{1}{a}. \tag{2.3}$$

Man wähle nun wie in [22] die Zahl δ unabhängig von $\mathfrak{q}$ und γ so klein ($\delta \leqslant \frac{1}{4}r_0M_0$), daß die Nullstelle $\varrho = \beta+i\gamma$ für $0<a\leqslant\delta$ und $0<b\leqslant\delta$ in der Kreisscheibe $|s-a_0-i\gamma| \leqslant \frac{1}{2}r_0$ liegt.

Es ist zu zeigen, daß es eine von χ und γ unabhängige Konstante $c_0 = c_0(K)$ gibt, für welche $0<c_0<b\leqslant\delta$ gilt. Man bezeichne mit χ_0 den Hauptcharakter $\bmod \mathfrak{q}$.

Wegen $\zeta_K(s,\chi) \neq 0$ für $\operatorname{Re} s \geqslant a_0 > 1$ folgt nach [22], A. Satz 4.5 mit $h\geqslant 1$ bzw. $h \geqslant 0$ unter Berücksichtigung von (2.3):

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0+i\gamma,\chi) \geqslant -c_9(K)M_0\log\frac{1}{a}+\frac{1}{a_0-\beta},$$

$$\operatorname{Re}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0+i2\gamma,\chi^2) \geqslant -c_9(K)M_0\log\frac{1}{a}.$$

Ferner gilt analog [2], Lemma 8:

$$\left|\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0,\chi_0)\right| < \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{a_0-1} = \frac{5}{4}\cdot\frac{M_0}{a} \quad \text{für} \quad 0<a\leqslant\delta_1=\delta_1(K)\leqslant\delta.$$

Es ergibt sich also für $0<a\leqslant\delta_1\leqslant\delta$ und $0<b\leqslant\delta$:

$$3\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0,\chi_0)+4\operatorname{Re}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0+i\gamma,\chi)+\operatorname{Re}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0+i2\gamma,\chi^2)$$

$$\geqslant M_0\left\{\frac{4}{a+b}-\frac{15}{4a}-c_{10}(K)\log\frac{1}{a}\right\} =: M_0 f(b).$$

Nun folgt: $f(0) \geqslant \frac{1}{8a} > 0$ für $0<a\leqslant\delta_2(K)\leqslant\delta_1$.

Wegen der Stetigkeit von $f(b)$ gibt es eine Konstante $c_0 = c_0(K) > 0$, so daß bei festem $0<a\leqslant\delta_2(K)$ gilt:

$$f(b) \geqslant \frac{1}{16a} > 0 \quad \text{für} \quad 0<b\leqslant c_0<\delta.$$

Andererseits erhält man für jedes $a>0$ nach [2], (11):

$$3\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0,\chi_0)+4\operatorname{Re}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0+i\gamma,\chi)+\operatorname{Re}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(a_0+i2\gamma,\chi^2) \leqslant 0.$$

Es soll nun der Beweis von Satz 2.1 geführt werden. Man kann in (2.1) $\sigma\leqslant 2$ und $|t|\geqslant t_0(K)$ annehmen.

Die folgenden Lemmata zeigen, daß man sich bei den Untersuchungen auf gewisse endliche Summen beschränken kann.

Lemma 2.1. *Es sei χ_0 der Hauptcharakter der engeren Idealklassengruppe* $\bmod \mathfrak{q}$. *Dann gilt bei passendem $c_5(K) > 0$ im Bereich*

$$\sigma \geqslant \sigma_0 := 1-c_5(K)\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}, \qquad |t|\geqslant t_0(K)$$

die Abschätzung:

$$\zeta_K(s,\chi_0) \ll \exp\left\{c_5(K)\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}\log N\mathfrak{q}+c_{12}(K)\log\log|t|\right\}.$$

Beweis. Zunächst folgt bekanntlich:

$$\zeta_K(s,\chi_0) = \zeta_K(s)\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}}\left(1-(N\mathfrak{p})^{-s}\right) = \zeta_K(s)\sum_{\mathfrak{a}|\mathfrak{q}}\mu(\mathfrak{a})(N\mathfrak{a})^{-s}.$$

Nach [21], Lemma 9 ergibt sich für $\sigma\geqslant\sigma_0$, $|t|\geqslant t_0(K)$:

$$\zeta_K(s,\chi_0) \ll (\log|t|)^{c_{11}(K)}\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant N\mathfrak{q}}(N\mathfrak{a})^{-\sigma_0} \ll \frac{(N\mathfrak{q})^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0}\exp\{c_{11}(K)\log\log|t|\}.$$

Lemma 2.2. *Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe modulo $\mathfrak{q}$, der nicht der Hauptcharakter ist. Man setze:*

$$\begin{aligned} A_0 &:= N\mathfrak{q}\cdot\exp\{(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}\}, \\ A_1 &:= N\mathfrak{q}\cdot|t|^{7n/6}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dann gilt im Bereich

$$\sigma\geqslant\sigma_0 := 1-c_5(K)\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}} \geqslant 1-\frac{8n-6}{7n(n+1)}, \qquad |t|\geqslant t_0(K)$$

die Darstellung

$$\zeta_K(s,\chi) = \sum_{A_0 \leqslant N\mathfrak{b} < A_1} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} + $$
$$+ O\left(\exp\left\{c_5(K)\,\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}\log N\mathfrak{q} + c_{13}(K)\log\log|t|\right\}\right).$$

Beweis. Für $\sigma > 1$ ist

$$\zeta_K(s,\chi) = \sum_{N\mathfrak{b} < A_1} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} + \sum_{N\mathfrak{b} \geqslant A_1} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s}.$$

Es sei nun

$$2 \geqslant \sigma \geqslant \sigma_0 \geqslant 1 - \frac{8n-6}{7n(n+1)} \geqslant 1 - \frac{3}{2(n+1)}.$$

Durch partielle Summation unter Benutzung des von Landau [19] auf Zahlkörper verallgemeinerten Satzes von Pólya–Vinogradov erhält man mit (2.4):

$$\zeta_K(s,\chi) = \sum_{N\mathfrak{b} < A_1} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} + s\cdot\int_{A_1}^{\infty} u^{-s-1}\cdot \sum_{A_1 \leqslant N\mathfrak{b} \leqslant u} \chi(\mathfrak{b})\,du$$
$$= \sum_{N\mathfrak{b} < A_1} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} + O\left\{\exp\left(c_5(K)\,\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}\log N\mathfrak{q}\right)\right\}.$$

Ferner folgt:

$$\sum_{N\mathfrak{b} < A_0} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} \ll \sum_{N\mathfrak{b} < A_0} (N\mathfrak{b})^{-\sigma_0} \ll \frac{A_0^{1-\sigma_0}}{1-\sigma_0}$$
$$\ll \exp\left\{c_5(K)\,\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}\log N\mathfrak{q} + c_{13}(K)\log\log|t|\right\}.$$

LEMMA 2.3. *Es seien X und Z reelle Zahlen mit $1 \leqslant X < Z$. Für $0 \leqslant \sigma \leqslant 2$ gilt:*

$$\sum_{XN\mathfrak{q} \leqslant N\mathfrak{b} < ZN\mathfrak{q}} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} \ll (XN\mathfrak{q})^{-\sigma} \max_{X < Y \leqslant Z} \left|\sum_{XN\mathfrak{q} \leqslant N\mathfrak{b} < YN\mathfrak{q}} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-it}\right|.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar durch partielle Summation.

Das Ziel der folgenden Ausführungen ist es, den obigen Ausdruck

$$\sum_{XN\mathfrak{q} \leqslant N\mathfrak{b} < YN\mathfrak{q}} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-it}$$

in geeigneter Weise umzuformen, so daß die Methode von Mitsui anwendbar ist.

LEMMA 2.4. *Es gilt:*

$$\sum_{XN\mathfrak{q} \leqslant N\mathfrak{b} < YN\mathfrak{q}} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-it} = \sum_{\mathfrak{C}} \chi_{\mathfrak{C}}(N\mathfrak{a})^{it} \sum_{\substack{(\alpha)\neq(0)\\ \alpha\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}\\ \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}\\ \alpha \succ 0\\ XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}) \leqslant |N\alpha| < YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})}} |N\alpha|^{-it}, \quad \mathfrak{a} \in \mathfrak{C}^{-1}.$$

Dabei wird in der ersten Summe über alle $h(\mathfrak{q})$ Klassen $\mathfrak{C}$ der engeren Idealklassengruppe $\bmod \mathfrak{q}$ *summiert. Die zweite Summe läuft über die verschiedenen Hauptideale (α) mit den angegebenen Eigenschaften: $\alpha \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}$, $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}$, α total positiv, $XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}) \leqslant N\alpha < YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})$.*

Beweis. Man erhält zunächst:

$$\sum_{XN\mathfrak{q} \leqslant N\mathfrak{b} < YN\mathfrak{q}} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-it} = \sum_{\mathfrak{C}} \chi_{\mathfrak{C}} \sum_{\substack{\mathfrak{b}\in\mathfrak{C}\\ XN\mathfrak{q} \leqslant N\mathfrak{b} < YN\mathfrak{q}}} (N\mathfrak{b})^{-it}.$$

Zu jeder Klasse $\mathfrak{C}$ werde nun ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{C}^{-1}$ gewählt mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}) = 1$. Sei $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\alpha)$ für $\mathfrak{b}$ aus $\mathfrak{C}$, dann folgt die Behauptung nach [18], Satz XXXI.

Es sei $\mathfrak{E}$ die Einheitengruppe des Körpers K und $\mathfrak{E}^*$ die Gruppe aller Einheiten η aus $\mathfrak{E}$ mit $\eta \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}$, $\eta \succ 0$.

Man bezeichne mit w die Anzahl der Einheitswurzeln in K und mit $w(\mathfrak{q})$ die Anzahl der Einheitswurzeln in $\mathfrak{E}^*$.

Nach [10], Satz 35, gibt es in $\mathfrak{E}^*$ ein System von $r = r_1 + r_2 - 1$ Grundeinheiten $\eta_1, \ldots, \eta_r$ der Form

$$\eta_1 = \varepsilon_1^{b_1},$$
$$\vdots$$
$$\eta_r = \varepsilon_1^{b_{r1}}\varepsilon_2^{b_{r2}}\ldots\varepsilon_r^{b_r}, \qquad b_1\ldots b_r \neq 0.$$

Dabei sind $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ Grundeinheiten in K. Ferner gilt für den Index von $\mathfrak{E}^*$ in $\mathfrak{E}$:

$$[\mathfrak{E}:\, \mathfrak{E}^*] = \frac{w}{w(\mathfrak{q})}\, b_1 \ldots b_r. \tag{2.5}$$

Es bezeichne R den Regulator von K und $R(\mathfrak{q})$ den aus den Grundeinheiten $\eta_1, \ldots, \eta_r$ von $\mathfrak{E}^*$ gebildeten Regulator; dann folgt:

$$R(\mathfrak{q}) = b_1 \ldots b_r \cdot R.$$

Man betrachte nun alle nicht-assoziierten Zahlen α mit $\alpha \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}$, $\alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}$, $\alpha \succ 0$, $XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}) \leqslant N\alpha < YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})$. Dies ist wegen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}) = 1$ gleichbedeutend mit

$$\alpha \equiv \alpha_0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{q}, \qquad \alpha \succ 0, \qquad XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}) \leqslant N\alpha < YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}).$$

Sei α^0 eine feste total positive ganze Zahl aus der Restklasse $\alpha_0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{q}$. Man erhält genau alle zu α^0 assoziierten total positiven ganzen Zahlen α' der Restklasse $\alpha_0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{q}$ in der Form $\alpha' = \varrho \cdot \eta_1^{l_1} \ldots \eta_r^{l_r} \cdot \alpha^0$, wo ϱ eine beliebige Einheitswurzel aus $\mathfrak{E}^*$ ist, und $l_1, \ldots, l_r$ alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen.

Es existieren eindeutig bestimmte reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_r$ mit

$$x_1 \log|\varepsilon_1^{(k)}| + \ldots + x_r \log|\varepsilon_r^{(k)}| = \log|\alpha^{0(k)}| - \frac{1}{n}\log|N\alpha^0|; \quad k = 1, \ldots, r.$$

Man bestimme nun nacheinander die ganzen rationalen Zahlen $a_r, g_r, \ldots$ $\ldots, a_1, g_1$ aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} [x_r] &= b_r g_r + a_r, \quad 0 \leqslant a_r < b_r, \\ &\vdots \\ [x_1] - b_{r1} g_r - \ldots - b_{21} g_2 &= b_1 g_1 + a_1, \quad 0 \leqslant a_1 < b_1. \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$\varepsilon_1^{[x_1]} \ldots \varepsilon_r^{[x_r]} = \eta_1^{g_1} \ldots \eta_r^{g_r} \varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_r^{a_r}, \quad \text{wobei} \quad 0 \leqslant a_l < b_l,\ l = 1, \ldots, r.$$

Bei willkürlichem ϱ (Einheitswurzel aus $\mathfrak{E}^*$) gibt es somit genau ein Tupel $(g_1, \ldots, g_r)$, so daß

$$\alpha = \varrho \cdot \eta_1^{-g_1} \ldots \eta_r^{-g_r} \cdot \alpha^0$$

den folgenden Bedingungen genügt:

$$\alpha \equiv \alpha_0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{q}, \quad \alpha \succ 0,$$

$$XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}) \leqslant N\alpha < YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}), \tag{2.6}$$

$$\log|\alpha^{(k)}| - \frac{1}{n}\log N\alpha = u_1 \log|\varepsilon_1^{(k)}| + \ldots + u_r \log|\varepsilon_r^{(k)}|, \quad k = 1, \ldots, r,$$

$$a_l \leqslant u_l < a_l + 1, \quad l = 1, \ldots, r.$$

Schließlich werde bei festem Tupel $(a_1, \ldots, a_r)$ jeder ganzen Zahl α in (2.6) die Zahl

$$\beta = \alpha\varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_1^{-a_1} \ldots \varepsilon_r^{-a_r}$$

zugeordnet. Man setze

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(a_1, \ldots, a_r) := \{\beta;\ &\beta \equiv \beta_0 = \alpha_0\varepsilon_0 \bmod \mathfrak{a}\mathfrak{q}, \\ &XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}) \leqslant |N\beta| < YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}),\ \beta^{(k)} \operatorname{sgn} \varepsilon_0^{(k)} > 0,\ k = 1, \ldots, r_1, \\ &\log|\beta^{(k)}| - \frac{1}{n}\log|N\beta| = v_1 \log|\varepsilon_1^{(k)}| + \ldots + v_r \log|\varepsilon_r^{(k)}|, \\ &\qquad k = 1, \ldots, r,\ 0 \leqslant v_l < 1,\ l = 1, \ldots, r\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Es ergibt sich insgesamt

Lemma 2.5.

$$\sum_{\substack{(\alpha) \neq (0) \\ \alpha \equiv 0 \bmod \mathfrak{a} \\ \alpha \equiv 1 \bmod \mathfrak{q} \\ \alpha \succ 0 \\ XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q}) \leqslant |N\alpha| < YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})}} |N\alpha|^{-it} = \frac{1}{w(\mathfrak{q})} \sum_{a_1=0}^{b_1-1} \ldots \sum_{a_r=0}^{b_r-1} \sum_{\beta \in \mathfrak{M}} |N\beta|^{-it}.$$

Das Hauptproblem der weiteren Untersuchungen in diesem Paragraphen besteht darin, die trigonometrische Summe

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{M}} \exp\{-it\log|N\beta|\}$$

nach der von Mitsui in [21] angegebenen Beweismethode unabhängig von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}$ abzuschätzen. Man erhält das folgende wichtige Resultat.

Satz 2.2. *Es seien X und Y reelle Zahlen mit*

$$\exp\{(\log t)^{2/3}\} \leqslant X < Y \leqslant 2X < 2t^{6n/5}, \quad t \geqslant t_0(K).$$

Man setze $x = n\dfrac{\log t}{\log X}$; dann gilt

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{M}} \exp\{2\pi it\log|N\beta|\} \ll X^{1-c'/x^2}$$

wobei $c' = c'(n) > 0$ eine nur vom Körpergrad n abhängige Konstante ist.

Bevor auf den Beweis dieses Satzes eingegangen wird, soll zunächst gezeigt werden, wie sich Satz 2.1 hieraus ergibt.

Beweis von Satz 2.1. Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe $\bmod \mathfrak{q}$, der nicht der Hauptcharakter ist. Nach Lemma 2.2 gilt im Bereich

$$\sigma \geqslant \sigma_0 = 1 - c_5(K)\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}, \quad |t| \geqslant t_0(K)$$

die Abschätzung

$$\zeta_K(s, \chi) = \sum_{A_0 \leqslant N\mathfrak{b} < A_1} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} + \\ + O\left\{\exp\left(c_5(K)\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}}\log N\mathfrak{q} + c_{13}(K)\log\log|t|\right)\right\},$$

wobei A_0 und A_1 in (2.4) definiert sind. Falls $2^{N-1}A_0 < A_1 \leqslant 2^N A_0$ ist, dann folgt:

$$\sum_{A_0 \leqslant N\mathfrak{b} < A_1} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} = \sum_{j=0}^{N-2} \sum_{2^j A_0 \leqslant N\mathfrak{b} < 2^{j+1} A_0} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s} + \sum_{2^{N-1} A_0 \leqslant N\mathfrak{b} < A_1} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-s}. \tag{2.8}$$

Ferner gilt:

$$N \ll \log \frac{A_1}{A_0} \ll \log|t|. \tag{2.9}$$

Es sei

$$\frac{A_0}{N\mathfrak{q}} = \exp\{(\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}\} \leqslant X < Y \leqslant 2X < 2|t|^{7n/6} = 2\frac{A_1}{N\mathfrak{q}},$$

dann ergibt sich insbesondere

$$\exp\left\{\left(\log\frac{|t|}{2\pi}\right)^{2/3}\right\} \leqslant X < Y \leqslant 2X < 2\left(\frac{|t|}{2\pi}\right)^{6n/5}.$$

Man erhält somit nach Lemma 2.4, Lemma 2.5 und Satz 2.2 unter Berücksichtigung von (2.5):

$$\sum_{XN\mathfrak{q} \leqslant N\mathfrak{b} < YN\mathfrak{q}} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-it} \ll h(\mathfrak{q})[\mathfrak{E}:\mathfrak{E}^*]\cdot X^{1-c'/x^2}, \text{ wobei } x = n\frac{\log|t| - \log 2\pi}{\log X}.$$

Weiter folgt mit Lemma 2.3 für $X < Z \leqslant 2X$:

$$\sum_{XN\mathfrak{q} \leqslant N\mathfrak{b} < ZN\mathfrak{q}} \chi(\mathfrak{b})(N\mathfrak{b})^{-\sigma-it} \ll (N\mathfrak{q})^{-\sigma_0} h(\mathfrak{q})[\mathfrak{E}:\mathfrak{E}^*] X^{1-\sigma_0-c'/x^2}.$$

Nun gilt $\log X \geqslant (\log|t|)^{2/3}(\log\log|t|)^{1/3}$ und somit für $c_5(K) \leqslant c'/n^2$:

$$X^{1-\sigma_0-c'/x^2} \leqslant \exp\left\{\left(c_5(K)\frac{(\log\log|t|)^{2/3}}{(\log|t|)^{2/3}} - \frac{c'}{n^2}\frac{(\log X)^2}{(\log|t|)^2}\right)\log X\right\} \leqslant 1.$$

Schließlich erhält man nach (2.8) und (2.9) wegen $[\mathfrak{E}:\mathfrak{E}^*] \ll \dfrac{N\mathfrak{q}}{h(\mathfrak{q})}$ ([25]) die Behauptung.

Zum Beweis von Satz 2.2 sind Überlegungen verschiedener Art erforderlich. Das Problem wird über Gitterpunktbetrachtungen auf die Abschätzung einer trigonometrischen Summe zurückgeführt, auf die sich die Methode von Vinogradov anwenden läßt.

Es seien im folgenden X und Y reelle Zahlen mit der Eigenschaft:

$$\exp\{(\log t)^{2/3}\} \leqslant X < Y \leqslant 2X < 2t^{6n/5}, \quad t \geqslant t_0(K). \tag{2.10}$$

In allen Überlegungen ist X als genügend groß vorausgesetzt, ohne daß dies immer gesagt wird.

Nach einem Lemma von Rademacher [25] existiert eine Basis $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ mit der Eigenschaft:

$$|\beta_l^{(k)}| \ll \{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}, \quad 1 \leqslant k, l \leqslant n. \tag{2.11}$$

Ferner kann man β_0 in (2.7) so wählen, daß gilt:

$$|\beta_0^{(k)}| \ll \{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.12}$$

Man bezeichne mit $\mathfrak{L} := \{1 \leqslant k \leqslant r_1;\ \operatorname{sgn}\varepsilon_0^{(k)} = +1\}$ und definiere im n-dimensionalen Euklidischen Raum $\boldsymbol{R}^n$ eine Teilmenge $T_{\mathfrak{L}}$ durch

$$T_{\mathfrak{L}} := \left\{(y_1, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n;\ \gamma^{(k)} := \beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j^{(k)} \begin{cases} > 0 & \text{für } k \in \mathfrak{L} \\ < 0 & \text{für } k \notin \mathfrak{L},\ 1 \leqslant k \leqslant r_1 \\ \neq 0 & \text{für } r_1 + 1 \leqslant k \leqslant n \end{cases}\right\}.$$

Die Zahlen w_{jl} sind durch die Gleichungen

$$\sum_{l=1}^{r} w_{jl} \log|\varepsilon_l^{(k)}| = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ 1 & \text{für } j = k \end{cases}, \quad 1 \leqslant j,\ k \leqslant r$$

eindeutig bestimmt. Nun setze man:

$$z_0 = \log|N\gamma|, \quad N\gamma := \gamma^{(1)} \ldots \gamma^{(n)},$$

$$z_l = \sum_{j=1}^{r} w_{jl}\left\{\log|\gamma^{(j)}| - \frac{1}{n} z_0\right\}, \quad l = 1, \ldots, r,$$

$$\varphi_l = \arg\gamma^{(r_1+l)}, \quad 0 \leqslant \varphi_l < 2\pi, \quad l = 1, \ldots, r_2.$$

Dann folgt mit $\varphi_{r_2+l} = -\varphi_l$ für $1 \leqslant l \leqslant r_2$:

$$\gamma^{(k)} = \exp\left\{\frac{z_0}{n} + \sum_{l=1}^{r} z_l \log|\varepsilon_l^{(k)}|\right\} \operatorname{sgn}\gamma^{(k)}, \quad k = 1, \ldots, r_1,$$

(2.13)

$$\gamma^{(k)} = \exp\left\{\frac{z_0}{n} + \sum_{l=1}^{r} z_l \log|\varepsilon_l^{(k)}| + i\varphi_{k-r_1}\right\}, \quad k = r_1 + 1, \ldots, n.$$

Es wird jetzt eine Abbildung $f_{\mathfrak{L}}\colon T_{\mathfrak{L}} \to \boldsymbol{R}^n$ definiert vermöge

$$f_{\mathfrak{L}}(y_1, \ldots, y_n) = (z_0, z_1, \ldots, z_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r_2}).$$

Wegen (2.13) ist $f_{\mathfrak{L}}$ eine eineindeutige Abbildung von $T_{\mathfrak{L}}$ in $\boldsymbol{R}^n$. Es bezeichne B den folgenden Bereich im $\boldsymbol{R}^n$:

$$B := \left\{(z_0, z_1, \ldots, z_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r_2}) \in \boldsymbol{R}^n;\ \begin{array}{l} \log\{XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\} \leqslant z_0 < \log\{YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}, \\ 0 \leqslant z_l < 1, \quad l = 1, \ldots, r, \\ 0 \leqslant \varphi_l < 2\pi, \ l = 1, \ldots, r_2 \end{array}\right\}.$$

Ferner setze man für $\alpha \in K,\ \alpha \neq 0$:

(2.14) $$E(\alpha) := \exp\{2\pi i t \log|N\alpha|\}.$$

LEMMA 2.6. *Es gilt:*

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{M}} E(\beta) = \sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)} E\Big(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j\beta_j\Big).$$

Beweis. (a) Sei $\beta \in \mathfrak{M}$: $\beta^{(k)} = \beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} m_j\beta_j^{(k)}$, $k = 1, \ldots, n$. Wegen $\beta^{(k)}\operatorname{sgn}\varepsilon_0^{(k)} > 0$ für $1 \leqslant k \leqslant r_1$ folgt $(m_1, \ldots, m_n) \in T_{\mathfrak{L}}$. Nach (2.7) und Definition der Zahlen w_{jl} erhält man $f_{\mathfrak{L}}(m_1, \ldots, m_n) \in B$.

(b) Sei $\beta = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j\beta_j$ und $(m_1, \ldots, m_n) \in f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)$. Wegen $(m_1, \ldots, m_n) \in T_{\mathfrak{L}}$ folgt $\beta^{(k)}\operatorname{sgn}\varepsilon_0^{(k)} > 0$ für $k = 1, \ldots, r_1$. Weiter ergibt sich $\beta \in \mathfrak{M}$ nach (2.13) und Wahl des Bereiches B.

Man definiere für ganze rationale Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ die folgenden Würfel im $\boldsymbol{R}^n$:

(2.15) $$W = W(l_1, \ldots, l_n) := \{(y_1, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n;\ l_jG \leqslant y_j < (l_j+1)G,\ j = 1, \ldots, n\},$$

wobei

$$G = [X^{6/7n}].$$

LEMMA 2.7. *Für* $\mathfrak{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ *sei* $\|\mathfrak{x}\| := \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$. *Man setze*

$$d_0 := \max_{\substack{W \subseteq T_{\mathfrak{L}} \\ f_{\mathfrak{L}}(W)\cap B \neq \emptyset}} \{\sup\|\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2\|,\ \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2 \in f_{\mathfrak{L}}(W)\}.$$

Dann gilt:

$$d_0 \ll G\cdot X^{-1/n} \ll X^{-1/7n}.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{z}_0 = (z_0^0, z_1^0, \ldots, z_r^0, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_{r_2}^0)$ ein fester Punkt aus $f_{\mathfrak{L}}(W)\cap B$, $W \subseteq T_{\mathfrak{L}}$. Dann existiert $(y_1^0, \ldots, y_n^0) \in W \cap f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)$, so daß

$$f_{\mathfrak{L}}(y_1^0, \ldots, y_n^0) = (z_0^0, z_1^0, \ldots, z_r^0, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_{r_2}^0).$$

Wegen $\mathfrak{z}_0 \in B$ und $\sum_{k=1}^{n} \log|\varepsilon_l^{(k)}| = 0$ für $l = 1, \ldots, r$ folgt mit (2.10):

(2.16) $$\log\Big|\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j^0\beta_j^{(k)}\Big| = \frac{1}{n}\log\{XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\} + O(1), \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Es sei jetzt $\mathfrak{z}$ ein weiterer Punkt aus $f_{\mathfrak{L}}(W)$: $\mathfrak{z} = f_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{y})$, $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in W$.

Dann gilt für $1 \leqslant k \leqslant n$ nach (2.11), (2.15) und (2.16):

$$\log\Big|\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j\beta_j^{(k)}\Big| = \log\Big|\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j^0\beta_j^{(k)}\Big| + O(G\cdot X^{-1/n}).$$

Ferner erhält man für $r_1+1 \leqslant k \leqslant r_1+r_2$:

$$\arg\Big\{\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j\beta_j^{(k)}\Big\} = \arg\Big\{\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j^0\beta_j^{(k)}\Big\} + O(G\cdot X^{-1/n}).$$

Somit ergibt sich $\|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0\| \ll GX^{-1/n}$ und folglich die Behauptung.

LEMMA 2.8. *Es gilt:*

$$\sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)} E\Big(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j\beta_j\Big) = \sum_{W \subseteq f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)}\ \sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in W} E\Big(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j\beta_j\Big) + O\big(X^{1-\frac{1}{7n}}\big).$$

Beweis. Man betrachte die beiden folgenden Bereiche B_1 und B_2 im $\boldsymbol{R}^n$.

$$B_1 := \left\{(z_0, z_1, \ldots, z_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r_2}) \in \boldsymbol{R}^n;\ \begin{array}{l} \log\{XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\} - d_0 \leqslant z_0 \\ \qquad < \log\{YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\} + d_0, \\ -d_0 \leqslant z_l < 1 + d_0,\ l = 1, \ldots, r, \\ 0 \leqslant \varphi_l \leqslant 2\pi,\qquad l = 1, \ldots, r_2 \end{array}\right\};$$

$$B_2 := \left\{(z_0, z_1, \ldots, z_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r_2}) \in \boldsymbol{R}^n;\ \begin{array}{l} \log\{XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\} + d_0 \leqslant z_0 \\ \qquad < \log\{YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\} - d_0, \\ d_0 \leqslant z_l < 1 - d_0,\quad l = 1, \ldots, r, \\ d_0 \leqslant \varphi_l < 2\pi - d_0,\quad l = 1, \ldots, r_2 \end{array}\right\}.$$

Falls $\log\{YN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\} - d_0 \leqslant \log\{XN(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\} + d_0$ ist, werde $B_2 = \emptyset$ gesetzt. Sei

$$\mathfrak{y}_0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0) \in f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_2) \quad \text{und} \quad \mathfrak{z}_0 = (z_0^0, z_1^0, \ldots, z_r^0, \varphi_1^0, \ldots, \varphi_{r_2}^0) = f_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{y}_0).$$

Ferner sei

$$y_j^0 - G \leqslant y_j \leqslant y_j^0 + G, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Dann erhält man mit (2.11) und (2.15) für $1 \leqslant k \leqslant n$ wegen $\mathfrak{z}_0 \in B$:

$$\Big|\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j\beta_j^{(k)}\Big| \geqslant \Big|\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j^0\beta_j^{(k)}\Big| - \sum_{j=1}^{n} |(y_j - y_j^0)\beta_j^{(k)}|$$
$$\geqslant c_{15}(K)X^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n} - c_{14}(K)X^{6/7n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n} > 0,$$

da $X \geqslant X_0(K)$ nach (2.10).

Für $k \in \mathfrak{L}$ folgt wegen $(y_1^0, \ldots, y_n^0) \in T_{\mathfrak{L}}$:

$$\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j^{(k)} = \Big|\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j^0 \beta_j^{(k)}\Big| + \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_j^0)\beta_j^{(k)}$$
$$\geqslant c_{15}(K) X^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n} - c_{14}(K) X^{6/7n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n} > 0,$$

da $X \geqslant X_0(K)$.

Für $k \notin \mathfrak{L}$, $1 \leqslant k \leqslant r_1$, ergibt sich analog:

$$\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j^{(k)} < 0.$$

Somit existiert ein Würfel $W_1 = W_1(l_1^0, \ldots, l_n^0)$ mit

$$\mathfrak{y}_0 \in W_1 \subseteq \{(y_1, \ldots, y_n) \in \boldsymbol{R}^n;\ y_j^0 - G \leqslant y_j \leqslant y_j^0 + G,\ j = 1, \ldots, n\} \subseteq T_{\mathfrak{L}}.$$

Nun gilt:

$$\mathfrak{z}_0 = f_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{y}_0) \in f_{\mathfrak{L}}(W_1) \cap B_2 \subseteq f_{\mathfrak{L}}(W_1) \cap B.$$

Aus Lemma 2.7 erhält man $\|\mathfrak{z} - \mathfrak{z}_0\| \leqslant d_0$ für $\mathfrak{z} \in f_{\mathfrak{L}}(W_1)$ und folglich $f_{\mathfrak{L}}(W_1) \subseteq B$ nach Definition von B_2.

Insgesamt ist damit die Beziehung $f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_2) \subseteq \bigcup_{W \subseteq f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)} W$ gezeigt. Es sei $W \subseteq T_{\mathfrak{L}}$, $W \cap f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B) \neq \emptyset$ und $\mathfrak{y}_0 \in W \cap f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)$; dann folgt $f_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{y}_0) \in f_{\mathfrak{L}}(W) \cap B$. Nach Lemma 2.7 und Definition von B_1 ergibt sich $f_{\mathfrak{L}}(W) \subseteq B_1$ und somit

$$\bigcup_{\substack{W \subseteq T_{\mathfrak{L}} \\ W \cap f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B) \neq \emptyset}} W \subseteq f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_1).$$

Wegen

$$f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_2) \subseteq \bigcup_{W \subseteq f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)} W \subseteq \bigcup_{\substack{W \subseteq T_{\mathfrak{L}} \\ W \cap f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B) \neq \emptyset}} W \subseteq f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_1)$$

gilt:

$$\Big|\sum_{(m_1, \ldots, m_n) \in f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)} E\Big(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j \beta_j\Big) - \sum_{W \subseteq f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)} \ \sum_{(m_1, \ldots, m_n) \in W} E\Big(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j \beta_j\Big)\Big|$$
$$\leqslant \text{Volumen von } f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_1 - B_2).$$

Das Volumen von $f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_1 - B_2)$ berechnet sich nach der Formel:

$$\int_{f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_1 - B_2)} dy_1 \ldots dy_n = \int_{f_{\mathfrak{L}}(f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_1 - B_2))} \left|\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(z_0, z_1, \ldots, z_r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r_2})}\right| dz_0 \ldots d\varphi_{r_2}.$$

Zunächst ist:

$$\left|\frac{\partial(\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}\right| = \sqrt{|d|}\, N(\mathfrak{a}\mathfrak{q}).$$

Weiter erhält man nach (2.13):

$$\left|\frac{\partial(\gamma^{(1)}, \ldots, \gamma^{(n)})}{\partial(z_0, \ldots, \varphi_{r_2})}\right| = |N\gamma| \cdot |R|.$$

Die Behauptung folgt nun mit Lemma 2.7 und (2.10) wegen

$$\int_{f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B_1 - B_2)} dy_1 \ldots dy_n \ll \frac{1}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})} \int_{B_1 - B_2} e^{z_0} dz_0 dz_1 \ldots dz_r d\varphi_1 \ldots d\varphi_{r_2}$$
$$\ll (X + Y)(e^{d_0} - e^{-d_0}) + X d_0 \ll X^{1 - \frac{1}{7n}}.$$

LEMMA 2.9.

$$\sum_{W \subseteq f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)} 1 \ll X \cdot G^{-n} \ll X^{1/7}.$$

Beweis. Sei $\mathfrak{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)$; dann gilt nach (2.13) und Definition von B für $k = 1, \ldots, n$:

$$\beta_0^{(k)} + \sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j^{(k)} \ll X^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}.$$

Weiter folgt mit (2.12):

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \beta_j^{(k)} \ll X^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Man erhält also nach der Cramerschen Regel für die Koeffizienten y_j die Abschätzung:

$$y_j \ll \frac{X^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{(n-1)/n}}{\sqrt{|d|}\, N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})} \ll X^{1/n}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Damit ergibt sich die Behauptung.

Im folgenden wird bei festem Würfel $W = W(l_1, \ldots, l_n) \subseteq f_{\mathfrak{L}}^{-1}(B)$ die rechte innere Summe in Lemma 2.8 betrachtet:

$$S := \sum_{(m_1, \ldots, m_n) \in W} E\Big(\beta_0 + \sum_{j=1}^{n} m_j \beta_j\Big).$$

Es gilt:

$$l_j G \leqslant m_j < (l_j + 1) G, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Nun folgt:

$$S = S(\xi) = \sum_{m_1 = 0}^{G-1} \ldots \sum_{m_n = 0}^{G-1} E\Big(\xi + \sum_{j=1}^{n} m_j \beta_j\Big), \quad \xi = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} (G l_j)\beta_j.$$

Ferner ergibt sich wegen $(Gl_1, \dots, Gl_n) \in W \subseteq f_2^{-1}(B)$ nach Lemma 2.6

$$\xi = \beta_0 + \sum_{j=1}^{n} (Gl_j)\beta_j \in \mathfrak{M},$$

also insbesondere für $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$c_{16}(K) X^{1/n} \{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n} \leqslant |\xi^{(k)}| \leqslant c_{17}(K) X^{1/n} \{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}. \tag{2.17}$$

Das Ziel der weiteren Untersuchungen ist es, den Ausdruck $S(\xi)$ auf eine ähnliche wie in [21] betrachtete trigonometrische Summe zurückzuführen. Dazu wird zunächst eine neue Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ definiert, die sich nach [21] wie folgt ergibt. Man setzt

$$L = (\log X)^{2/3},$$

$$g = ([LX^{-1/n}Gl_1], \dots, [LX^{-1/n}Gl_n]), \tag{2.18}$$

$$k_{1j} = \frac{1}{g} \cdot [LX^{-1/n}Gl_j], \quad j = 1, \dots, n.$$

Es gilt $g \geqslant 1$, wie man sich leicht überlegt.

Sei also etwa $k_{11} \neq 0$ und ferner

$$g_1 = |k_{11}|, \quad g_j = (g_{j-1}, |k_{1j}|), \quad j = 2, \dots, n.$$

Man bestimmt jetzt ganze rationale Zahlen h_j mit der Eigenschaft:

$$h_j k_{1j} \equiv -g_j \bmod g_{j-1}, \quad |h_j| \leqslant g_{j-1}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Schließlich wird definiert

$$k_{lj} := \begin{cases} \dfrac{1}{g_{l-1}} h_l k_{1j}, & 1 \leqslant j < l \leqslant n, \\ \dfrac{1}{g_{l-1}} (g_l + h_l k_{1l}), & 2 \leqslant l = j \leqslant n, \\ 0, & 2 \leqslant l < j \leqslant n. \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht ([21]), daß die k_{lj} ganze rationale Zahlen sind und daß gilt:

$$\det(k_{lj}) = \pm(|k_{11}|, \dots, |k_{1n}|) = \pm 1.$$

Folglich ist

$$\alpha_1 := \sum_{j=1}^{n} k_{1j}\beta_j, \quad \dots, \quad \alpha_n := \sum_{j=1}^{n} k_{nj}\beta_j$$

eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$.

Wegen $|k_{lj}| \leqslant |k_{1j}| + 1$ $(l, j = 1, \dots, n)$ ergibt sich mit (2.11) und (2.18) für $k, l = 1, \dots, n$:

$$\alpha_l^{(k)} \ll \{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n} L X^{-1/n} \sum_{j=1}^{n} |Gl_j| + \{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}.$$

Nach (2.17) und (2.12) gilt

$$\sum_{j=1}^{n} (Gl_j)\beta_j^{(k)} \ll X^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

und somit

$$Gl_j \ll \frac{X^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{(n-1)/n}}{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})} = X^{1/n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Es folgt insgesamt:

$$\alpha_l^{(k)} \ll L\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}, \quad k, l = 1, \dots, n. \tag{2.19}$$

Da $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{q}$ ist, erhält man die Darstellung

$$\beta_j = \sum_{l=1}^{n} m_{jl}\alpha_l, \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei die m_{jl} ganze rationale Zahlen sind.

Nun gilt $\sum_{j=1}^{n} m_j\beta_j = \sum_{l=1}^{n} q_l\alpha_l$, wobei $q_l = \sum_{j=1}^{n} m_j m_{jl}$, $l = 1, \dots, n$.

Wegen $|k_{lj}| \leqslant LX^{-1/n}G|l_j| + 2 \ll L$, $i, j = 1, \dots, n$, und $\det(k_{lj}) = \pm 1$ ergibt sich $m_{jl} \ll L^{n-1}$, $1 \leqslant j$, $l \leqslant n$, und schließlich

$$q_l = \sum_{j=1}^{n} m_j m_{jl} \ll G \cdot L^{n-1}, \quad l = 1, \dots, n. \tag{2.20}$$

Der Würfel $\{(x_1, \dots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n;\ 0 \leqslant x_j \leqslant G-1,\ j = 1, \dots, n\}$ wird durch die unimodulare Transformation

$$(x_1, \dots, x_n) \to (x_1, \dots, x_n)(m_{jl})$$

auf einen konvexen Bereich im $\boldsymbol{R}^n$ abgebildet, wobei die Gitterpunkte $(m_1, \dots, m_n)$ und $(q_1, \dots, q_n)$ der beiden Bereiche eineindeutig einander zugeordnet sind.

Es seien jetzt $q_2, \dots, q_n$ fest gewählt. Dann durchläuft q_1 ein gewisses von $q_2, \dots, q_n$ abhängiges Intervall:

$$q = q(q_2, \dots, q_n) \leqslant q_1 \leqslant q' = q'(q_2, \dots, q_n).$$

Man erhält:

$$S(\xi) = \sum_{q_n} \dots \sum_{q_2} \sum_{q_1=q}^{q'} E\Big(\xi + \sum_{l=1}^{n} q_l\alpha_l\Big).$$

LEMMA 2.10. *Es sei* $U=[X^{5/12n}]$, $x_0=[6x]+1$, *wobei* $x=\log t/\log X$. *Man setze*

$$\lambda=\lambda(q_2,\dots,q_n)=\frac{1}{a_1}\Big(\xi+\sum_{l=2}^{n} q_l a_l\Big),$$

(2.21) $$Q_j(m)=\frac{(-1)^{j-1}}{j}\,t\sum_{k=1}^{n}(\lambda^{(k)}+m)^{-j},\qquad j=1,\dots,x_0,$$

$$m\in \mathbf{Z},\ |m|\leqslant c_{18}(K)GL^{n-1},$$

$$F_m=\sum_{u,v=1}^{U}\exp\Big\{2\pi i\sum_{j=1}^{x_0}(uv)^jQ_j(m)\Big\}.$$

Dann gilt:

$$S(\xi)\ll G^n\{U^{-2}\max_{|m|\leqslant c_{18}(K)GL^{n-1}}|F_m|+X^{-1/7n}\}+U^2(GL^{n-1})^{n-1}.$$

Beweis. Zunächst folgt mit (2.14):

$$S(\xi)=\sum_{q_n}\dots\sum_{q_2}E(a_1)\sum_{q_1=q}^{q'}E(\lambda+q_1)\ll\sum_{q_n}\dots\sum_{q_2}\Big|\sum_{q_1=q}^{q'}E(\lambda+q_1)\Big|.$$

Ferner ergibt sich

$$\sum_{q_1=q}^{q'}E(\lambda+q_1)=U^{-2}\sum_{u,v=1}^{U}\sum_{m=q-uv}^{q'-uv}E(\lambda+m+uv)$$

$$\ll U^{-2}\sum_{m=q}^{q'}\Big|\sum_{u,v=1}^{U}E\Big(1+\frac{uv}{\lambda+m}\Big)\Big|+U^2.$$

Nach (2.17), (2.19) und (2.20) erhält man für $1\leqslant k\leqslant n$ und $q\leqslant m\leqslant q'$ die folgende untere Abschätzung:

$$|a_1^{(k)}(\lambda^{(k)}+m)|\geqslant|\xi^{(k)}|-\sum_{l=2}^{n}|q_l|\,|a_l^{(k)}|-|a_1^{(k)}|\,|m|$$

$$\geqslant c_{16}(K)X^{1/n}\{N(\mathfrak{aq})\}^{1/n}-c_{19}(K)GL^n\{N(\mathfrak{aq})\}^{1/n}$$

$$\geqslant c_{20}(K)X^{1/n}\{N(\mathfrak{aq})\}^{1/n}.$$

Es gilt somit unter Berücksichtigung von (2.19) und (2.21):

$$\frac{uv}{\lambda^{(k)}+m}\ll U^2|a_1^{(k)}|X^{-1/n}\{N(\mathfrak{aq})\}^{-1/n}$$

$$\ll LX^{-1/6n}=(\log X)^{2/3}X^{-1/6n},\qquad k=1,\dots,n.$$

Nun folgt für $X\geqslant X_0(K)$:

$$t\log\Big|N\Big(1+\frac{uv}{\lambda+m}\Big)\Big|=t\sum_{k=1}^{n}\log\Big\{1+\frac{uv}{\lambda^{(k)}+m}\Big\}$$

$$=\sum_{j=1}^{x_0}(uv)^jQ_j(m)+t\sum_{j=x_0+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\Big(\frac{uv}{\lambda^{(k)}+m}\Big)^j$$

$$=\sum_{j=1}^{x_0}(uv)^jQ_j(m)+O\{t\{c_{21}(K)LX^{-1/6n}\}^{x_0+1}\}.$$

Wegen $t\{c_{21}(K)LX^{-1/6n}\}^{x_0+1}\leqslant X^{-1/7n}$ ergibt sich die Abschätzung

$$\sum_{u,v=1}^{U}E\Big(1+\frac{uv}{\lambda+m}\Big)=\sum_{u,v=1}^{U}\{1+O(X^{-1/7n})\}\Big\{\exp\Big(2\pi i\sum_{j=1}^{x_0}(uv)^jQ_j(m)\Big)\Big\}$$

$$=F_m+O(U^2X^{-1/7n}).$$

Insgesamt erhält man mit (2.20) und $\sum_{q_n}\dots\sum_{q_1}1=\sum_{m_1=1}^{G-1}\dots\sum_{m_n=1}^{G-1}1=G^n$ die Behauptung.

Es bleibt der Ausdruck

$$F_m=\sum_{u,v=1}^{U}\exp\Big\{2\pi i\sum_{j=1}^{x_0}(uv)^jQ_j(m)\Big\}$$

in Lemma 2.10 abzuschätzen. Nach Mitsui wendet man auf diese trigonometrische Summe die Methode von Vinogradov an. Dazu werden von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{q}$ unabhängige untere und obere Abschätzungen für $|Q_j(m)|$, j gerade, benötigt.

LEMMA 2.11. *Es sei* $j\leqslant x_0$ *eine gerade natürliche Zahl. Dann gilt für* $|m|\leqslant c_{18}(K)GL^{n-1}$:

$$\frac{t}{j}\{c_{22}(K)X^{-1/n}\}^j\leqslant|Q_j(m)|\leqslant\frac{t}{j}\{c_{23}(K)LX^{-1/n}\}^j.$$

Beweis. Nach (2.15), (2.17), (2.19) und (2.20) folgt für $k=1,\dots,n$:

(2.22) $$a_1^{(k)}(\lambda^{(k)}+m)=\xi^{(k)}+O(GL^n\{N(\mathfrak{aq})\}^{1/n})$$

$$=\xi^{(k)}\{1+O((\log X)^{2n/3}X^{-1/7n})\}.$$

Ferner ergibt sich mit (2.11), (2.12), (2.17) und (2.18):

(2.23) $$a_1^{(k)}=\frac{1}{g}\Big\{\sum_{j=1}^{n}LX^{-1/n}Gl_j\beta_j^{(k)}+O(\{N(\mathfrak{aq})\}^{1/n})\Big\}$$

$$=\frac{1}{g}LX^{-1/n}\xi^{(k)}\{1+O(L^{-1})\},\qquad k=1,\dots,n.$$

Somit erhält man wegen $1 \leqslant j \leqslant x_0$:

$$j\arg(\lambda^{(k)}+m) = j\arg\left\{\frac{\xi^{(k)}}{\alpha_1^{(k)}}\left(1+O(L^nX^{-1/7n})\right)\right\} = j\arg\{1+O(L^{-1})\} \ll (\log X)^{-1/6}.$$

Es folgt also für gerades $j \leqslant x_0$:

$$|Q_j(m)| = \frac{t}{j}\left\{\sum_{k=1}^{r_1}(\lambda^{(k)}+m)^{-j}+2\sum_{k=r_1+1}^{r_1+r_2}|\lambda^{(k)}+m|^{-j}\cos\{j\arg(\lambda^{(k)}+m)\}\right\} \geqslant \frac{t}{j}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=1}^{n}|\lambda^{(k)}+m|^{-j}.$$

Weiter gilt mit (2.17) und (2.22):

$$|\lambda^{(k)}+m|^{-1} \gg \frac{|\alpha_1^{(k)}|}{|\xi^{(k)}|} \gg |\alpha_1^{(k)}|X^{-1/n}\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{-1/n}, \quad k=1,\ldots,n.$$

Als untere Abschätzung für $|\alpha_1^{(k)}|$ erhält man mit (2.17) und (2.23):

$$|\alpha_1^{(k)}| \gg \frac{1}{g}LX^{-1/n}|\xi^{(k)}| \gg \frac{1}{g}L\{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}, \quad k=1,\ldots,n.$$

Wegen $g \leqslant |[LX^{-1/n}Gl_1]| \ll L$ ergibt sich

$$|\alpha_1^{(k)}| \gg \{N(\mathfrak{a}\mathfrak{q})\}^{1/n}, \quad k=1,\ldots,n,$$

und somit

$$|\lambda^{(k)}+m|^{-1} \gg X^{-1/n}, \quad k=1,\ldots,n.$$

Insgesamt folgt:

$$|Q_j(m)| \gg \frac{t}{j}\{c_{22}(K)X^{-1/n}\}^j.$$

Die obere Abschätzung für $|Q_j(m)|$ in Lemma 2.11 gilt wegen

$$|\lambda^{(k)}+m|^{-1} \ll \frac{|\alpha_1^{(k)}|}{|\xi^{(k)}|} \ll LX^{-1/n}, \quad k=1,\ldots,n,$$

wobei (2.17), (2.19) und (2.22) benutzt wurden.

Bei der Abschätzung der Summe F_m in Lemma 2.10 kann man nun völlig analog verfahren wie Mitsui in [21].

LEMMA 2.12. *Mit den Bezeichnungen in (2.21) gilt für $|m| \leqslant c_{18}(K)GL^{n-1}$ die Abschätzung*

$$F_m = \sum_{u,v=1}^{U}\exp\left\{2\pi i\sum_{j=1}^{x_0}(uv)^jQ_j(m)\right\} \ll U^{2-c''/x^2},$$

wobei c'' eine absolute Konstante ist.

Beweis. [21], Lemma 6.

Es ergibt sich jetzt unmittelbar der

Beweis von Satz 2.2. Zunächst gilt nach Lemma 2.6 und Lemma 2.8:

$$\sum_{\beta\in\mathfrak{M}}\exp\{2\pi it\log|N\beta|\} = \sum_{W\in f_{\mathfrak{Q}}^{-1}(B)}\ \sum_{(m_1,\ldots,m_n)\in W}E\left(\beta_0+\sum_{j=1}^{n}m_j\beta_j\right)+O(X^{1-1/7n}).$$

Mit Lemma 2.9, Lemma 2.10 und Lemma 2.12 erhält man die Behauptung.

3. In diesem Paragraphen sollen erste Resultate über die Verteilung von Primidealen in Idealklassen $\mathrm{mod}\,\mathfrak{q}$ bewiesen werden, die sich unter wesentlicher Verwendung von Satz 1.1 ergeben. Es wird dabei die in [22], Kap. IX, ausgeführte Beweismethode von T. Tatuzawa für Sätze über die Differenz aufeinanderfolgender Primzahlen auf Zahlkörper übertragen.

Für einen beliebigen Charakter χ der engeren Idealklassengruppe $\mathrm{mod}\,\mathfrak{q}$ setze man

$$\Psi(x,\chi) = \sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}\chi(\mathfrak{a})\Lambda(\mathfrak{a}) = \sum_{N\mathfrak{p}^m\leqslant x}\chi(\mathfrak{p}^m)\log N\mathfrak{p},$$

wobei $\Lambda(\mathfrak{a})$ die v. Mangoldtsche Funktion für Ideale bezeichnet.

Es ist zunächst das Ziel, eine 'explizite Formel' zu beweisen, welche $\Psi(x,\chi)$ durch x und die Nullstellen von $\zeta_K(s,\chi)$ ausdrückt. Die dabei auftretenden Konstanten müssen von dem Ideal $\mathfrak{q}$ unabhängig sein. Diese Ausführungen schließen an Überlegungen an, die E. Landau in [18] ohne Berücksichtigung der Abhängigkeit der Konstanten von $\mathfrak{q}$ und χ durchgeführt hat. Ferner wird seine Beweismethode aus [17] verallgemeinert und auf algebraische Zahlkörper übertragen.

Man setze im folgenden

$$E_0 = E_0(\chi,\mathfrak{q}) = \begin{cases}1 & \text{für } \chi=\chi_0,\\ 0 & \text{für } \chi\neq\chi_0,\end{cases} \tag{3.1}$$

wobei χ_0 immer den Hauptcharakter $\mathrm{mod}\,\mathfrak{q}$ bezeichnet.

LEMMA 3.1. *Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe $\mathrm{mod}\,\mathfrak{q}$. Ferner seien T und $-T$ nicht Ordinaten einer Nullstelle von $\zeta_K(s,\chi)$. Dann gilt für $T \geqslant 2$, $x \geqslant 2$, $a > 1$:*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi)\,ds = -E_0x+\sum_{\substack{\varrho\neq 0\\ 0\leqslant\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}}\frac{x^\varrho}{\varrho}+b_{-1}\log x+b_0+O(1)- -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty-iT}^{a-iT}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi)\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+iT}^{a+iT}\frac{x^s}{s}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi)\,ds.$$

Dabei sind $b_{-1} = b_{-1}(\chi)$ und $b_0 = b_0(\chi)$ durch die Entwicklung

$$\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi) = \frac{b_{-1}}{s} + b_0 + b_1 s + \dots$$

an der Stelle $s = 0$ gegeben. Die Summe läuft über alle Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma \neq 0$ von $\zeta_K(s,\chi)$ im Bereich $0 \leqslant \sigma < 1$, $|t| \leqslant T$.

Beweis. [18], (95).

Lemma 3.2. *Es sei χ ein Charakter* $\bmod \mathfrak{q}$. *Für $\sigma \leqslant -1$ und $|t| \geqslant 1$ gilt:*

$$\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi) \ll \log(N\mathfrak{q}|s|).$$

Beweis. Der Charakter $\chi \bmod \mathfrak{q}$ werde erzeugt von dem primitiven Charakter $\chi^* \bmod \mathfrak{q}^*$. Unter Verwendung der Funktionalgleichung aus [18] ergibt sich durch logarithmische Differentiation für $|t| \geqslant 1$ nach einigen einfachen Abschätzungen:

$$\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi) = \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}} \frac{\chi^*(\mathfrak{p})\log N\mathfrak{p}}{(N\mathfrak{p})^s - \chi^*(\mathfrak{p})} - \frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(1-s,\overline{\chi^*}) - \log N\mathfrak{q}^* - \\ - n\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) + O(1).$$

Nun gilt wegen $\mathrm{Re}(1-s) = 1-\sigma \geqslant 2$

$$\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(1-s,\overline{\chi^*}) \ll 1, \qquad \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) \ll \log|1-s| \ll \log|s|$$

und somit

$$\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi) \ll \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{q}} \log N\mathfrak{p} + \log N\mathfrak{q}^* + \log|s| \ll \log(N\mathfrak{q}|s|).$$

Lemma 3.3. *Es gilt für jeden Charakter* $\chi \bmod \mathfrak{q}$ *im Bereich* $-1 \leqslant \sigma \leqslant 2$:

$$\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi) = \sum_{\substack{|\gamma - t| \leqslant 1 \\ \varrho \neq 0 \\ 0 \leqslant \beta < 1}} \frac{1}{s-\varrho} - \frac{E_0}{s-1} + \frac{b_{-1}}{s} + \frac{b'}{s+1} + O\{\log(N\mathfrak{q}(|t|+2))\}.$$

Dabei wird über alle diejenigen Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $\zeta_K(s,\chi)$ im Streifen $0 \leqslant \sigma < 1$ mit Ausnahme der Stelle $s = 0$ summiert, deren Imaginärteile von t einen Abstand $\leqslant 1$ haben. Die Zahl b' bezeichnet die Vielfachheit der Nullstelle $\varrho = -1$.

Beweis. In [22], Kap. VII wird eine entsprechende Formel für L-Funktionen im Körper der rationalen Zahlen bewiesen. Die dortigen Überlegungen gelten ebenfalls im Zahlkörper, so daß hier auf den Beweis verzichtet werden kann.

Man vergleiche dieses Resultat auch mit Lemma 6 aus [2].

Die Integrale auf der rechten Seite in Lemma 3.1 lassen sich mit dem sinngemäß verallgemeinerten Verfahren aus [17] abschätzen.

Man überzeugt sich leicht, daß zunächst wegen Lemma 3.2 gilt:

$$\int_{-\infty+iT}^{-1+iT} \frac{x^s}{s}\cdot\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi)\,ds \ll \frac{\log(N\mathfrak{q}T)}{T}\cdot\frac{1}{x\log x}.$$

Ferner ergibt sich mit Lemma 3.3 und Lemma 5 aus [2] nach der in [17] angegebenen Methode für $1 < a < 2$:

$$\int_{-1+iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s}\cdot\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi)\,ds \ll \sum_{\substack{|\gamma - T| \leqslant 1 \\ \varrho \neq 0 \\ 0 \leqslant \beta < 1}} \left| \int_{-1+iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s}\cdot\frac{ds}{s-\varrho} \right| + \frac{\log(N\mathfrak{q}T)}{T}\cdot\frac{x^a}{\log x} \\ \ll \frac{x^a \log(N\mathfrak{q}T)}{T}\left\{1 + \frac{1}{(a-1)\log x}\right\}.$$

Es folgt also insgesamt aus Symmetriegründen unter den Voraussetzungen von Lemma 3.1:

$$(3.2) \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s}\cdot\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi)\,ds = -E_0 x + \sum_{\substack{\varrho \neq 0 \\ 0 \leqslant \beta < 1 \\ |\gamma| \leqslant T}} \frac{x^\varrho}{\varrho} + b_{-1}\log x + b_0 + \\ + O\left\{1 + \frac{x^a \log(N\mathfrak{q}T)}{T}\left(1 + \frac{1}{(a-1)\log x}\right)\right\}.$$

Hiermit erhält man bekanntlich eine Abschätzung für die Koeffizientensumme von $\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi)$.

Satz 3.1. *Es sei χ ein primitiver Charakter der engeren Idealklassengruppe* $\bmod \mathfrak{q}$. *Dann gilt für $x \geqslant 2$ and $T \geqslant 2$:*

$$\Psi(x,\chi) = E_0 x - \sum_{\substack{0 < \beta < 1 \\ |\gamma| \leqslant T}} \frac{x^\varrho}{\varrho} - b_0(\chi) + O\left\{\frac{x}{T}\log(N\mathfrak{q}T) + \frac{x}{T}\log^2 x + \log x\right\}.$$

Es wird über alle Nullstellen $\varrho = \varrho(\chi) = \beta + i\gamma$ von $\zeta_K(s,\chi)$ im Rechteck $0 < \sigma < 1$, $|t| \leqslant T$ summiert.

Beweis. Wegen $\sum_{N\mathfrak{p}^m = k} \chi(\mathfrak{p}^m)\log N\mathfrak{p} \ll \sum_{\mathfrak{p}|(k)} \log N\mathfrak{p} \ll \log k$ folgt nach [22], A. Satz 3.1 für $x \geqslant 2$ und $a = 1 + (\log x)^{-1}$:

$$\Psi(x,\chi) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s}\cdot\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s,\chi)\,ds + O\left(\frac{x}{T}\log^2 x + \log x\right).$$

Weiter ergibt sich mit (3.2) die Behauptung, falls T und $-T$ nicht Ordinaten einer Nullstelle von $\zeta_K(s, \chi)$ sind. Dabei wurde berücksichtigt, daß χ ein primitiver Charakter $\bmod \mathfrak{q}$ ist und deshalb nach [18] $0 < \beta < 1$, $b_{-1} \ll 1$ gilt.

Läßt man zu, daß die Ordinaten T und $-T$ Nullstellen enthalten, dann bleibt die Behauptung von Satz 3.1 bestehen wegen

$$\sum_{|\gamma|\leqslant T} \frac{x^\varrho}{\varrho} = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{|\gamma|\leqslant T+\varepsilon} \frac{x^\varrho}{\varrho}.$$

Es werde von nun an mit χ_1 der eventuell vorhandene Ausnahmecharakter $\bmod \mathfrak{q}$ und mit β_1 die reelle Ausnahmenullstelle von $\zeta_K(s, \chi_1)$ im Bereich

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c(K)}{M(\mathfrak{q}, 0)} \geqslant \frac{3}{4}$$

bezeichnet. Ferner setze man

$$E_1 = E_1(\chi, \mathfrak{q}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \chi = \chi_1, \\ 0 & \text{für} \quad \chi \neq \chi_1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Lemma 3.4. *Für einen primitiven Charakter* $\chi \bmod \mathfrak{q}$ *gilt:*

$$b_0 = b_0(\chi) = -\frac{E_1}{1-\beta_1} + O\{\log^2(2N\mathfrak{q})\}.$$

Beweis. Wegen $\dfrac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s, \chi) = \dfrac{b_{-1}}{s} + b_0 + b_1 s + \ldots$ folgt nach Lemma 3.3 für einen primitiven Charakter $\chi \bmod \mathfrak{q}$:

$$b_0 = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s, \chi) - \frac{b_{-1}}{s}\right\} = -\sum_{\substack{0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant 1}} \frac{1}{\varrho} + O(\log 2N\mathfrak{q}).$$

Es ist nach Satz 1.1 $\zeta_K(s, \chi) \neq 0$ für $\sigma \leqslant \dfrac{c(K)}{M(\mathfrak{q}, t)}$, $s \neq 1-\beta_1$, da die Nullstellen ϱ von $\zeta_K(s, \chi)$ spiegelbildlich zur Geraden $\sigma = 1/2$ liegen, welches sich leicht mit der Funktionalgleichung ergibt. Man erhält also für $\varrho \neq 1-\beta_1$

$$\frac{1}{|\varrho|} \leqslant \frac{1}{\beta} \ll M(\mathfrak{q}, \gamma) \ll \log\{N\mathfrak{q}(|\gamma|+2)\}$$

und somit unter Berücksichtigung von Lemma 5 aus [2]

$$b_0 = -\frac{E_1}{1-\beta_1} + O\{\log^2(2N\mathfrak{q})\}.$$

Satz 3.2. *Es sei* $x \geqslant 2$ *und* $T \geqslant 2$. *Für einen beliebigen Charakter* χ *der engeren Idealklassengruppe* $\bmod \mathfrak{q}$ *gilt:*

$$\Psi(x, \chi) = E_0 x - E_1 \cdot \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{\substack{0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}}{}' \frac{x^\varrho}{\varrho} +$$

$$+ O\left\{\frac{x}{T}\log(N\mathfrak{q}T) + \frac{x}{T}\log^2 x + \log 2N\mathfrak{q}\cdot\log x + (\log 2N\mathfrak{q})^2 + E_1 x^{1/4}\log x\right\}.$$

Dabei bedeutet $\sum'$ *Summation über die Nullstellen* $\varrho = \beta + i\gamma$ *von* $\zeta_K(s, \chi)$ *im Bereich* $0 < \sigma < 1$, $|t| \leqslant T$ *mit Ausnahme von* β_1 *und* $1-\beta_1$.

Beweis. Es sei zunächst χ ein primitiver Charakter $\bmod \mathfrak{q}$. Nach dem Mittelwertsatz gilt für ein passendes α mit $0 < \alpha < 1-\beta_1$:

$$\frac{x^{1-\beta_1} - 1}{1-\beta_1} = x^\alpha \log x < x^{1-\beta_1}\cdot\log x.$$

Man erhält mit Satz 3.1 und Lemma 3.4:

$$\Psi(x, \chi) = E_0 x - E_1 \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{\substack{0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}}{}' \frac{x^\varrho}{\varrho} + \tag{3.4}$$

$$+ O\left\{\frac{x}{T}\log(N\mathfrak{q}T) + \frac{x}{T}\log^2 x + \log x + \log^2 2N\mathfrak{q} + E_1 x^{1-\beta_1}\log x\right\}.$$

Wegen $1-\beta_1 \leqslant 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ folgt die Behauptung in dem Fall, daß χ ein primitiver Charakter $\bmod \mathfrak{q}$ ist.

Wenn χ nicht primitiv ist, so sei χ^* der zu χ gehörige primitive Charakter $\bmod \mathfrak{q}^*$. Es ergibt sich mit (3.4):

$$\Psi(x, \chi) = \Psi(x, \chi^*) + O\Bigl(\sum_{\substack{N\mathfrak{p}^m \leqslant x\\ \mathfrak{p}|\mathfrak{q}}} \log N\mathfrak{p}\Bigr) = E_0(\chi)x - E_1(\chi^*)\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ 0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}}{}' \frac{x^\varrho}{\varrho} +$$

$$+ O\left\{\frac{x}{T}\log(N\mathfrak{q}^*T) + \frac{x}{T}\log^2 x + \log x \log 2N\mathfrak{q} + \log^2 2N\mathfrak{q}^* + E_1(\chi^*)x^{1/4}\log x\right\}.$$

Man überlegt sich leicht, daß $E_1(\chi^*) = 1$ aus $E_1(\chi) = 1$ folgt. Es kann jedoch sein, daß $E_1(\chi^*) = 1$, aber $E_1(\chi) = 0$ ist. Die Ausnahmenullstelle $\beta_1 = \beta_1(\chi^*)$ liegt dann zwar im Bereich $\sigma \geqslant 1 - cM^{-1}(\mathfrak{q}^*, 0)$, aber nicht in $\sigma \geqslant 1 - cM^{-1}(\mathfrak{q}, 0)$.

In diesem Fall folgt die Behauptung direkt aus Satz 3.1, der auf die Funktion $\Psi(x, \chi^*)$ angewendet wird, denn wegen $1-\beta_1 > c(K)M^{-1}(\mathfrak{q}, 0)$

gilt nach Lemma 3.4:

$$b_0(\chi^*) = -\frac{1}{1-\beta_1} + O(\log^2 2N\mathfrak{q}^*) \ll \log^2 2N\mathfrak{q}.$$

Damit ist Satz 3.2 vollständig bewiesen.

Für verschiedene Anwendungen wird eine Folgerung aus Satz 3.2 benötigt.

KOROLLAR 3.1. *Es sei χ ein Charakter der engeren Idealklassengruppe* mod $\mathfrak{q}$. *Dann gilt für $x \geqslant T \geqslant 2$:*

$$\Psi(x, \chi) = E_0 x - \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \sideset{}{'}\sum_{\substack{0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}} \frac{x^\varrho}{\varrho} + O\left\{\frac{x}{T}\log^2 N\mathfrak{q}x + E_1 x^{1/4}\log x\right\}.$$

Im folgenden sei $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{b})$ für $(\mathfrak{b}, \mathfrak{q}) = 1$ eine von den $h(\mathfrak{q})$ Idealklassen der engeren Idealklassengruppe mod $\mathfrak{q}$, d.h. mit den Bezeichnungen aus [18]:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{a} \subseteq K;\ \mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \bmod \mathfrak{q}\}.$$

Bekanntlich gilt:

$$(3.5)\qquad \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \chi(\mathfrak{a})\bar{\chi}(\mathfrak{b}) = \begin{cases} h(\mathfrak{q}), & \text{falls } \mathfrak{a} \sim \mathfrak{b} \bmod \mathfrak{q},\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

SATZ 3.3. *Sei $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant x$ und $\mathfrak{C}$ die oben definierte Idealklasse* mod $\mathfrak{q}$. *Dann gilt für $x \geqslant T \geqslant 2$*

$$\Psi(x; \mathfrak{C}) := \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}} \Lambda(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ \mathfrak{a}\sim\mathfrak{b} \bmod \mathfrak{q}}} \Lambda(\mathfrak{a})$$

$$= \frac{x}{h(\mathfrak{q})} - \frac{\chi_1(\mathfrak{b})}{h(\mathfrak{q})}\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \frac{1}{h(\mathfrak{q})}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sideset{}{'}\sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ 0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}} \bar{\chi}(\mathfrak{b})\frac{x^\varrho}{\varrho} +$$

$$+ O\left\{\frac{x}{T}\log^2 x + \frac{1}{h(\mathfrak{q})}x^{1/4}\log x\right\},$$

wobei $\varrho = \varrho(\chi) = \beta + i\gamma$ die Nullstellen von $\zeta_K(s, \chi)$ im Bereich $0 < \sigma < 1$, $|t| \leqslant T$ durchläuft und wobei der Strich bedeutet, daß $\beta_1 = \beta_1(\mathfrak{q})$ und $1-\beta_1$ von der Summation auszuschließen sind.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Korollar 3.1 wegen (3.5), wobei die Definitionen von E_0 und E_1 in (3.1) und (3.3) zu beachten sind.

Um im weiteren die obige Summe

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sideset{}{'}\sum_{\substack{0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}} \bar{\chi}(\mathfrak{b})\frac{x^\varrho}{\varrho}$$

abschätzen zu können, benötigt man Sätze über die Verteilung der Nullstellen von $\prod_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \zeta_K(s, \chi)$ im kritischen Streifen.

Diese Resultate ergeben sich aus Untersuchungen, die in [11] durchgeführt wurden.

Es bezeichne $N(\sigma, T, \chi)$ die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ von $\zeta_K(s, \chi)$ im Rechteck $\sigma \leqslant \beta \leqslant 1$, $|\gamma| \leqslant T$, jede mit ihrer Vielfachheit gezählt.

In [11] ist ein Ausdruck der Form

$$(3.6)\qquad \sum_{N\mathfrak{q}\leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi), \qquad \sigma \geqslant \tfrac{1}{2},\ Q \geqslant 1,\ T \geqslant 2$$

betrachtet worden. Dabei summiert man über alle ganzen Ideale $\mathfrak{q}$ in K mit $N\mathfrak{q} \leqslant Q$ und alle primitiven Charaktere χ mod $\mathfrak{q}$.

Es folgen mit (3.6) leicht Abschätzungen für $\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi)$, wobei über alle Charaktere χ mod $\mathfrak{q}$ summiert wird.

Man vergleiche diese Resultate auch mit einer Arbeit von T. Hirano, der in [13] direkt beweist:

$$(3.7)\qquad \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll \{N\mathfrak{q}^3 T^{3n}\}^{1-\sigma}(\log N\mathfrak{q}T)^7.$$

LEMMA 3.5. *Es gilt für $T \geqslant 2$ und $\sigma \geqslant 0$:*

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll \{N\mathfrak{q}^6 \cdot T^{4n^2/(2n-1)}\}^{1-\sigma}(\log N\mathfrak{q}T)^{3n+10},$$

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll \{N\mathfrak{q}^{2n+1} \cdot T^{2n+1}\}^{1-\sigma}(\log N\mathfrak{q}T)^{13}.$$

Beweis. Ein Charakter χ mod $\mathfrak{q}$ wird erzeugt von einem primitiven Charakter χ^* mod $\mathfrak{q}^*$ mit $\mathfrak{q}^* | \mathfrak{q}$. Es ergibt sich somit für $\sigma > 0$:

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \leqslant \sum_{N\mathfrak{q}'\leqslant N\mathfrak{q}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}'} N(\sigma, T, \chi).$$

Nun folgt nach [11] für $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 1 - 1/2n$, $n \geqslant 2$:

$$\sum_{N\mathfrak{q}'\leqslant N\mathfrak{q}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}'} N(\sigma, T, \chi) \ll \{N\mathfrak{q}^6 \cdot T^{2n}\}^{1-\sigma}(\log N\mathfrak{q}T)^{3n+10}.$$

Ferner gilt im Bereich $1 - 1/2n \leqslant \sigma \leqslant 1$, $n \geqslant 1$:

$$\sum_{N\mathfrak{q}'\leqslant N\mathfrak{q}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}'} N(\sigma, T, \chi) \ll \{N\mathfrak{q}^6 \cdot T^{4n^2/(2n-1)}\}^{1-\sigma}(\log N\mathfrak{q}T)^{3n+10}.$$

Insgesamt erhält man für $\sigma \geqslant 1/2$ die erste Abschätzung der Behauptung. Dieses Ergebnis gilt auch für $0 \leqslant \sigma < 1/2$, denn in trivialer Weise ist

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \leqslant \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(0, T, \chi) \ll N\mathfrak{q} \cdot T\log(N\mathfrak{q}T).$$

Die zweite Abschätzung in Lemma 3.5 folgt zunächst im Bereich $0 \leqslant \sigma \leqslant 1-1/(2n+1)$ wegen

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \leqslant \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(0, T, \chi) \leqslant N\mathfrak{q}T\log(N\mathfrak{q}T)$$
$$\leqslant \{(N\mathfrak{q})^{2n+1}\cdot T^{2n+1}\}^{1-\sigma}(\log N\mathfrak{q}T).$$

Für $1-1/(2n+1) \leqslant \sigma \leqslant 1$ und $n \geqslant 2$ ergibt sich nach [11]:

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(\sigma, T, \chi) \ll \{N\mathfrak{q}^5\cdot T^{2n+1}\}^{1-\sigma}(\log N\mathfrak{q}T)^{13}.$$

Nach diesen Vorbetrachtungen kann jetzt das Hauptresultat dieses Paragraphen bewiesen werden. Die Ausführungen schließen an Rechnungen von T. Tatuzawa nach [22], Kap. IX an.

Satz 3.4. *Es sei* $\mathfrak{C}$ *eine Idealklasse der engeren Idealklassengruppe* $\bmod \mathfrak{q}$. *Man setze*

$$\theta = \theta(n) = 1-\frac{1}{2n+1}.$$

Ferner sei $0 < \varepsilon < 1-\theta$ *eine reelle Zahl und* $x^{\theta+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x$. *Dann gibt es positive Konstanten* $c_{26} = c_{26}(\varepsilon, K)$ *und* $c_{27} = c_{27}(\varepsilon, K)$, *so daß gleichmäßig in* $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant \exp\left(c_{26}\dfrac{\log x}{\log\log x}\right)$ *für* $x \to \infty$ *gilt*

$$\Psi(x+y;\, \mathfrak{C})-\Psi(x;\, \mathfrak{C}) = \sum_{\substack{x<N\mathfrak{a}\leqslant x+y\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}} \Lambda(\mathfrak{a})$$
$$= \frac{y}{h(\mathfrak{q})}\left\{1+O(x^{\beta_1-1})+O_\varepsilon\left(\exp\left(-c_{27}\frac{\log x}{\Delta}\right)\right)\right\},$$

wobei

$$\Delta = \max\{\log N\mathfrak{q},\, (\log x)^{2/3}(\log\log x)^{1/3}\}.$$

Beweis. Für jede Nullstelle $\varrho = \beta+i\gamma$ irgendeiner Funktion $\zeta_K(s, \chi)$, $\chi \bmod \mathfrak{q}$, folgt:

$$\left|\frac{(x+y)^\varrho-x^\varrho}{\varrho}\right| \leqslant \int_x^{x+y} u^{\beta-1}du \leqslant y\cdot x^{\beta-1}.$$

Nach Satz 3.3 erhält man somit für $x \geqslant T \geqslant 2$ und $N\mathfrak{q} \leqslant x$ wegen $y \leqslant x$:

(3.8) $\quad \Psi(x+y;\, \mathfrak{C})-\Psi(x;\, \mathfrak{C})$

$$= \frac{y}{h(\mathfrak{q})}\left\{1+O(x^{\beta_1-1})+O\left(\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sideset{}{'}\sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ 0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}} x^{\beta-1}+\frac{x}{yT}\, N\mathfrak{q}\log^2 x+y^{-1}x^{1/4}\log x\right)\right\}.$$

Ferner gilt:

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sideset{}{'}\sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ 0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}} x^{\beta-1} = x^{-1}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sideset{}{'}\sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ 0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}} 1+\int_0^1\Bigg(\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sideset{}{'}\sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ \beta\geqslant\sigma\\ |\gamma|\leqslant T}} 1\Bigg)\, x^{\sigma-1}\log x\, d\sigma.$$

Aus Satz 1.1 ergibt sich

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sideset{}{'}\sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ \beta\geqslant\sigma\\ |\gamma|\leqslant T}} 1 = 0$$

für $\sigma \geqslant 1-cM_1$, $M_1^{-1} = M_1^{-1}(\mathfrak{q}, T) = \max\{\log N\mathfrak{q},\, (\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3}\}$, $T \geqslant 3$, bei passendem $c = c(K) > 0$.

Somit folgt nach Lemma 3.5:

$$(3.9)\qquad \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}}\ \sideset{}{'}\sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ 0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}} x^{\beta-1} \ll x^{-1}N\mathfrak{q}T\log(N\mathfrak{q}T)+$$
$$+\int_0^{1-cM_1}\{N\mathfrak{q}^{2n+1}T^{2n+1}x^{-1}\}^{1-\sigma}\log x(\log N\mathfrak{q}T)^{13}\, d\sigma.$$

Es sei nun

$$(3.10)\qquad \log N\mathfrak{q} < \frac{\varepsilon c(K)}{56}\cdot\frac{\log x}{\log\log x}, \quad \text{also} \quad c_{26}(\varepsilon, K) \leqslant \frac{\varepsilon c(K)}{56}.$$

Man setze

$$T = x^a, \quad a = \frac{1-\varepsilon}{2n+1} < \frac{1}{2};$$

dann ist für genügend großes $x \geqslant x_0(K)$ nach (3.10):

$$\int_0^{1-cM_1}\{N\mathfrak{q}^{2n+1}T^{2n+1}x^{-1}\}^{1-\sigma}\log x(\log N\mathfrak{q}T)^{13}\, d\sigma$$
$$\ll \{N\mathfrak{q}^{2n+1}T^{2n+1}x^{-1}\}^{cM_1}(\log x)^{14} \leqslant \exp\{14\log\log x-\tfrac{1}{2}\varepsilon cM_1\log x\}.$$

Weiter erhält man für $x \geqslant x_1(\varepsilon, K)$:

$$x^{-1}N\mathfrak{q}\cdot T\log(N\mathfrak{q}T) < \exp\left\{(a-1)\log x+\frac{\varepsilon c}{56}\,\frac{\log x}{\log\log x}+\log\log x\right\}$$
$$\leqslant \exp\{-\tfrac{1}{4}\log x\}.$$

Wegen $y \geqslant x^{\theta+\varepsilon} = x^{1-a+\varepsilon\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)} \geqslant x^{1-a+\varepsilon/2}$ gilt für $x \geqslant x_2(\varepsilon, K)$ mit (3.10):

$$\frac{x}{yT}\, N\mathfrak{q}\log^2 x \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon}{4}\log x\right), \qquad y^{-1}x^{1/4}\log x \leqslant \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\log x\right).$$

Folglich ergibt sich mit (3.8) und (3.9) für $x \geqslant x_3(\varepsilon, K)$:

$$\Psi(x+y;\,\mathfrak{C})-\Psi(x;\,\mathfrak{C})$$

$$=\frac{y}{h(\mathfrak{q})}\left\{1+O(x^{\beta_1-1})+O\left(\exp\left(-\frac{\varepsilon}{4}\log x\right)+\exp\left(14\log\log x-\frac{\varepsilon}{2}cM_1\log x\right)\right)\right\}.$$

Es sei jetzt $\log N\mathfrak{q} \geqslant (\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3}$, also $M_1^{-1} = \log N\mathfrak{q}$. Dann hat man mit (3.10):

$$14\log\log x-\frac{\varepsilon}{2}cM_1\log x < 14\frac{\varepsilon c}{56}\,\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}-\frac{\varepsilon}{2}c\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}} \leqslant -\frac{\varepsilon}{4}c\frac{\log x}{A}.$$

Schließlich ergibt sich für

$$\log N\mathfrak{q} < (\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3} \leqslant (\log x)^{2/3}(\log\log x)^{1/3}$$

und $x \geqslant x_4(\varepsilon, K)$:

$$14\log\log x-\frac{\varepsilon}{2}cM_1\log x \leqslant -c_{28}(\varepsilon, K)\frac{\log x}{A}.$$

Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Die eventuell existierende reelle Ausnahmenullstelle β_1 läßt sich mit einem von T. Mitsui in [20] und E. Fogels in [4] auf Zahlkörper verallgemeinerten Satz von C. L. Siegel abschätzen. Man erhält den

Satz 3.5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.4 sei ferner A eine beliebig große positive reelle Zahl und $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^A$. Dann gibt es eine Konstante $c_{29} = c_{29}(\varepsilon, A, K) > 0$, so daß für $x \to \infty$ gilt*

$$\Psi(x+y;\,\mathfrak{C})-\Psi(x;\,\mathfrak{C}) = \frac{y}{h(\mathfrak{q})}\left\{1+O_{\varepsilon,A}\left(\exp\left(-c_{29}\frac{(\log x)^{1/3}}{(\log\log x)^{1/3}}\right)\right)\right\}.$$

Beweis. Für die Ausnahmenullstelle $\beta_1 = \beta_1(\mathfrak{q})$ in Satz 3.4 folgt nach [4] mit beliebig kleinem $\varepsilon' > 0$:

$$\beta_1 < 1-c_{30}(\varepsilon', K)(N\mathfrak{q})^{-\varepsilon'}.$$

Man setze $\varepsilon' = 2/3A$; dann ergibt sich die Behauptung aus Satz 3.4.

Im folgenden bezeichne $\Pi(x;\,\mathfrak{C})$ die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p}$ mit $N\mathfrak{p} \leqslant x$ in einer Idealklasse $\mathfrak{C}$ der engeren Idealklassengruppe mod $\mathfrak{q}$. $\Pi_1(x;\,\mathfrak{C})$ sei die Anzahl der Primideale ersten Grades $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{C}$ mit $N\mathfrak{p} = p \leqslant x$.

Satz 3.6. *Es sei $\mathfrak{C}$ eine Idealklasse der engeren Idealklassengruppe* mod $\mathfrak{q}$. *Man setze*

$$\theta = \theta(n) = 1-\frac{1}{2n+1}.$$

Ferner seien $0 < \varepsilon < 1-\theta$ und $A > 0$ reelle Zahlen. Dann gilt für $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^A$:

$$\Pi_1(x+x^{\theta+\varepsilon};\,\mathfrak{C})-\Pi_1(x;\,\mathfrak{C})$$

$$=\frac{1}{h(\mathfrak{q})}\,\frac{x^{\theta+\varepsilon}}{\log x}+O_{\varepsilon,A}\left\{\frac{x^{\theta+\varepsilon}}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-c_{29}(\varepsilon, A, K)\frac{(\log x)^{1/3}}{(\log\log x)^{1/3}}\right)\right\}.$$

Beweis. Zunächst folgt:

$$\Pi_1(z;\,\mathfrak{C}) = \Pi(z;\,\mathfrak{C})+O\Big(\sum_{\substack{p^f\leqslant z\\ f\geqslant 2}}1\Big) = \Pi(z;\,\mathfrak{C})+O(z^{1/2}).$$

Man erhält somit

(3.11) $\quad \Pi_1(x+x^{\theta+\varepsilon};\,\mathfrak{C})-\Pi_1(x;\,\mathfrak{C})$

$$=\Pi(x+x^{\theta+\varepsilon};\,\mathfrak{C})-\Pi(x;\,\mathfrak{C})+O(x^{1/2}) = \sum_{\substack{x<N\mathfrak{a}\leqslant x+x^{\theta+\varepsilon}\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}}\frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{\log N\mathfrak{a}}+O(x^{1/2}).$$

Nun gilt für $x < N\mathfrak{a} \leqslant x+x^{\theta+\varepsilon}$

$$\frac{1}{\log N\mathfrak{a}} = \frac{1}{\log x}-\frac{\log N\mathfrak{a}-\log x}{\log x\log N\mathfrak{a}} = \frac{1}{\log x}+O(x^{\theta+\varepsilon-1})$$

und daher mit Satz 3.5:

$$\sum_{\substack{x<N\mathfrak{a}\leqslant x+x^{\theta+\varepsilon}\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}}\frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{\log N\mathfrak{a}} = \frac{1}{\log x}\{\Psi(x+x^{\theta+\varepsilon};\,\mathfrak{C})-\Psi(x;\,\mathfrak{C})\}+O_{\varepsilon,A}\left(x^{\theta+\varepsilon-1}\frac{x^{\theta+\varepsilon}}{h(\mathfrak{q})}\right)$$

$$=\frac{1}{h(\mathfrak{q})}\,\frac{x^{\theta+\varepsilon}}{\log x}+O_{\varepsilon,A}\left\{\frac{x^{\theta+\varepsilon}}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-c_{29}\frac{(\log x)^{1/3}}{(\log\log x)^{1/3}}\right)\right\}.$$

Die Behauptung folgt schließlich aus (3.11).

Insbesondere ergibt sich aus diesem Resultat der in der Einleitung formulierte Satz 1.2:

$$\Pi_1(x+x^{\theta+\varepsilon};\,\mathfrak{C})-\Pi_1(x;\,\mathfrak{C}) > 0 \quad \text{für} \quad x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K).$$

Beweis zu Korollar 1.1. Sei $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^A$, $A > 0$ und $(\alpha, \mathfrak{q}) = 1$. Man betrachte die Idealklasse $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\alpha)$ mod $\mathfrak{q}$, die das Hauptideal (α) enthält. Nach Satz 1.2 existiert für $\varepsilon > 0$ und $x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K)$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{C}$ mit $N\mathfrak{p} = p \in [x, x+x^{\theta+\varepsilon}]$.

Nun gibt es nach Definition von $\mathfrak{C}$ zwei ganze Zahlen β, γ in K, so daß gilt:

$$\mathfrak{p} = (\omega'), \quad (\omega')(\beta) = (\alpha)(\gamma), \quad \beta \equiv \gamma \equiv 1 \bmod \mathfrak{q}, \quad \beta \succ 0, \quad \gamma \succ 0.$$

Es sei $\varepsilon\omega'\beta = \alpha\gamma$, wobei ε eine Einheit in K ist. Man setze $\omega := \varepsilon\omega'$, dann folgt die Behauptung.

Beweis zu Korollar 1.2. Sei $1 \leqslant N(q\mathfrak{q}) \leqslant (\log x)^A$, $A > 0$ und $(l, q) = 1$, $N\mathfrak{a} \equiv l \bmod q$, $(\mathfrak{a}, \mathfrak{q}) = 1$. Zunächst folgt $(\mathfrak{a}, (q)\mathfrak{q}) = 1$ wegen $(N\mathfrak{a}, q) = 1$. Man betrachte die Idealklasse $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}^*(\mathfrak{a}) \bmod (q)\mathfrak{q}$, die das Ideal $\mathfrak{a}$ enthält. Nach Satz 1.2 gibt es für $\varepsilon > 0$ und $x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K)$ eine Primzahl p im Intervall $[x, x+x^{\theta+\varepsilon}]$ und ein Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{C}^*$ mit $N\mathfrak{p} = p$. Nun gilt:

$$\mathfrak{p}(\alpha) = \mathfrak{a}(\beta), \quad \alpha \equiv \beta \equiv 1 \bmod (q)\mathfrak{q}, \quad \alpha \succ 0, \quad \beta \succ 0.$$

Es ergibt sich wie in [3], § 4:

$$N\alpha \equiv 1 \bmod q, \quad N\beta \equiv 1 \bmod q.$$

Insgesamt erhält man wegen $\alpha \succ 0$, $\beta \succ 0$:

$$p = N\mathfrak{p} \equiv N\mathfrak{p}\cdot N\alpha = N\mathfrak{p}\cdot N(\alpha) = N\mathfrak{a}\cdot N(\beta) = N\mathfrak{a}\cdot N\beta \equiv N\mathfrak{a} \equiv l \bmod q.$$

Bemerkung. Es sei insbesondere $\mathfrak{q} = (1)$, $2 \leqslant q \leqslant (\log x)^A$, $A > 0$ und l ein Idealnormenrest mod q, d.h. $(l, q) = 1$, $l \equiv N\mathfrak{a} \bmod q$.

Dann existiert in $[x, x+x^{\theta+\varepsilon}]$ für $x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K)$ eine rationale Primzahl p mit $p \equiv l \bmod q$, $p = N\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ Primideal in K.

Weiter folgt, daß jeder Idealnormenrest mod q gleichzeitig Primidealnormenrest mod q ist.

Schließlich sei in Korollar 1.2 l ein Zahlnormenrest mod q, d.h.

$$(l, q) = 1, \quad l \equiv N\alpha \bmod q, \quad N\alpha > 0, \quad \alpha \text{ ganz}.$$

Dann gibt es für $x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K)$ eine Primzahl $p \in [x, x+x^{\theta+\varepsilon}]$ mit $p \equiv l \bmod q$, $p = N\omega$, $\omega \equiv \alpha \bmod \mathfrak{q}$, ω Primzahl.

4. Weitere Anwendungen von Satz 1.1 liefern analog den Überlegungen im rationalen Fall ([22]; Kap. IX) asymptotische Abschätzungen für die Anzahl $\Pi(x; \mathfrak{C})$ der Primideale $\mathfrak{p}$ mit $N\mathfrak{p} \leqslant x$ in einer Idealklasse $\mathfrak{C}$ der engeren Idealklassengruppe mod $\mathfrak{q}$.

Zunächst ergibt sich der

Satz 4.1. *Es sei $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\mathfrak{b})$ für $(\mathfrak{b}, \mathfrak{q}) = 1$ eine von den $h(\mathfrak{q})$ Idealklassen* mod $\mathfrak{q}$. *Man setze*

$$\Delta = \max\{\log N\mathfrak{q}, (\log x)^{2/5}(\log\log x)^{1/5}\}.$$

Dann gibt es Konstanten $c_{31} = c_{31}(K) > 0$ und $c_{32} = c_{32}(K) > 0$, so daß gleichmäßig in $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant \exp\left(c_{31}\dfrac{\log x}{\log\log x}\right)$ gilt:

$$\Psi(x; \mathfrak{C}) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a}\leqslant x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}} \Lambda(\mathfrak{a}) = \frac{x}{h(\mathfrak{q})} - \frac{\chi_1(\mathfrak{b})}{h(\mathfrak{q})}\cdot\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + O\left\{\frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-c_{32}\frac{\log x}{\Delta}\right)\right\}.$$

Das zweite Glied tritt nur auf, wenn mod $\mathfrak{q}$ *ein Ausnahmecharakter χ_1 existiert. $\beta_1 = \beta_1(\mathfrak{q})$ bezeichnet die Ausnahmenullstelle der zugehörigen Funktion $\zeta_K(s, \chi_1)$.*

Beweis. Der Beweis wird in drei Teile unterteilt, je nachdem in welchem Bereich $\log N\mathfrak{q}$ liegt.

1. Fall: $0 \leqslant \log N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^{2/5}(\log\log x)^{1/5}$, also $\dfrac{\log x}{\Delta} = \dfrac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}$.

Es soll der Ausdruck

$$S := \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sideset{}{'}\sum_{\substack{\varrho=\varrho(\chi)\\ 0<\beta<1\\ |\gamma|\leqslant T}} \bar\chi(\mathfrak{b})\frac{x^\varrho}{\varrho}, \quad \varrho = \beta+i\gamma \tag{4.1}$$

abgeschätzt werden. Zunächst erhält man wie im Beweis zu Lemma 3.4:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\varrho|} &\leqslant \log 2N\mathfrak{q} \quad &&\text{für} \quad |\gamma| \leqslant 1,\ \varrho \neq 1-\beta_1,\\ \frac{1}{|\varrho|} &\leqslant 1 &&\text{für} \quad |\gamma| \geqslant 1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Weiter gilt für $\beta \neq \beta_1$, $T \geqslant 3$ bei geeignetem $c = c(K) > 0$ (man kann $c \leqslant 2$ annehmen) nach Satz 1.1:

$$\beta < 1 - cM_1, \quad M_1^{-1} = M_1^{-1}(\mathfrak{q}, T) = \max\{\log N\mathfrak{q}, (\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3}\}.$$

Folglich ergibt sich

$$S \ll N\mathfrak{q}T\log(N\mathfrak{q}T)x\exp(-cM_1\log x)\log 2N\mathfrak{q}.$$

Man setze nun

$$T = \exp\left\{\frac{1}{2}c\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right\}.$$

Wegen $0 < c \leqslant 2$ ist für genügend großes x

$$3 \leqslant T \leqslant x, \quad (\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3} \leqslant (\log x)^{2/5}(\log\log x)^{1/5}$$

und somit

$$M_1^{-1} = \max\{\log N\mathfrak{q}, (\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3}\} \leqslant (\log x)^{2/5}(\log\log x)^{1/5}.$$

Insgesamt erhält man:

$$S \ll x\exp\left(-c_{33}\frac{\log x}{\Delta}\right).$$

Ferner folgt wegen $h(\mathfrak{q}) \ll N\mathfrak{q} \leqslant \exp\{(\log x)^{2/5}(\log\log x)^{1/5}\}$:

$$\frac{x}{T}\log^2 x, \quad \frac{1}{h(\mathfrak{q})}x^{1/4}\log x \ll \frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left\{-c_{34}(K)\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right\}.$$

Damit ist nach Satz 3.3 die Behauptung von Satz 4.1 im 1. Fall bewiesen.

2. Fall: $(\log x)^{2/5}(\log\log x)^{1/5} < \log N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^{1/2}$, $\dfrac{\log x}{\Delta} = \dfrac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}$.

Man setze

$$T = \exp\left\{\frac{(\log N\mathfrak{q})^{3/2}}{(\log\log N\mathfrak{q})^{1/2}}\right\};$$

dann gilt für $x \geqslant x_0$:

$$3 \leqslant T \leqslant x, \quad (\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3} \ll \log N\mathfrak{q}.$$

Aus Satz 1.1 folgt somit bei passendem $c = c(K) > 0$:

$$\zeta_K(s,\chi) \neq 0 \quad \text{für } \chi \bmod \mathfrak{q}, \quad 1 - \frac{c}{\log N\mathfrak{q}} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T, \quad s \neq \beta_1.$$

Für die Summe S ergibt sich nach (4.1) mit (4.2) und (3.9):

$$(4.3) \quad S \ll N\mathfrak{q}T\log N\mathfrak{q}\cdot\log(N\mathfrak{q}T) + x\log N\mathfrak{q}\int\limits_0^{1-\frac{c}{\log N\mathfrak{q}}}\{N\mathfrak{q}^{2n+1}T^{2n+1}x^{-1}\}^{1-\sigma}\log x(\log N\mathfrak{q}T)^{13}\,d\sigma.$$

Weiter ist $N\mathfrak{q} \geqslant q_0(K)$ für $x \geqslant x_0(K)$ und wegen $\log N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^{1/2}$ folgt nach Definition von T:

$$N\mathfrak{q}^{2n+1}T^{2n+1}x^{-1} \leqslant \exp\{(\log N\mathfrak{q})^{3/2} - \log x\} \leqslant 1.$$

Daher erhält man für genügend großes x:

$$x\log N\mathfrak{q}\int\limits_0^{1-\frac{c}{\log N\mathfrak{q}}}\{N\mathfrak{q}^{2n+1}T^{2n+1}x^{-1}\}^{1-\sigma}\log x(\log N\mathfrak{q}T)^{13}\,d\sigma \leqslant x\{N\mathfrak{q}^{2n+1}T^{2n+1}x^{-1}\}^{\frac{c}{\log N\mathfrak{q}}}(\log N\mathfrak{q}T)^{13}\log N\mathfrak{q}\cdot\log x.$$

Nun gilt $\log N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^{1/2}$, $\log(N\mathfrak{q}T) \leqslant (\log x)^{3/4}$ und schließlich nach (4.3):

$$S \ll x\exp(-\tfrac{1}{2}\log x) + x\exp\left\{(2n+1)c\frac{(\log x)^{3/4}}{\log N\mathfrak{q}} - c\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}} + \frac{45\log\log x}{4(\log x)^{1/2}}\,\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}\right\}$$

$$\ll x\exp\left(-c_{35}(K)\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}\right) = x\exp\left(-c_{35}\,\frac{\log x}{\Delta}\right).$$

Es bleibt noch das Restglied in Satz 3.3 abzuschätzen. Wegen

$$\log N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^{1/2}, \qquad \frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}} < \frac{(\log N\mathfrak{q})^{3/2}}{(\log\log x)^{1/2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{(\log N\mathfrak{q})^{3/2}}{(\log\log N\mathfrak{q})^{1/2}}$$

und nach Definition von T folgt:

$$\frac{x}{T}\log^2 x \ll \frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}\right),$$

$$\frac{1}{h(\mathfrak{q})}x^{1/4}\log x \ll \frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-\frac{3}{8}\log x\right) \leqslant \frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-\frac{3}{8}\cdot\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}\right).$$

3. Fall: $(\log x)^{1/2} < \log N\mathfrak{q} \leqslant c_{31}\dfrac{\log x}{\log\log x}$, $\dfrac{\log x}{\Delta} = \dfrac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}$.

Man setze $T = N\mathfrak{q}^2$; dann gilt:

$$(\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3} \ll \log N\mathfrak{q}.$$

Der nullstellenfreie Bereich für $\zeta_K(s,\chi)$, $\chi \bmod \mathfrak{q}$, hat wie im 1. Fall die Form

$$1 - \frac{c}{\log N\mathfrak{q}} \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad |t| \leqslant T, \quad s \neq \beta_1.$$

Nach Voraussetzung ist für $x \geqslant x_0(K)$ $\log N\mathfrak{q} \leqslant c_{31}\dfrac{\log x}{\log\log x} \leqslant \log x$ und folglich $x \geqslant \exp\left(\dfrac{1}{c_{31}}\log N\mathfrak{q}\cdot\log\log N\mathfrak{q}\right) \geqslant N\mathfrak{q}^{6n+3}$ wegen $N\mathfrak{q} \geqslant q_0(K)$. Es ergibt sich für $x \geqslant x_0(K)$ mit (4.3) die Abschätzung:

$$S \ll x\exp(-\tfrac{1}{2}\log x) + x(\log x)^{15}\int\limits_0^{1-\frac{c}{\log N\mathfrak{q}}}\{(N\mathfrak{q})^{6n+3}x^{-1}\}^{1-\sigma}\,d\sigma$$

$$\leqslant x\exp(-\tfrac{1}{2}\log x) + x\exp\left\{(16c_{31} - c)\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}\right\}.$$

Man wähle $c_{31} \leqslant \dfrac{c}{32}$; dann folgt:

$$S \ll x\exp\left\{-c_{36}(K)\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}\right\}.$$

Schließlich ist wegen $(\log N\mathfrak{q})^2 > \log x$ und $T = N\mathfrak{q}^2$:

$$\frac{x}{T}\log^2 x \ll \frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp(-\tfrac{1}{2}\log N\mathfrak{q}) \leqslant \frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\log x}{\log N\mathfrak{q}}\right).$$

Dieselbe Abschätzung gilt auch für $\dfrac{1}{h(\mathfrak{q})}x^{1/4}\log x$.

Setzt man dies alles in Satz 3.3 ein, dann folgt die Behauptung im 3. Fall.

Der in der Einleitung formulierte Satz 1.3 ergibt sich hieraus durch partielleSummation.

Beweis zu Satz 1.3. Zunächst gilt:

$$\Pi(x;\mathfrak{C}) = \sum_{\substack{2\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{\log N\mathfrak{a}} + O(x^{1/2}). \tag{4.4}$$

Weiter folgt durch partielle Summation:

$$\sum_{\substack{2\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{\log N\mathfrak{a}} = \frac{1}{\log x}\Psi(x;\mathfrak{C}) + \int_{\sqrt{x}}^{x}\Psi(u;\mathfrak{C})\frac{du}{u\log^2 u} + O(x^{1/2}).$$

Mit Satz 4.1 erhält man wegen $3/4\leqslant\beta_1<1$ für

$$1\leqslant N\mathfrak{q}\leqslant \exp\left(\frac{c_{31}}{2}\cdot\frac{\log x}{\log\log x}\right)\leqslant \exp\left(c_{31}\frac{\log\sqrt{x}}{\log\log\sqrt{x}}\right),\qquad x\geqslant x_0(K)$$

die Beziehung:

$$\sum_{\substack{2\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant x\\ \mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{\log N\mathfrak{a}} = \frac{1}{h(\mathfrak{q})}\cdot\frac{x}{\log x} + \frac{1}{h(\mathfrak{q})}\int_2^x \frac{u\,du}{u\log^2 u} + O\Big\{x^{1/2} + \frac{1}{h(\mathfrak{q})}\cdot\frac{x^{\beta_1}}{\log x} +$$
$$+\frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-c_{32}\frac{\log x}{\Lambda}\right) + \frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-c_{32}\frac{\log x}{\Lambda}\right)\int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{du}{u\log^2 u}\Big\}$$
$$= \frac{1}{h(\mathfrak{q})}\int_2^x\frac{du}{\log u} + O\left\{x^{1/2} + \frac{1}{h(\mathfrak{q})}\cdot\frac{x^{\beta_1}}{\log x} + \frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-c_{32}\frac{\log x}{\Lambda}\right)\right\}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus (4.4) wegen

$$x^{1/2}\ll\frac{x}{h(\mathfrak{q})}\exp\left(-c_{32}\frac{\log x}{\Lambda}\right).$$

Beweis zu Korollar 1.3. Sei $1\leqslant N\mathfrak{q}\leqslant(\log x)^{\Lambda}$, $\Lambda>0$. Für die Ausnahmenullstelle $\beta_1=\beta_1(\mathfrak{q})$ gilt nach [4] mit beliebig kleinem $\varepsilon>0$:

$$\beta_1<1-c_{30}(\varepsilon,K)(N\mathfrak{q})^{-\varepsilon}.$$

Man setze $\varepsilon=2/5\Lambda$; dann folgt die Behauptung aus Satz 1.3.

Beweis zu Korollar 1.4. Sei $1\leqslant q\leqslant(\log x)^{\Lambda}$, $\Lambda>0$ und l ein Idealnormenrest mod q, d.h.

$$(l,q)=1,\qquad l\equiv N\mathfrak{a}\bmod q,$$

wobei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal in K ist. Nach Korollar 1.2 existiert für $x\geqslant x_0(\Lambda,K)$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ in K mit $N\mathfrak{p}=p\equiv l\bmod q$.

Es seien $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ zwei Ideale in K mit $(\mathfrak{c}_1,q)=(\mathfrak{c}_2,q)=1$. $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ heißen bekanntlich ([18], Def. VIII) äquivalent mod(q) ($\mathfrak{c}_1\overset{1}{\sim}\mathfrak{c}_2\bmod(q)$), wenn gilt: Es gibt zwei ganze Zahlen γ_1 und γ_2 in K, so daß

$$(\gamma_1)\mathfrak{c}_1=(\gamma_2)\mathfrak{c}_2,\qquad \gamma_1\equiv\gamma_2\equiv 1\bmod(q),\qquad \gamma_1\succ 0,\ \gamma_2\succ 0.$$

Die Idealklassen $\mathfrak{C}\bmod(q)$ sind die Äquivalenzklassen der Relation $\overset{1}{\sim}$. Man setze

$$\mathfrak{c}_1\overset{2}{\sim}\mathfrak{c}_2\bmod(q),\qquad\text{wenn gilt:}\qquad N\mathfrak{c}_1\equiv N\mathfrak{c}_2\bmod q.$$

Durch diese Relation $\overset{2}{\sim}$ wird ebenfalls eine Äquivalenzrelation definiert. Man bezeichne die Äquivalenzklassen mit H:

$$H=H(\mathfrak{b}):=\{(\mathfrak{c},q)=1;\ N\mathfrak{c}\equiv N\mathfrak{b}\bmod q\},\qquad(\mathfrak{b},q)=1.$$

Die Klassenzahl $\varphi_1(q)$ ist die Anzahl der mod q inkongruenten Idealnormen $N\mathfrak{b}$ mit $(\mathfrak{b},q)=1$.

Sei $(\mathfrak{b},q)=1$ und $\mathfrak{b}=(\beta_1,\ldots,\beta_l)$; dann gibt es ganze Zahlen $\mu_1,\ldots,\mu_{l+1}$ in K, so daß

$$1=\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_l\beta_l+\mu_{l+1}q.$$

Nun gilt

$$N(\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_l\beta_l)=N(1-\mu_{l+1}q)=\prod_{k=1}^{n}(1-\mu_{l+1}^{(k)}q)\equiv 1\bmod q,$$

da die elementarsymmetrischen Funktionen der $\mu_{l+1}^{(1)},\ldots,\mu_{l+1}^{(n)}$ ganze rationale Zahlen sind.

Wegen $\mathfrak{b}/(\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_l\beta_l)$ folgt $N\mathfrak{b}/N(\mu_1\beta_1+\ldots+\mu_l\beta_l)$ und somit $(N\mathfrak{b},q)=1$. Schließlich ergibt sich aus $(N\mathfrak{b},q)=1$ wegen $N\mathfrak{b}\equiv 0\bmod\mathfrak{b}$ auch $(\mathfrak{b},q)=1$. Es gilt also $(\mathfrak{b},q)=1$ genau dann, wenn $(N\mathfrak{b},q)=1$ ist. Die Klassenzahl $\varphi_1(q)$ ist damit die Ordnung der Gruppe der Idealnormenreste mod q.

Für zwei Ideale $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_2$ mit $\mathfrak{c}_1\overset{1}{\sim}\mathfrak{c}_2\bmod(q)$ folgt nach [3], § 4: $\mathfrak{c}_1\overset{2}{\sim}\mathfrak{c}_2\bmod(q)$.

Alle Ideale einer Idealklasse $\mathfrak{C}\bmod(q)$ haben somit denselben Idealnormenrest mod q.

Nach [3], Lemma 1 zerfallen die Ideale $\mathfrak{c}$ jeder Klasse H in gleich viele, also in je $h((q))\varphi^{-1}(q)$ Idealklassen $\mathfrak{C}\bmod(q)$.

Die Behauptung von Korollar 1.4 ergibt sich aus Korollar 1.3 mit $\mathfrak{q}=(q)$, wenn man die Klasse H betrachtet, die das Ideal $\mathfrak{a}$ enthält:

$$\sum_{\substack{N\mathfrak{p}\leqslant x\\ \mathfrak{p}\in H}}1=h((q))\varphi_1^{-1}(q)\left\{\frac{1}{h((q))}\int_2^x\frac{du}{\log u}+O_\Lambda\left(\frac{x}{h((q))}\exp\left(-c_3\frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right)\right)\right\}.$$

Es soll noch eine weitere Folgerung aus Satz 1.3 angegeben werden. Man benötigt das folgende

LEMMA 4.1. *Es sei $z \geqslant 2$ eine beliebige reelle Zahl. Für alle Charaktere χ zu Moduln $\mathfrak{q}$ mit $N\mathfrak{q} \leqslant z$ ist $\zeta_K(s, \chi) \neq 0$ im Bereich*

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c'}{M_2(z, t)} \geqslant \frac{3}{4}, \tag{4.5}$$

$$M_2(z, t) = \max\{\log z, (\log(|t|+3))^{2/3}(\log\log(|t|+3))^{1/3}\}$$

bei passendem $c' = c'(K) > 0$. Dabei sind eventuell die $\zeta_K(s, \chi)$ ausgenommen, für die χ durch einen und denselben reellen primitiven Charakter $\chi^* = \chi^*(z) \bmod \mathfrak{q}^*(z)$ induziert wird.

Beweis. Für komplexe Charaktere $\chi \bmod \mathfrak{q}$ folgt die Behauptung nach Satz 1.1 wegen $N\mathfrak{q} \leqslant z$. Ferner können im Bereich (4.5) für reelle Charaktere nur reelle Nullstellen liegen.

Es seien nun $\chi_1^* \bmod \mathfrak{q}_1^*$ und $\chi_2^* \bmod \mathfrak{q}_2^*$ zwei verschiedene reelle primitive Charaktere mit $N\mathfrak{q}_1^* \leqslant z$, $N\mathfrak{q}_2^* \leqslant z$. Man erkläre χ_1^* und χ_2^* nach dem Modul $\mathfrak{q}_1^*\mathfrak{q}_2^*$ durch

$$\chi_l(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \chi_l^*(\mathfrak{a}) & \text{für} \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_1^*\mathfrak{q}_2^*) = 1, \\ 0 & \text{für} \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{q}_1^*\mathfrak{q}_2^*) \neq 1, \end{cases} \qquad l = 1, 2.$$

Dann gilt $\chi_1 \neq \chi_2$, da jeder Charakter $\bmod \mathfrak{q}_1^*\mathfrak{q}_2^*$ primitiver Charakter modulo genau eines Teilers von $\mathfrak{q}_1^*\mathfrak{q}_2^*$ ist.

Nun besitzen $\zeta_K(s, \chi_1)$ und $\zeta_K(s, \chi_2)$ in $\sigma > 0$ dieselben Nullstellen wie $\zeta_K(s, \chi_1^*)$ und $\zeta_K(s, \chi_2^*)$. Nach [2], Lemma 15, kann somit im Bereich

$$\sigma \geqslant \frac{c_{37}(K)}{\log 2N(\mathfrak{q}_1^*\mathfrak{q}_2^*)}, \qquad t = 0$$

höchstens eine der Funktionen $\zeta_K(s, \chi_1^*)$, $\zeta_K(s, \chi_2^*)$ verschwinden. Man erhält wegen $\log 2N(\mathfrak{q}_1^*\mathfrak{q}_2^*) \leqslant 2\log 2z$

$$\zeta_K(s, \chi^*) \neq 0, \qquad \sigma \geqslant 1 - \frac{c_{38}(K)}{\log z}, \qquad t = 0 \tag{4.6}$$

für alle reellen primitiven Charaktere $\chi^* \bmod \mathfrak{q}^*$ mit $N\mathfrak{q}^* \leqslant z$, eventuell mit Ausnahme eines einzigen.

Es seien nun $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ Moduln mit $N\mathfrak{q}_1 \leqslant z$, $N\mathfrak{q}_2 \leqslant z$, zu denen es reelle Charaktere χ_1, χ_2 gibt, für die (4.6) nicht gilt. $\chi_1^* \bmod \mathfrak{q}_1^*$ und $\chi_2^* \bmod \mathfrak{q}_2^*$ seien die zugehörigen primitiven Charaktere.

Da $\zeta_K(s, \chi_1^*)$ und $\zeta_K(s, \chi_2^*)$ in $\sigma > 0$ dieselben Nullstellen haben wie $\zeta_K(s, \chi_1)$ und $\zeta_K(s, \chi_2)$, folgt nach den obigen Überlegungen:

$$\mathfrak{q}_1^* = \mathfrak{q}_2^*, \qquad \chi_1^* = \chi_2^*,$$

womit die Behauptung von Lemma 4.1 bewiesen ist.

SATZ 4.2. *Es sei $A > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Dann gilt gleichmäßig für $1 \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant \exp\left(c_{39}\dfrac{\log x}{\log\log x}\right)$:*

$$\Pi(x; \mathfrak{C}) = \frac{1}{h(\mathfrak{q})}\frac{x}{\log x}\left\{1 + O_A\left(\frac{1}{\log x}\right)\right\}.$$

Dabei sind höchstens die $\mathfrak{q}$ ausgenommen, welche Vielfache eines einzigen Moduls $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}^*(x)$ mit $N\mathfrak{q}^* > (\log x)^A$ sind.

Beweis. Der Beweis des entsprechenden Satzes im rationalen Fall ([22], Kap. IX, Satz 2.3) überträgt sich unmittelbar auf Zahlkörper.

5. M. Jutila gibt in [16] als Anwendung seines Hauptsatzes ein dem Bombierischen Primzahlsatz ähnliches Resultat über die Verteilung von Primzahlen in 'kurzen' arithmetischen Reihen an.

In diesem Paragraphen sollen entsprechende Untersuchungen im Zahlkörper durchgeführt werden.

LEMMA 5.1. *Es sei $A > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Ferner seien $x \geqslant x_0(A, K)$ und $3 \leqslant T \leqslant x$. Dann gilt für $N\mathfrak{q} \leqslant Q \leqslant x$ mit Ausnahme von höchstens $Q(\log x)^{-A}$ Moduln $\mathfrak{q}$:*

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(1 - (\log x)^{-3/4}, T, \chi) = 0.$$

Der Ausdruck $N(\sigma, T, \chi)$ ist vor (3.6) definiert.

Beweis. Es sei zunächst $\log N\mathfrak{q} \leqslant (\log x)^{2/3}$; dann folgt wegen $T \leqslant x$ und $x \geqslant x_0(A, K)$:

$$\max\{\log N\mathfrak{q}, (\log T)^{2/3}(\log\log T)^{1/3}\} \leqslant c(K)(\log x)^{3/4}.$$

Nach Satz 1.1 liegen somit für komplexe Charaktere $\chi \bmod \mathfrak{q}$ mit $N\mathfrak{q} \leqslant \exp\{(\log x)^{2/3}\}$ im Bereich $1 - (\log x)^{-3/4} \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ keine Nullstellen irgendeiner Funktion $\zeta_K(s, \chi)$, $\chi \bmod \mathfrak{q}$.

Bei reellen Charakteren kann im obigen Bereich eventuell eine reelle Nullstelle existieren.

Man setze $z = \exp\{(\log x)^{2/3}\}$; dann ist nach Lemma 4.1:

$$\zeta_K(s, \chi) \neq 0, \qquad \sigma \geqslant 1 - \frac{c'(K)}{\log z}, \qquad t = 0$$

für alle reellen primitiven Charaktere $\chi \bmod \mathfrak{q}$ mit $N\mathfrak{q} \leqslant z$, eventuell mit Ausnahme eines einzigen Charakters $\chi^* \bmod \mathfrak{q}^*(z)$.

Weiter folgt:

$$1 - \frac{c'(K)}{\log z} \leqslant 1 - \frac{1}{(\log x)^{3/4}}.$$

Nach dem Satz von Siegel ([4]) gilt für die zu $\mathfrak{q}^*$ gehörige Ausnahmenullstelle $\beta_1 = \beta_1(\mathfrak{q}^*)$:

$$\beta_1 < 1 - c_{30}(\varepsilon, K)(N\mathfrak{q}^*)^{-\varepsilon} \quad \text{für jedes } \varepsilon > 0.$$

Zoll $\beta_1 \geqslant 1 - (\log x)^{-3/4}$ sein, so ergibt sich $N\mathfrak{q}^* \geqslant c_{41}(\varepsilon, K)(\log x)^{3/4\varepsilon}$. Sum Beweis von Lemma 5.1 ist der Ausdruck

$$S = \sum_{\substack{N\mathfrak{q} \leqslant Q \\ \sum\limits_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(1-(\log x)^{-3/4}, T, \chi) \geqslant 1}} 1$$

abzuschätzen. Es folgt mit den Bezeichnungen in (3.6):

$$\begin{aligned} S &\leqslant \sum_{N\mathfrak{q} \leqslant Q} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(1-(\log x)^{-3/4}, T, \chi) \\ &\leqslant \sum_{N\mathfrak{q} \leqslant Q} \sum_{\substack{\mathfrak{q}' \mid \mathfrak{q} \\ \log N\mathfrak{q}' \leqslant (\log x)^{2/3}}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}'} N(1-(\log x)^{-3/4}, T, \chi) + \\ &\qquad + \sum_{N\mathfrak{q} \leqslant Q} \sum_{\substack{\mathfrak{q}' \mid \mathfrak{q} \\ \log N\mathfrak{q}' > (\log x)^{2/3}}} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}'} N(1-(\log x)^{-3/4}, T, \chi) = S_1 + S_2. \end{aligned}$$

Nach den obigen Überlegungen erhält man für die Summe S_1:

$$(5.1) \qquad S_1 \leqslant \sum_{N\mathfrak{a} \leqslant Q/N\mathfrak{q}^*} 1 \ll \frac{Q}{N\mathfrak{q}^*} \ll_A Q(\log x)^{-2A}.$$

Eine Abschätzung für S_2 ergibt sich für $x \geqslant x_0(A, K)$ unter Berücksichtigung von Satz B aus [11]:

$$(5.2) \qquad \begin{aligned} S_2 &\ll Q\exp\{-(\log x)^{2/3}\} \sum_{N\mathfrak{q} \leqslant Q} \sideset{}{^*}\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(1-(\log x)^{-3/4}, T, \chi) \\ &\ll Q(\log x)^{-2A}. \end{aligned}$$

Wegen $S \leqslant S_1 + S_2$ folgt aus (5.1) und (5.2) die Behauptung.

Lemma 5.2. *Es sei $A > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Ferner seien $x \geqslant 2$ und $y = x^a \geqslant 2$ mit festem $1-(2n-1)/4n^2 < a < 1$. Man setze für $\varepsilon > 0$:*

$$b = \frac{2n-1-4n^2(1-a)}{4n^2+12n-6} - \varepsilon.$$

Dann gilt für $Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q$, $Q \leqslant x^b$, mit Ausnahme von höchstens $Q(\log x)^{-A}$ Moduln $\mathfrak{q}$ in der bisherigen Bezeichnungsweise:

$$\max_{\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}} \max_{z \leqslant y} \left| \Psi(x+z; \mathfrak{C}) - \Psi(x; \mathfrak{C}) - \frac{z}{h(\mathfrak{q})} \right| \ll_{\varepsilon, A} \frac{y}{h(\mathfrak{q})} (\log x)^{-A}.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar für $x < x_0(\varepsilon, A, K)$. Es sei also $x \geqslant x_0(\varepsilon, A, K)$ und $x \geqslant T \geqslant 3$, $N\mathfrak{q} \leqslant 2Q \leqslant x$, $z \leqslant y \leqslant x$.

Nach Lemma 5.1 gilt mit Ausnahme von höchstens $Q(\log x)^{-A}$ Moduln $\mathfrak{q}$:

$$\sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} N(1-(\log x)^{-3/4}, T, \chi) = 0.$$

Im folgenden werden die Ausnahmen außer Betracht gelassen. Es ergibt sich mit Lemma 3.5:

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sum_{\substack{\varrho = \varrho(\chi) \\ 0 < \beta < 1 \\ |\gamma| \leqslant T}} x^{\beta-1} &\ll T \cdot x^{-1} N\mathfrak{q} \cdot \log(N\mathfrak{q}T) + \\ &\quad + \int_0^{1-(\log x)^{-3/4}} \{N\mathfrak{q}^6 T^{4n^2/(2n-1)} x^{-1}\}^{1-\sigma} (\log x)^{3n+11} d\sigma. \end{aligned}$$

Man setze $T = N\mathfrak{q}\, y^{-1} x^{1+\varepsilon}$; dann folgt $T \geqslant x^{1-a+\varepsilon} \geqslant 3$, $T \leqslant 2x^{1+b+\varepsilon-a} \leqslant x$,

$$N\mathfrak{q}^6 T^{4n^2/(2n-1)} \ll \exp\{(1-6\varepsilon)\log x\} \leqslant x^{1-\varepsilon}.$$

Man erhält

$$\begin{aligned} \sum_{\chi \bmod \mathfrak{q}} \sum_{\substack{\varrho = \varrho(\chi) \\ 0 < \beta < 1 \\ |\gamma| \leqslant T}} x^{\beta-1} &\ll x^{-\varepsilon}\log x + \exp\{-\varepsilon(\log x)^{1/4} + (3n+11)\log\log x\} \\ &\ll_{\varepsilon, A} (\log x)^{-A} \end{aligned}$$

und somit nach (3.8) wegen $a > 1/2$:

$$\Psi(x+z; \mathfrak{C}) - \Psi(x; \mathfrak{C}) - \frac{z}{h(\mathfrak{q})} \ll \frac{y}{h(\mathfrak{q})} (\log x)^{-A} + \frac{x}{T} \log^2 x.$$

Schließlich gilt

$$\frac{x}{T} \log^2 x \ll \frac{y}{N\mathfrak{q}} x^{-\varepsilon} \log^2 x \ll_{\varepsilon, A} \frac{y}{h(\mathfrak{q})} (\log x)^{-A},$$

womit die Behauptung von Lemma 5.2 bewiesen ist.

Satz 5.1. *Es seien $x \geqslant 2$ und $y = x^a \geqslant 2$ mit festem $1-(2n-1)/4n^2 < a < 1$. Man setze für $\varepsilon > 0$:*

$$b = \frac{2n-1-4n^2(1-a)}{4n^2+12n-6} - \varepsilon.$$

Dann gilt für $A > 0$:

$$\sum_{N\mathfrak{q} \leqslant x^b} \frac{h(\mathfrak{q})}{\Phi(\mathfrak{q})} \max_{\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}} \max_{z \leqslant y} \left| \Psi(x+z; \mathfrak{C}) - \Psi(x; \mathfrak{C}) - \frac{z}{h(\mathfrak{q})} \right| \ll_{\varepsilon, A} y(\log x)^{-A}.$$

Beweis. Man unterteile das Intervall $[1, x^b]$ in $\ll \log x$ Teilintervalle der Form $[Q, 2Q]$, $Q \leqslant x^b$.

Für die in Lemma 5.2 ausgenommenen Moduln $\mathfrak{q}$ mit $Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q$ (höchstens $Q(\log x)^{-A-2}$) erhält man unter Berücksichtigung von Theorem 1 aus [26]:

$$\sum_{Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q}{}' \frac{h(\mathfrak{q})}{\Phi(\mathfrak{q})} \max_{\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}} \max_{z \leqslant y} \left| \Psi(x+z; \mathfrak{C}) - \Psi(x; \mathfrak{C}) - \frac{z}{h(\mathfrak{q})} \right|$$

$$\ll \log x \sum_{Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q}{}' \frac{h(\mathfrak{q})}{\Phi(\mathfrak{q})} \max_{\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}} \sum_{\substack{x < N\mathfrak{a} \leqslant x+y \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{C}}} 1 + y \sum_{Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q}{}' \frac{1}{\Phi(\mathfrak{q})}$$

$$\ll y(\log x)^{-A-1} + x^{1+\frac{b}{n}-\frac{1}{n}}(\log x)^{-A-1} + x^b(\log x)^{-A-1}.$$

Nun gilt:

$$1 + \frac{b}{n} - \frac{1}{n} \leqslant a + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \leqslant a, \quad b \leqslant a - 1 + \frac{1}{2n} \leqslant a.$$

Für die übrigen Moduln $\mathfrak{q}$ mit $Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q$ folgt nach Lemma 5.2:

$$\sum_{Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q}{}'' \frac{h(\mathfrak{q})}{\Phi(\mathfrak{q})} \max_{\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}} \max_{z \leqslant y} \left| \Psi(x+z; \mathfrak{C}) - \Psi(x; \mathfrak{C}) - \frac{z}{h(\mathfrak{q})} \right|$$

$$\ll_{\varepsilon, A} y(\log x)^{-A-2} \sum_{Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q} \frac{1}{\Phi(\mathfrak{q})} \ll y(\log x)^{-A-1}.$$

Man kann nun leicht den in der Einleitung formulierten Satz 1.4 beweisen.

Lemma 5.3. *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 5.2 erfüllt. Dann gilt für $Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q$, $Q \leqslant x^b$ mit Ausnahme von höchstens $Q(\log x)^{-A}$ Moduln $\mathfrak{q}$:*

$$\max_{\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}} \max_{z \leqslant y} \left| \Pi(x+z; \mathfrak{C}) - \Pi(x; \mathfrak{C}) - \frac{1}{h(\mathfrak{q})} \int_x^{x+z} \frac{du}{\log u} \right| \ll_{\varepsilon, A} \frac{y}{h(\mathfrak{q})} (\log x)^{-A}.$$

Beweis. Zunächst folgt für $z \leqslant y$ und $\mathfrak{C} \bmod \mathfrak{q}$:

$$\Pi(x+z; \mathfrak{C}) - \Pi(x; \mathfrak{C}) = \sum_{\substack{x < N\mathfrak{a} \leqslant x+z \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{C}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{\log N\mathfrak{a}} + O(x^{1/2}).$$

Nun gilt für $Q \leqslant N\mathfrak{q} \leqslant 2Q$, $Q \leqslant x^b$:

$$x^{1/2} \ll_A \frac{x^a}{x^b} (\log x)^{-A} \leqslant \frac{y}{Q} (\log x)^{-A} \ll \frac{y}{h(\mathfrak{q})} (\log x)^{-A}.$$

Weiter erhält man durch partielle Summation nach Lemma 5.2 mit Ausnahme von höchstens $Q(\log x)^{-A}$ Moduln $\mathfrak{q}$:

$$\sum_{\substack{x < N\mathfrak{a} \leqslant x+z \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{C}}} \frac{\Lambda(\mathfrak{a})}{\log N\mathfrak{a}} = \frac{1}{h(\mathfrak{q})} \int_x^{x+z} \frac{du}{\log u} + O\left\{\frac{y}{h(\mathfrak{q})} (\log x)^{-A}\right\}.$$

Damit ist Lemma 5.3 vollständig bewiesen.

Die Behauptung von Satz 1.4 folgt hieraus mit denselben Überlegungen wie Satz 5.1 aus Lemma 5.2.

Literaturverzeichnis

[1] E. Bombieri, *On the large sieve*, Mathematika 12 (1965), S. 201–225.
[2] E. Fogels, *On the zeros of Hecke's L-functions I*, Acta Arith. 7 (1962), S. 87–106.
[3] — *On the distribution of prime ideals*, ibid. 7 (1962), S. 255–269.
[4] — *Über die Ausnahmenullstelle der Heckeschen L-Funktionen*, ibid. 8 (1963), S. 307–309.
[5] — *On the zeros of L-functions*, ibid. 11 (1965), S. 67–96.
[6] — *Corrigendum to the paper „On the zeros of L-functions"*, ibid. 14 (1968), p. 435.
[7] — *On the zeros of a class of L-functions*, ibid. 18 (1971), S. 153–164.
[8] — *A mean value theorem of Bombieri's type*, ibid. 21 (1972), S. 137–151.
[9] D. R. Heath-Brown, *On the density of zeros of the Dedekind zeta-function*, ibid. 33 (1977), S. 169–181.
[10] E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, New York 1970.
[11] J. Hinz, *Über Nullstellen der Heckeschen Zetafunktionen in algebraischen Zahlkörpern*, Acta Arith. 31 (1976), S. 167–193.
[12] — *Régions libres de zéros des fonctions dzétas de Hecke et la distribution des idéaux premiers*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, (1976) S. 919–920.
[13] T. Hirano, *On the zeros of Hecke's L-functions*, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo 24, 1 (1974), S. 9–24.
[14] L. K. Hua, *Additive Primzahltheorie*, Leipzig 1959.
[15] M. N. Huxley, *The large sieve inequality for algebraic number fields III: Zero-density results*, J. London Math. Soc. (2), 3 (1971), S. 233–240.
[16] M. Jutila, *A statistical density theorem for L-functions with applications*, Acta Arith. 16 (1969), S. 207–216.
[17] E. Landau, *Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion abhängen*, Acta mathematica 35 (1912), S. 271–294.
[18] — *Über Ideale und Primideale in Idealklassen*, Math. Zeitschr. 2 (1918), S. 52–154.
[19] — *Verallgemeinerung eines Pólyaschen Satzes auf algebraische Zahlkörper*, Göttinger Nachr. 1918, S. 478–488.
[20] T. Mitsui, *Generalized prime number theorem*, Jap. J. Math. 26 (1956), S. 1–42.
[21] — *On the prime ideal theorem*, J. Math. Soc. Japan 20 (1968), S. 233–247.
[22] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer-Verlag, Berlin 1957.
[23] W. Staś and K. Wiertelak, *On some estimates in the theory of $\zeta(s, \chi)$-functions*, Acta Arith. 26 (1975), S. 293–301.
[24] A. V. Sokolovskiĭ, *A theorem on the zeros of Dedekind's zeta-function and the distance between „neighboring" prime ideals* (in Russian), ibid. 13 (1968), S. 321–334.

[25] T. Tatuzawa, *On the number of integral ideals in algebraic number fields, whose norms not exceeding x*, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ., Univ. Tokyo, 23 (1973), S. 73–86.

[26] — *On the number of integral ideals, whose norms belonging to some norm residue class* mod$q$, ibid. 27 (1977), S. 1–8.

[27] R. Wilson, *The large sieve in algebraic number fields*, Mathematika 16 (1969), S. 189–204.

FACHBEREICH MATHEMATIK
UNIVERSITÄT MARBURG
D-3550 Marburg/Lahn

Eingegangen am 18.1.1978 (1029)

ACTA ARITHMETICA
XXXVIII (1980)

Quelques résultats d'équirépartition liés aux nombres premiers généralisés de Beurling*

par

JEAN-PIERRE BOREL (Limoges)

1. Introduction et rappels.

1.1. Soit $\mathscr{P} = \{p_i\}_{i\in N^*}$ un ensemble de nombres premiers généralisés de Beurling, c'est-à-dire que $\mathscr{P}$ est muni d'une norme $\| \ \|: \mathscr{P} \to \boldsymbol{R}$ telle que:

$$1 < \|p_1\| \leqslant \|p_2\| \leqslant \ldots \leqslant \|p_i\| \leqslant \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{i\to+\infty} \|p_i\| = +\infty.$$

Nous noterons $\mathscr{N}$ le semi-groupe multiplicatif libre engendré par $\mathscr{P}$ ($\mathscr{N}$ est l'ensemble des „entiers"), auquel on prolonge $\| \ \|$ de manière totalement multiplicative:

$$\|b\| = \Big\|\prod p_i^{a_i}\Big\| = \prod \|p_i\|^{a_i}, \quad a_i \in \boldsymbol{N},\ a_i = 0 \text{ sauf un nombre fini}.$$

Nous supposerons $\mathscr{N}$ ordonné: $\mathscr{N} = \{b_n\}_{n\in \boldsymbol{N}}$ de telle manière que:

$$1 = \|b_0\| < \|b_1\| \leqslant \|b_2\| \leqslant \ldots \leqslant \|b_n\| \leqslant \ldots \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \|b_n\| = +\infty,$$

$\mathscr{N}$ peut être ordonné ainsi, de plusieurs façons éventuellement. Nous supposerons dans la suite de ce travail qu'un tel ordre est fixé. Nous verrons plus tard que, dans les cas considérés, les résultats sont indépendants d'un tel ordre.

1.2. Soit f une application de $\mathscr{N}$ dans $\boldsymbol{C}$. Nous poserons alors:

$$B(x,f) = \sum_{\|b\|\leqslant x} f(b); \quad \pi(x,f) = \sum_{\|p\|\leqslant x} f(p); \quad \vartheta(x,f) = \sum_{\|p\|\leqslant x} \log\|p\|\cdot f(p)$$

où b (resp. p) représente l'élément générique de $\mathscr{N}$ (resp. $\mathscr{P}$). On sait définir sur $\mathscr{N}$ une fonction de von Mangoldt par:

$$\Lambda(b) = \begin{cases} \log\|p\| & \text{si } \exists p\in\mathscr{P}, \exists a \in \boldsymbol{N}^*, b = p^a, \\ 0 & \text{sinon}. \end{cases}$$

* Ce travail correspond à une partie de ma thèse de 3ème cycle, effectuée à l'Université d'Aix-Marseille II sous la direction du professeur G. Rauzy.