Conspectus materiae tomi XXXVIII, fasciculi 2

La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange

Address of the Editorial Board and of the exchange

Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches

Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах

ISBN 83-01-01334-6   ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A   D R U K A R N I A   N A U K O W A

Einige Anwendungen der Siegelschen Summenformel

von

WOLFGANG GROTZ (Marburg)

1. Einleitung. Sei K ein algebraischer Zahlkörper n-ten Grades mit der Diskriminante d und mit r_1 reellen und $2r_2$ nicht-reellen konjugierten Körpern. Eine Zahl $\gamma \in K$ heiße *total positiv* $(\gamma \succ 0)$, wenn ihre r_1 reellen Konjugierten positiv sind. Die Zahlen e_p seien definiert durch

$$e_p := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 1 \leqslant p \leqslant r_1, \\ 2 & \text{für} \quad r_1 < p \leqslant r_1 + r_2. \end{cases}$$

Ferner sei $f(\gamma)$ eine auf der Menge $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen γ von K definierte Funktion mit der Eigenschaft: $f(\gamma\eta) = f(\gamma)$ für jede Einheit η einer gewissen Gruppe von Einheiten aus K.

Ziel dieser Arbeit ist es, asymptotische Beziehungen für die Summatorischen von zahlentheoretischen Funktionen dieser Art herzuleiten, d.h. für Ausdrücke der Form

$$F(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} f(\gamma),$$

worin $r' := r_1 + r_2$ gesetzt ist und mit $\gamma^{(h)}$ die Konjugierten von γ bezeichnet werden.

Das wichtigste Hilfsmittel hierzu ist die Siegelsche Summenformel siehe [7], Satz 2), die in § 2 in etwas verallgemeinerter Form angegeben wird. Nach Bereitstellung weiterer Hilfsmittel in § 3 werden in § 4 als Anwendungen hierzu die Summatorischen einiger spezieller zahlentheoretischer Funktionen untersucht. Als erzeugende Dirichlet-Reihen werden geeignete Kombinationen von Heckeschen Zeta-Funktionen verwendet.

Es werden folgende Funktionen behandelt:

(i) $$D_k(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} d_k(\gamma) \quad \text{mit} \quad d_k(\gamma) := \sum_{\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_k = (\gamma)} 1, \ k \geqslant 2;$$

$$\text{(ii)}\quad L(x_1,\ldots,x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma\succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} \log N(\gamma);$$

$$\text{(iii)}\quad T^*(x_1,\ldots,x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma\succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} \frac{\tau(\gamma)}{N(\gamma)} \quad \text{mit} \quad \tau(\gamma) := \sum_{\mathfrak{a}|(\gamma)} N\mathfrak{a};$$

$$\text{(iv)}\quad T(x_1,\ldots,x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma\succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} \tau(\gamma);$$

$$\text{(v)}\quad M(x_1,\ldots,x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma\succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} \mu^2(\gamma) \quad \text{mit } \mu(\gamma) \text{ als Moebiusscher Funktion;}$$

$$\text{(vi)}\quad D^{(2)}(x_1,\ldots,x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma\succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} d^2(\gamma) \quad \text{mit} \quad d(\gamma) := \sum_{\mathfrak{a}|(\gamma)} 1.$$

Bei der allgemeinen Behandlung der in (vi) angegebenen Funktion treten Schwierigkeiten auf, die in dem etwas unübersichtlichen analytischen Verhalten gewisser gebrochen rationaler Ausdrücke von Heckeschen Zeta-Funktionen liegen; daher wird diese Funktion nur in solchen Zahlkörpern K betrachtet, die der folgenden Bedingung genügen:

($K\mathfrak{H}$) die Idealklassengruppe $\mathfrak{H}$ von K ist das direkte Produkt von Gruppen der Ordnung 2.

Die Ergebnisse lauten:

Satz. *Ist $r' \geqslant 2$, so gilt für $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:*

$$\text{(i)}\qquad D_k(x_1,\ldots,x_{r'}) = XP_{k-1}(\log X) + O\left(X^{1-\frac{1}{\langle k/2\rangle r_1 + kr_2+1}+\delta}\right);$$

$$\text{(ii)}\qquad L(x_1,\ldots,x_{r'}) = B_K(X\log X - r'X) + O\left(X^{1-\frac{1}{n+1}+\delta}\right);$$

$$\text{(iii)}\qquad T^*(x_1,\ldots,x_{r'}) = B_K\zeta_K(2)X + O\left(X^{1-\frac{1}{r'+1}+\delta}\right);$$

$$\text{(iv)}\qquad T(x_1,\ldots,x_{r'}) = B_K 2^{-r'}\zeta_K(2)X^2 + O\left(X^{2-\frac{1}{r'+1}+\delta}\right);$$

$$\text{(v)}\qquad M(x_1,\ldots,x_{r'}) = B_K\big(\zeta_K(2)\big)^{-1}X + O\left(X^{1-\frac{1}{n}}\right);$$

ist zusätzlich ($K\mathfrak{H}$) erfüllt, so gilt für $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$\text{(vi)}\qquad D^{(2)}(x_1,\ldots,x_{r'}) = XP_3(\log X) + O\left(X^{1-\frac{1}{2(n+1)}+\delta}\right).$$

Darin wurde $X := x_1 \cdots x_{r'}$, $B_K := (2\pi)^{r_2}/|\sqrt{d}|$ und $\zeta_K(s) := \sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{-s}$ gesetzt, worin über alle ganzen Ideale $\mathfrak{a} \neq (0)$ von K zu summieren ist. Ferner bezeichnet $P_l(y)$ ein Polynom in y vom Grade l und $\langle y\rangle$ die kleinste ganze rationale Zahl, die größer oder gleich y ist.

Die Koeffizienten der in diesem Satz auftretenden Polynome P_l werden an späterer Stelle noch näher charakterisiert.

Wegen der Voraussetzung $r' \geqslant 2$ werden durch den obigen Satz zwei Fälle nicht berücksichtigt, und zwar erstens der Trivialfall des rationalen Zahlkörpers und zweitens der Fall des imaginär-quadratischen Zahlkörpers. Da im imaginär-quadratischen Zahlkörper mit w als Anzahl der Einheitswurzeln ($w = 6$ für $d = -3$, $w = 4$ für $d = -4$, $w = 2$ sonst)

$$\sum_{\substack{\gamma\succ 0\\ 0<|\gamma|^2<x}} f(\gamma) = w \sum_{\substack{(\gamma)\\ 0<N(\gamma)<x}} f(\gamma)$$

ist, kann auch dieser letztere Fall als trivial angesehen werden.

2. Die Siegelsche Summenformel. Seien $\eta_1, \ldots, \eta_r$, $r = r_1 + r_2 - 1$, voneinander unabhängige total positive Einheiten unendlicher Ordnung, und sei ζ_0^* eine Erzeugende der Gruppe der total positiven Einheitswurzeln in K. Die Ordnung von ζ_0^* werde mit w_0 und die von den Einheiten ζ_0^*, $\eta_1, \ldots, \eta_r$ erzeugte Gruppe mit G bezeichnet. Zwei von 0 verschiedene Zahlen $\gamma_1, \gamma_2 \in K$ heißen *assoziiert bzgl. G*, falls ihr Quotient Element von G ist. Sei

$$\mathfrak{m} := 2\pi i \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{bmatrix},$$

worin $m_1, \ldots, m_r$ ganze rationale Zahlen bezeichnen, und für ganze Zahlen $\gamma \in K$, $\gamma \neq 0$, sei mit $r' := r_1 + r_2$

$$\mathfrak{g}(\gamma) := \begin{bmatrix} \log|\gamma^{(1)}| \\ \vdots \\ \log|\gamma^{(r')}| \end{bmatrix}.$$

Die Zahlen e_p, $e_p^{(q)}$, $p = 1, \ldots, r'$, $q = 1, \ldots, r$, seien definiert durch die Gleichungen

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{r'} e_p = 1, \quad \sum_{p=1}^{r'} e_p \log|\eta_h^{(p)}| = 0, \quad h = 1, \ldots, r;$$

$$\sum_{p=1}^{r'} e_p^{(q)} = 0, \quad \sum_{p=1}^{r'} e_p^{(q)} \log|\eta_h^{(p)}| = \delta_{h,q}, \quad h, q = 1, \ldots, r.$$

(Diese Definition der e_p stimmt offenbar mit der in § 1 angegebenen überein.) Die $r \times r'$-Matrix $(e_p^{(q)})$ (q Zeilenindex, p Spaltenindex) werde mit E bezeichnet. Ferner sei noch

$$E_p(\mathfrak{m}) := \frac{2\pi}{e_p}\sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}, \quad p = 1, \ldots, r',$$

$$\Phi_{\mathfrak{m}}(s) := \sum_{\gamma}{}' \frac{f(\gamma)}{N(\gamma)^s}\exp\{\mathfrak{m}^T E\,\mathfrak{g}(\gamma)\},$$

wobei der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß über ein volles System bzgl. G nicht assoziierter, total positiver ganzer Zahlen zu summieren ist. Mit diesen Bezeichnungen gilt der folgende Satz.

Satz 1. *Ist $f(\gamma)$ eine auf der Menge der ganzen Zahlen von K definierte Funktion mit den Eigenschaften, daß $f(\zeta_0^*\gamma) = f(\gamma)$, $f(\eta_h\gamma) = f(\gamma)$, $h = 1, \ldots, r$, ist und daß für eine geeignete Konstante $c > 0$ und $\gamma \neq 0$ die Funktion $f(\gamma)N(\gamma)^{-c}$ beschränkt ist, und ist ferner für*

$$\mathfrak{l} := \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_{r'} \end{bmatrix}, \qquad l_1, \ldots, l_{r'} \geqslant 1,$$

und $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ die Funktion $G(x_1, \ldots, x_{r'}, \mathfrak{l})$ definiert durch

$$G(x_1, \ldots, x_{r'}, \mathfrak{l}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} x_h < 1}} f(\gamma) \prod_{p=1}^{r'} (1 - |\gamma^{(p)}|^{e_p} x_p)^{l_p - 1},$$

so gilt für $r' \geqslant 2$, $l_1, \ldots, l_{r'} \geqslant 2$ und $\sigma > c+1$:

$$G(x_1, \ldots, x_{r'}, \mathfrak{l}) = \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{m_1, \ldots, m_r = -\infty}^{\infty} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_{\mathfrak{m}}(s) \prod_{p=1}^{r'} \left(x_p^{-s + iE_p(\mathfrak{m})} B\left(l_p, s - iE_p(\mathfrak{m})\right)\right) ds;$$

darin bezeichnet R den Regulator der Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_r$ und B die Eulersche Beta-Funktion.

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 2 in [6]. Überraschenderweise treten durch die Hinzunahme der nicht-reellen Konjugierten keine wesentlichen zusätzlichen Schwierigkeiten auf.

Hilfssatz 1. *Für ganze rationale Zahlen $l_1, \ldots, l_{r'} \geqslant 0$ und für $y_1^{(1)}, \ldots, y_{l_1}^{(1)}, \ldots, y_1^{(r')}, \ldots, y_{l_{r'}}^{(r')} > 0$ gilt*

$$\int_0^{y_{l_{r'}}^{(r')}} \cdots \int_0^{y_1^{(r')}} \cdots \int_0^{y_{l_1}^{(1)}} \cdots \int_0^{y_1^{(1)}} G\left((x_1 + v_1^{(1)} + \ldots + v_{l_1}^{(1)})^{-1}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, (x_{r'} + v_1^{(r')} + \ldots + v_{l_{r'}}^{(r')})^{-1}, (1, \ldots, 1)^T\right) dv_1^{(1)} \cdots dv_{l_1}^{(1)} \cdots dv_1^{(r')} \cdots dv_{l_{r'}}^{(r')}$$
$$= \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1} \cdots \sum_{k^{(r')}=0}^{l_{r'}} (-1)^{\sum_{p=1}^{r'} (k^{(p)} + l_p)} \sum_{1 \leqslant j_1^{(1)} < \ldots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leqslant l_1} \cdots$$
$$\cdots \sum_{1 \leqslant j_1^{(r')} < \ldots < j_{k^{(r')}}^{(r')} \leqslant l_{r'}} G\left((x_1 + y_{j_1^{(1)}}^{(1)} + \ldots + y_{j_{k^{(1)}}^{(1)}}^{(1)})^{-1}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, (x_{r'} + y_{j_1^{(r')}}^{(r')} + \ldots + y_{j_{k^{(r')}}^{(r')}}^{(r')})^{-1}, \mathfrak{l} + (1, \ldots, 1)^T\right) \times$$
$$\times \prod_{p=1}^{r'} \frac{1}{l_p!} (x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \ldots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)})^{l_p},$$

worin die Summanden für $k^{(p)} = 0$ in naheliegender Weise zu interpretieren sind.

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach $m := \sum_{p=1}^{r'} l_p$ geführt. Da dieser Beweis zwar technisch etwas aufwendig, aber völlig elementar ist, kann auf seine Durchführung verzichtet werden.

Da für natürliche Zahlen l und für $\sigma > 0$

$$B(l, s) = \frac{\Gamma(l)\Gamma(s)}{\Gamma(l+s)} = \frac{(l-1)!}{s(s+1)\ldots(s+l-1)}$$

ist, ergibt sich aus Satz 1 und Hilfssatz 1 die folgende Summenformel.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist mit*

$$F(x_1, \ldots, x_{r'}) := G(x_1^{-1}, \ldots, x_{r'}^{-1}, (1, \ldots, 1)^T) = \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} f(\gamma)$$

für $\sigma > c+1$, natürliche Zahlen $l_1, \ldots, l_{r'} \geqslant 2$ und $y_1^{(1)}, \ldots, y_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, y_1^{(r')}, \ldots, y_{l_{r'}-1}^{(r')} > 0$

$$\int_0^{y_{l_{r'}-1}^{(r')}} \cdots \int_0^{y_1^{(r')}} \cdots \int_0^{y_{l_1-1}^{(1)}} \cdots \int_0^{y_1^{(1)}} F(x_1 + v_1^{(1)} + \ldots + v_{l_1-1}^{(1)}, \ldots$$
$$\ldots, x_{r'} + v_1^{(r')} + \ldots + v_{l_{r'}-1}^{(r')}) \, dv_1^{(1)} \cdots dv_{l_1-1}^{(1)} \cdots dv_1^{(r')} \cdots dv_{l_{r'}-1}^{(r')}$$
$$= \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{k^{(r')}=0}^{l_{r'}-1} (-1)^{\sum_{p=1}^{r'} (k^{(p)} + l_p - 1)} \sum_{1 \leqslant j_1^{(1)} < \ldots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leqslant l_1 - 1} \cdots$$
$$\cdots \sum_{1 \leqslant j_1^{(r')} < \ldots < j_{k^{(r')}}^{(r')} \leqslant l_{r'} - 1} \; \sum_{m_1, \ldots, m_r = -\infty}^{\infty} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_{\mathfrak{m}}(s) \times$$
$$\times \prod_{p=1}^{r'} \frac{(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \ldots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)})^{s + l_p - 1 - iE_p(\mathfrak{m})}}{\left(s - iE_p(\mathfrak{m})\right)\left(s + 1 - iE_p(\mathfrak{m})\right) \cdots \left(s + l_p - 1 - iE_p(\mathfrak{m})\right)} ds.$$

Speziell für $l_1 = \ldots = l_{r'} = 2$ erhält man hieraus:

Korollar 1. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 ist für $\sigma > c+1$ und $y^{(1)}, \ldots, y^{(r')} > 0$*

$$\int_0^{y^{(r')}} \cdots \int_0^{y^{(1)}} F(x_1 + v^{(1)}, \ldots, x_{r'} + v^{(r')}) \, dv^{(1)} \cdots dv^{(r')}$$
$$= \frac{w_0}{2\pi i R} \sum_{m_1, \ldots, m_r = -\infty}^{\infty} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \Phi_{\mathfrak{m}}(s) \prod_{p=1}^{r'} \frac{(x_p + y^{(p)})^{s + 1 - iE_p(\mathfrak{m})} - x_p^{s + 1 - iE_p(\mathfrak{m})}}{\left(s - iE_p(\mathfrak{m})\right)\left(s + 1 - iE_p(\mathfrak{m})\right)} ds.$$

Bemerkung. Satz 1 und der als Korollar formulierte Spezialfall von Satz 2 wurden von Siegel für reell-quadratische und von Schaal für total reelle Zahlkörper bewiesen (vgl. [7], Sätze 1 und 2 bzw. [6], Lemma 2 und Gleichung (4)).

3. Hilfssätze. Um die Herleitung der asymptotischen Beziehungen in § 4 möglichst übersichtlich darstellen zu können, werden in diesem § einige Zwischenergebnisse in Form von Hilfssätzen zusammengestellt.

Sei Z ein Bereich idealer Zahlen zu K (vgl. [2], § 2). Dann läßt sich jedem Ideal $\mathfrak{a}$ von K ein von einer idealen Zahl $\alpha' \in Z$ erzeugtes Hauptideal (α') in eineindeutiger Weise zuordnen. Durch diese Zuordnung überträgt sich unmittelbar die Klasseneinteilung der Ideale von K auf die von den idealen Zahlen erzeugten Hauptideale. Die so entstehende Gruppe der Klassen von Hauptidealen aus Z werde mit $\mathfrak{H}'$ bezeichnet. Sei ferner noch (δ') das der Differente $\mathfrak{d}$ von K zugeordnete Hauptideal.

Es sei nun

$$(1) \qquad \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$$

ein System von Grundeinheiten von K.

Für die folgenden Betrachtungen werde zunächst $r_1 \geqslant 1$ vorausgesetzt.

Als *elementare Transformationen* eines Systems von Grundeinheiten werden folgende Transformationen bezeichnet:

(i) Umnumerierung der Grundeinheiten;

(ii) Ersetzen einer Grundeinheit durch ihr Reziprokes;

(iii) Ersetzen einer Grundeinheit durch das Produkt aus dieser und einer anderen Grundeinheit;

(iv) Multiplikation einer Grundeinheit mit (-1);

(v) gleichzeitige Umnumerierung der reellen Konjugierten aller Grundeinheiten.

Durch eine elementare Transformation geht ein System von Grundeinheiten offenbar wieder in ein System von Grundeinheiten über.

Hilfssatz 2. *Durch endlich viele elementare Transformationen läßt sich das System* (1) *in ein solches System* $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_r^*$ *überführen, bei dem die Matrix* $\mathfrak{S}(\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_r^*) := (\operatorname{sign} \varepsilon_h^{*(p)})$, $p = 1, \dots, r_1$, $h = 1, \dots, r$, *(*p *Zeilenindex,* h *Spaltenindex) die folgende Gestalt hat:*

$$(2) \qquad \mathfrak{S}(\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_r^*) = \begin{array}{cl} \left|\begin{array}{cccccc} -1 & & +1 & +1 & \cdots & +1 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ +1 & & -1 & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & +1 & \cdots & +1 \end{array}\right| & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow Q\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccc} & & \uparrow \\ & & Q\text{-te Spalte} \end{array} & \end{array}$$

dabei gilt für die Anzahl Q *der nicht total positiven Grundeinheiten*

$$(3) \qquad 0 \leqslant Q \leqslant r_1 - 1.$$

Die Zahl Q *ist von der speziellen Wahl des Systems* (1) *unabhängig, und es gilt*

$$(4) \qquad \sum_{\substack{h=1 \\ \operatorname{sign} \varepsilon_h^{*(Q+1)} = -1}}^{Q} 1 \equiv 0 \bmod 2.$$

Beweis. Die Matrix $\mathfrak{S}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r) = (\operatorname{sign} \varepsilon_h^{(p)})$, $p = 1, \dots, r_1$, $h = 1, \dots, r$, ist eine Matrix über dem zweielementigen Körper (in multiplikativer Schreibweise). Sie läßt sich somit durch endlich viele elementare Spaltenoperationen auf Spaltennormalgestalt bringen; eine elementare Spaltenoperation der Matrix $\mathfrak{S}$ wird jedoch durch eine elementare Transformation der Form (i) bzw. (iii) des jeweils zugrunde liegenden Einheitensystems bewirkt. Ferner läßt sich die so entstandene Matrix durch endlich viele Zeilenvertauschungen, die durch elementare Transformationen der Form (v) bewirkt werden, auf die Form (2) bringen. Das dieser Matrix zugrunde liegende Einheitensystem werde mit $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_{r_1-1}^*, \varepsilon_{r_1}^{**}, \varepsilon_{r_1+1}^*, \dots, \varepsilon_r^*$ bezeichnet. Ist nun $\operatorname{sign} \varepsilon_{r_1}^{**(r_1)} = -1$, so ist die Einheit $\varepsilon_{r_1}^{**}$ durch $\varepsilon_{r_1}^* := (-1)\varepsilon_1^* \cdots \varepsilon_{r_1-1}^* \varepsilon_{r_1}^{**}$ zu ersetzen (endlich viele elementare Transformationen der Form (iii) und (iv), ansonsten bleibt sie unverändert: $\varepsilon_{r_1}^* := \varepsilon_{r_1}^{**}$. Für das System $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_r^*$ ist dann offenbar auch (3) erfüllt.

Die Unabhängigkeit der Zahl Q von der speziellen Wahl des Systems (1) ist offensichtlich, und es gilt: $Q = \min\{z \mid z$ ist die Anzahl der nicht total positiven Grundeinheiten eines Systems von Grundeinheiten von $K\}$.

Zum Nachweis der Beziehung (4) für das System $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_r^*$ genügt es wegen der Transformationen der Form (v) zu zeigen, daß es ein p mit $Q+1 \leqslant p \leqslant r_1$ gibt, so daß gilt:

$$\sum_{\substack{h=1 \\ \operatorname{sign} \varepsilon_h^{*(p)} = -1}}^{Q} 1 \equiv 0 \bmod 2.$$

Wäre dies nicht der Fall, so gälte für $p = 1, \dots, r_1$

$$\operatorname{sign} \varepsilon_1^{*(p)} \cdots \varepsilon_Q^{*(p)} = -1,$$

und $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_{Q-1}^*, \varepsilon_Q^{**}, \varepsilon_{Q+1}^*, \dots, \varepsilon_r^*$ mit $\varepsilon_Q^{**} := -\varepsilon_1^* \cdots \varepsilon_Q^*$ wäre ein Grundeinheitensystem mit nur $(Q-1)$ nicht total positiven Grundeinheiten; dies stünde im Widerspruch zur Minimalität von Q.

Es gibt somit in K ein System von Grundeinheiten $\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_r^*$, bei dem — gegebenenfalls nach geeigneter Umnumerierung der reellen konjugierten Körper von K — die Matrix $\mathfrak{S}(\varepsilon_1^*, \dots, \varepsilon_r^*)$ die in Hilfssatz 2 angegebene Gestalt hat. Also kann im Folgenden o.B.d.A. angenommen werden, daß das System (1) bereits diese Eigenschaften hat.

Von dieser Stelle an kann der Fall $r_1 = 0$ wieder bequem mitbehandelt werden, wenn man in diesem Fall $Q := -1$ setzt.

Die total positiven Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_r$ seien jetzt definiert durch

$$\eta_h := \begin{cases} \varepsilon_h^2, & \text{falls} \quad h \leqslant Q; \\ \varepsilon_h, & \text{falls} \quad h > Q. \end{cases} \tag{5}$$

Ferner sei für alle von 0 verschiedenen idealen Zahlen α'

$$\mathfrak{g}(\alpha') := \begin{bmatrix} \log|\alpha'^{(1)}| \\ \vdots \\ \log|\alpha'^{(r')}| \end{bmatrix}.$$

Die Zahlen e_p, $e_p^{(q)}$ und $E_p(\mathfrak{m})$ seien definiert wie in § 2, jedoch unter Verwendung der speziellen total positiven Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_r$ aus (5).

Für alle Vektoren

$$\mathfrak{m} := 2\pi i \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_r \end{bmatrix}, \qquad m_1, \ldots, m_r \text{ ganz rational,} \tag{6}$$

und für alle

$$\mathfrak{t} := \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{r'} \end{bmatrix}, \qquad t_1, \ldots, t_{r_1} \in \{0, 1\}, \qquad t_{r_1+1} = \ldots = t_{r'} = 0, \tag{7a}$$

die den Bedingungen

$$t_h + \sum_{\substack{p=Q+1 \\ \operatorname{sign} \varepsilon_h^{(p)} = -1}}^{r_1} t_p \equiv m_h \bmod 2, \qquad h = 1, \ldots, Q, \tag{7b}$$

$$\sum_{p=1}^{r_1} t_p \equiv 0 \bmod 2 \tag{7c}$$

genügen, seien auf der Menge der von (0) verschiedenen Hauptideale von Z die Größencharaktere $\lambda_{\mathfrak{m}}\big((\alpha'), \mathfrak{t}\big)$ definiert durch

$$\lambda_{\mathfrak{m}}\big((\alpha'), \mathfrak{t}\big) := \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{g}(\alpha')\} \prod_{p=1}^{r_1} \left(\frac{\alpha'^{(p)}}{|\alpha'^{(p)}|}\right)^{t_p}.$$

Offenbar ist der rechts stehende Ausdruck von der speziellen Wahl de Assoziierten von α' unabhängig.

Bemerkung. Im Falle $r_1 \geqslant 1$ ist wegen (4) zu vorgegebenen Zahlen $m_1, \ldots, m_r, t_{Q+2}, \ldots, t_{r_1}$ das Kongruenzensystem (7b), (7c) in $t_1, \ldots, t_{Q+1}$ eindeutig lösbar.

Hilfssatz 3. *Sei $g(\gamma)$ eine auf der Menge der ganzen Zahlen von K erklärte Funktion mit den Eigenschaften: $g(\varepsilon\gamma) = g(\gamma)$ für jede Einheit ε von K, $\sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma)$ konvergiert absolut. Dann gilt:*

$$\sum_{\gamma}{}' g(\gamma) \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{g}(\gamma)\} = \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} \sum_{t_{Q+2}, \ldots, t_{r_1} = 0,1} \; \sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma) \lambda_{\mathfrak{m}}\big((\gamma), \mathfrak{t}\big);$$

dabei soll sich die durch den Strich am Summenzeichen ausgedrückte Summationsvorschrift hier und im Folgenden stets auf die von ζ_0^* und den Einheiten $\eta_1, \ldots, \eta_r$ aus (5) erzeugte Einheitengruppe beziehen; im Falle $Q = r_1 - 1$ ist mit der rechten Seite hier und entsprechend im Folgenden die Reihe $\sum_{(\gamma) \neq (0)} g(\gamma) \lambda_{\mathfrak{m}}\big((\gamma), \mathfrak{t}\big)$ gemeint.

Beweis. Die Behauptung ist für $r_1 = 0$ trivial; im Falle $r_1 \geqslant 1$ ist zu beachten, daß, wie aus (2) zu ersehen ist, jedes von (0) verschiedene Hauptideal eine Erzeugende besitzt, deren erste $(Q+1)$ Konjugierte positiv sind.

Für $\mathfrak{m}$ gemäß (6), $\mathfrak{t}$ gemäß (7), $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{H}'$ und $\sigma > 1$ werde jetzt

$$\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t}) := \sum_{(\alpha') \in \mathfrak{K}'} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}\big((\alpha'), \mathfrak{t}\big)}{N(\alpha')^s}$$

gesetzt, wobei über alle von ganzen idealen Zahlen erzeugten Hauptideale $(\alpha') \neq (0)$ aus der Klasse $\mathfrak{K}'$ zu summieren ist und $N(\alpha')$ die Norm des Hauptideals (α') bezeichnet. Mit den Bezeichnungen

$$A := \sqrt{\frac{|d|}{\pi^n}}\, 2^{-r_2}, \qquad \gamma_{\mathfrak{m}} := \prod_{p=1}^{r'} |\sqrt{e_p}|^{-2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}},$$

$$\Gamma_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{t}) := \prod_{p=1}^{r'} \Gamma\left(\frac{e_p}{2}\big(s + t_p - iE_p(\mathfrak{m})\big)\right),$$

$$\xi_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t}) := \Gamma_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{t}) \gamma_{\mathfrak{m}} A^s \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})$$

gilt dann nach Hecke der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 4. *Für $\mathfrak{m}$ gemäß (6), $\mathfrak{t}$ gemäß (7) und $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{H}'$ gilt:*

(a) *$\xi_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})$ ist eine ganze transzendente Funktion, falls $|\mathfrak{m}|^2 + |\mathfrak{t}|^2 > 0$ ist; die Funktion $\xi_{\mathfrak{D}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{D})$ ist überall regulär mit Ausnahme der Punkte $s = 0$ und $s = 1$; dort liegen einfache Pole vor mit den Residuen $-2^{r_1} R_0/w$ bzw. $2^{r_1} R_0/w$, worin R_0 den Regulator des Körpers K und w die Anzahl der Einheitswurzeln in K bezeichnet.*

(b) *$\xi_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})$ genügt der Funktionalgleichung*

$$\xi_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t}) = W_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{t})\, \xi_{-\mathfrak{m}}(1-s, \mathfrak{K}'^*, \mathfrak{t}),$$

wobei

$$W_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{t}) := (-i)^{\sum_{p=1}^{r_1} t_p} \lambda_{\mathfrak{m}}((\delta'), \mathfrak{t})$$

und $\mathfrak{K}'^*$ *dadurch definiert ist, daß* $\mathfrak{K}' \cdot \mathfrak{K}'^*$ *die Klasse von* (δ') *ist.*

Beweis. Siehe [2], § 6 und [1], § 4.

Hieraus erhält man unmittelbar:

HILFSSATZ 5. *Für* $\mathfrak{m}$ *gemäß* (6), $\mathfrak{t}$ *gemäß* (7) *und* $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{H}'$ *gilt:*

(a) $\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})$ *ist eine ganze transzendente Funktion, falls* $|\mathfrak{m}|^2 + |\mathfrak{t}|^2 > 0$ *ist; die Funktion* $\zeta_{\mathfrak{D}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{D})$ *ist überall regulär mit Ausnahme des Punktes* $s = 1$; *dort liegt ein einfacher Pol vor mit dem Residuum* $2^{r_1}(2\pi)^{r_2} \cdot R_0/w|\sqrt{d}|$.

(b) $\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})$ *genügt der Funktionalgleichung*

$$\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t}) = W_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{t}) \gamma_{-2\mathfrak{m}} A^{1-2s} \frac{\Gamma_{-\mathfrak{m}}(1-s, \mathfrak{t})}{\Gamma_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{t})} \zeta_{-\mathfrak{m}}(1-s, \mathfrak{K}'^*, \mathfrak{t}).$$

Als nächstes soll eine Abschätzung der Funktionen $\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})$ in einem Streifen $S_\varrho := \{s \in \boldsymbol{C} \mid -\varrho \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant 1+\varrho\}$, $0 < \varrho \leqslant 1/2$, angegeben werden. Völlig analog zu den Beweisen von Th. 4 und Th. 5 in [4] verläuft der Beweis des folgenden Hilfssatzes.

HILFSSATZ 6. *Für* $\mathfrak{m}$ *gemäß* (6), $\mathfrak{t}$ *gemäß* (7), $|\mathfrak{m}|^2 + |\mathfrak{t}|^2 > 0$, $\mathfrak{K}' \in \mathfrak{H}'$, $0 < \varrho \leqslant 1/2$ *gilt in* S_ϱ:

$$|\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})| \leqslant c_1(\varrho) \Big\{\prod_{p=1}^{r'} |1 + s - iE_p(\mathfrak{m})|^{e_p}\Big\}^{\frac{1}{2}(1+\varrho-\sigma)};$$

für $|t| \geqslant t_0 > 0$ *genügt auch die Funktion* $\zeta_{\mathfrak{D}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{D})$ *dieser Ungleichung.*

Anwendung der Summenformel aus § 2 auf Funktionen der in Satz 1 beschriebenen Art und Auswertung des Integrals nach dem Residuenkalkül liefern das folgende Ergebnis.

HILFSSATZ 7. *Sei* $f(\gamma)$ *eine auf der Menge* $\mathfrak{v}$ *der ganzen Zahlen von* K *definierte Funktion mit den Eigenschaften, daß* $f(\zeta_0^* \gamma) = f(\gamma)$, $f(\eta_h \gamma) = f(\gamma)$, $h = 1, \ldots, r$, *ist und daß für eine geeignete Konstante* $c > 0$ *und* $\gamma \neq 0$ *die Funktion* $f(\gamma) N(\gamma)^{-c}$ *beschränkt ist. Ferner sei* $c_0 := \inf\{c > 0 \mid f(\gamma) N(\gamma)^{-c}$ *beschränkt auf* $\mathfrak{v} \setminus \{0\}\}$. *Die für* $\sigma > c_0 + 1$ *durch*

$$\Phi_{\mathfrak{m}}(s) := \sum_{\gamma}{}' \frac{f(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{g}(\gamma)\}$$

definierten Funktionen mögen für gewisse reelle Zahlen z_0, z_1, λ *mit* $0 \leqslant z_0 < z_1 \leqslant c_0 + 1$, $\lambda > 0$ *und für jedes reelle* ϱ *mit* $0 < \varrho < 1/2$ *den folgenden Bedingungen genügen:*

(i) $\Phi_{\mathfrak{m}}(s)$ *regulär für* $\sigma > z_0$, *falls* $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{D}$,

(ii) $\Phi_{\mathfrak{D}}(s)$ *regulär für* $\sigma > z_0$, $s \neq z_1$,

(iii) $|\Phi_{\mathfrak{m}}(s)| \leqslant c_2(\varrho)\{\prod_{p=1}^{r'} |1+s-iE_p(\mathfrak{m})|^{e_p}\}^{\lambda(z_1+\varrho-\sigma)}$

für $z_0 + 2\varrho \leqslant \sigma \leqslant c_0 + 1 + \varrho$, *falls* $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{D}$,

(iv) $|\Phi_{\mathfrak{D}}(s)| \leqslant c_2(\varrho)|1+s|^{n\lambda(z_1+\varrho-\sigma)}$

für $z_0 + 2\varrho \leqslant \sigma \leqslant c_0 + 1 + \varrho$, $|t| \geqslant t_0 > 0$.

Dann gilt mit $l_p := \langle e_p \lambda(z_1 - z_0)\rangle + 1$, $p = 1, \ldots, r'$, *und* $F(x_1, \ldots, x_{r'})$ *wie in Satz 2 für* $r' \geqslant 2$, *jedes* $\delta > 0$, *für* $y_1^{(1)}, \ldots, y_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, y_1^{(r')}, \ldots, y_{l_{r'}-1}^{(r')} > 0$ *und* $x_1 \cdots x_{r'} \geqslant 1$:

$$\int_0^{v_{l_{r'}-1}^{(r')}} \cdots \int_0^{v_1^{(r')}} \cdots \int_0^{v_{l_1-1}^{(1)}} \cdots \int_0^{v_1^{(1)}} F(x_1 + v_1^{(1)} + \ldots + v_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'} + v_1^{(r')} + \ldots + v_{l_{r'}-1}^{(r')}) \times$$
$$\times dv_1^{(1)} \cdots dv_{l_1-1}^{(1)} \cdots dv_1^{(r')} \cdots dv_{l_{r'}-1}^{(r')}$$
$$= \frac{w_0}{R} \sum_{k^{(1)}=0}^{l_1-1} \cdots \sum_{k^{(r')}=0}^{l_{r'}-1} (-1)^{\sum_{p=1}^{r'}(k^{(p)}+l_p-1)} \sum_{1 \leqslant j_1^{(1)} < \ldots < j_{k^{(1)}}^{(1)} \leqslant l_1 - 1} \cdots$$
$$\cdots \sum_{1 \leqslant j_1^{(r')} < \ldots < j_{k^{(r')}}^{(r')} \leqslant l_{r'}-1} \operatorname*{Res}_{s=z_1} \Phi_{\mathfrak{D}}(s) \prod_{p=1}^{r'} \frac{(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \ldots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)})^{s+l_p-1}}{s(s+1)\cdots(s+l_p-1)} +$$
$$+ O\Big(\prod_{p=1}^{r'} (x_p + y_1^{(p)} + \ldots + y_{l_p-1}^{(p)})^{z_0+l_p-1+\delta}\Big).$$

Darin bezeichnet $\langle x\rangle$ *die kleinste ganze rationale Zahl, die größer oder gleich* x *ist, und* R *den Regulator der Einheiten* $\eta_1, \ldots, \eta_r$ *aus* (5).

Beweis. Sei δ mit $0 < \delta < \min\{1, z_1 - z_0\}$ beliebig vorgegeben, und sei $\varrho := \delta/2$. Wegen $r' \geqslant 2$ und $l_p \geqslant 2$, $p = 1, \ldots, r'$, gilt dann für $\sigma = \sigma_1$ mit $c_0 + 1 \leqslant \sigma_1 \leqslant c_0 + 1 + \varrho$ die in Satz 2 angegebene Gleichung. Verschiebt man im Integral auf der rechten Seite den Integrationsweg nach links und integriert entlang der Geraden $\theta := z_0 + \delta$, so ergibt sich für die innerste Summe

$$\sum_{m_1, \ldots, m_r = -\infty}^{\infty} \lim_{T \to \infty} \Big(\int_{\sigma_1 - iT}^{\theta - iT} + \int_{\theta - iT}^{\theta + iT} + \int_{\theta + iT}^{\sigma_1 + iT}\Big) \Phi_{\mathfrak{m}}(s) \times$$
$$\times \prod_{p=1}^{r'} \frac{(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \ldots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)})^{s+l_p-1-iE_p(\mathfrak{m})}}{(s - iE_p(\mathfrak{m}))(s+1-iE_p(\mathfrak{m}))\cdots(s+l_p-1-iE_p(\mathfrak{m}))} ds +$$
$$+ 2\pi i \operatorname*{Res}_{s=z_1} \Phi_{\mathfrak{D}}(s) \prod_{p=1}^{r'} \frac{(x_p + y_{j_1^{(p)}}^{(p)} + \ldots + y_{j_{k^{(p)}}^{(p)}}^{(p)})^{s+l_p-1}}{s(s+1)\cdots(s+l_p-1)}.$$

Wegen der Voraussetzungen bzgl. der Funktionen $\Phi_{\mathfrak{m}}(s)$ streben die Integrale über die horizontalen Teilstücke des Integrationsweges für $T \to \infty$ gegen 0, während sich die Reihe

$$\sum_{m_1,\ldots,m_r=-\infty}^{\infty} \int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \ldots ds$$

durch das in der Formulierung des Satzes angegebene Restglied abschätzen läßt; dabei ist zu beachten, daß

$$\det \begin{bmatrix} \frac{e_1^{(1)}}{e_1} - \frac{e_{r'}^{(1)}}{e_{r'}} & \ldots & \frac{e_1^{(r)}}{e_1} - \frac{e_{r'}^{(r)}}{e_{r'}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{e_r^{(1)}}{e_r} - \frac{e_{r'}^{(1)}}{e_{r'}} & \ldots & \frac{e_r^{(r)}}{e_r} - \frac{e_{r'}^{(r)}}{e_{r'}} \end{bmatrix} = \pm \frac{1}{R} \neq 0$$

ist.

Korollar 2. *Die Funktionen $f(\gamma)$, $\Phi_{\mathfrak{m}}(s)$ mögen die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 erfüllen; ferner sei $\lambda(z_1-z_0) \leqslant 1/2$. Dann gilt für $r' \geqslant 2$, jedes $\delta > 0$, für $y^{(1)}, \ldots, y^{(r')} > 0$ und $x_1 \cdots x_{r'} \geqslant 1$:*

$$\int_0^{y^{(r')}} \ldots \int_0^{y^{(1)}} F(x_1+v^{(1)}, \ldots, x_{r'}+v^{(r')})\, dv^{(1)} \cdots dv^{(r')}$$

$$= \frac{w_0}{R} \operatorname*{Res}_{s=z_1} \Phi_{\mathfrak{D}}(s) \prod_{p=1}^{r'} \frac{(x_p+y^{(p)})^{s+1} - x_p^{s+1}}{s(s+1)} + O\Big(\Big\{\prod_{p=1}^{r'} (x_p+y^{(p)})\Big\}^{z_0+1+\delta}\Big).$$

Bemerkung. Korollar 2 läßt sich mit Korollar 1 anstelle von Satz 2 beweisen.

Zur Auswertung des in Hilfssatz 7 auftretenden Residuums werden die beiden folgenden elementaren Beziehungen benötigt, auf deren Beweis verzichtet werden kann.

Hilfssatz 8. (a) *Für $l \geqslant 2$, $x, y_1, \ldots, y_{l-1} > 0$ und $\operatorname{Re} s > 0$ gilt:*

$$\int_0^{y_{l-1}} \ldots \int_0^{y_1} \int_0^{x+v_1+\ldots+v_{l-1}} u^{s-1}\, du\, dv_1 \cdots dv_{l-1}$$

$$= \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+l-1)} \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{k+l-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant l-1} (x+y_{j_1}+\ldots+y_{j_k})^{s+l-1};$$

(b) *Für $m \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ und $w_1, \ldots, w_{m+1} > 0$ gilt:*

$$\int_0^{w_{m+1}} \ldots \int_0^{w_1} (\log t_1 \cdots t_{m+1})^k\, dt_1 \cdots dt_{m+1}$$

$$= w_1 \cdots w_{m+1} \sum_{\varkappa=0}^{k} (-1)^{k-\varkappa} \frac{k!}{\varkappa!} \binom{k-\varkappa+m}{m} (\log w_1 \cdots w_{m+1})^{\varkappa}.$$

Da bei den meisten der in § 4 behandelten Anwendungen die Voraussetzungen von Hilfssatz 7 mit $z_0 < 1$ und $z_1 = 1$ erfüllt sind, soll für diesen Fall die Auswertung des Residuums aus Hilfssatz 7 in allgemeiner Form durchgeführt werden.

Hilfssatz 9. *Die Funktionen $f(\gamma)$, $\Phi_{\mathfrak{m}}(s)$ mögen den Voraussetzungen von Hilfssatz 7 mit $z_0 < 1$ and $z_1 = 1$ genügen; ferner sei $f(\gamma) \geqslant 0$ für alle ganzen Zahlen $\gamma \in K$. Die Funktion $\Phi_{\mathfrak{D}}(s)$ habe im Punkte $z_1 = 1$ einen Pol der Ordnung $P \geqslant 1$ mit dem Hauptteil $\sum_{\varrho=1}^{P} A_\varrho (s-1)^{-\varrho}$. Dann gilt in den Bezeichnungen von Hilfssatz 7 für $r' \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:*

$$F(x_1, \ldots, x_{r'}) = x_1 \ldots x_{r'} \frac{w_0}{R} \sum_{\varkappa=0}^{P-1} B_\varkappa (\log x_1 \cdots x_{r'})^{\varkappa} +$$

$$+ O\Big((x_1 \cdots x_{r'})^{1-(1-z_0)(\sum_{p=1}^{r'} (l_p-1)+1)^{-1}+\delta}\Big)$$

mit

$$B_\varkappa := \frac{1}{\varkappa!} \sum_{\varrho=\varkappa+1}^{P} (-1)^{\varrho-1-\varkappa} \binom{r+\varrho-1-\varkappa}{r} A_\varrho.$$

Beweis. Zur Abkürzung werde

$$I_\varrho(w^{(1)}, \ldots, w^{(r')}) := \int_0^{w^{(r')}} \ldots \int_0^{w^{(1)}} (\log u^{(1)} \cdots u^{(r')})^{\varrho-1}\, du^{(1)} \cdots du^{(r')},$$

$$J(h; w^{(1)}, \ldots, w^{(r')}) := \int_0^{y_{l_{r'}-1}^{(r')}} \ldots \int_0^{y_1^{(r')}} \ldots \int_0^{y_{l_1-1}^{(1)}} \ldots \int_0^{y_1^{(1)}} \times$$

$$\times h\big(w^{(1)}(v_1^{(1)}, \ldots, v_{l_1-1}^{(1)}), \ldots, w^{(r')}(v_1^{(r')}, \ldots, v_{l_{r'}-1}^{(r')})\big)\, dv_1^{(1)} \cdots \times$$

$$\times \cdots dv_{l_1-1}^{(1)} \cdots dv_1^{(r')} \cdots dv_{l_{r'}-1}^{(r')},$$

$$Y := y_1^{(1)} \cdots y_{l_1-1}^{(1)} \cdots y_1^{(r')} \cdots y_{l_{r'}-1}^{(r')}$$

gesetzt. Durch Anwendung der Hilfssätze 7 und 8(a) und Berechnung des Residuums erhält man

(8) $\quad J(F; x_1+v_1^{(1)}+\ldots+v_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'}+v_1^{(r')}+\ldots+v_{l_{r'}-1}^{(r')})$

$$= \frac{w_0}{R} \sum_{\varrho=1}^{P} \frac{A_\varrho}{(\varrho-1)!} J(I_\varrho; x_1+v_1^{(1)}+\ldots+v_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'}+v_1^{(r')}+\ldots+v_{l_{r'}-1}^{(r')}) +$$

$$+ O\Big(\prod_{p=1}^{r'} (x_p+y_1^{(p)}+\ldots+y_{l_p-1}^{(p)})^{z_0+l_p-1+\delta}\Big).$$

Im Folgenden sei immer

$$(9)\qquad \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)} < x_p, \qquad p = 1, \ldots, r',$$

vorausgesetzt. Wegen der Monotonie von $F(x_1, \ldots, x_{r'})$ in allen Variablen gilt offenbar

$$(10)\quad J\Big(F;\, x_1 + \sum_{j=1}^{l_1-1} (v_j^{(1)} - y_j^{(1)}), \ldots, x_{r'} + \sum_{j=1}^{l_{r'}-1} (v_j^{(r')} - y_j^{(r')})\Big) \leqslant YF(x_1, \ldots, x_{r'}) \leqslant J\Big(F;\, x_1 + \sum_{j=1}^{l_1-1} v_j^{(1)}, \ldots, x_{r'} + \sum_{j=1}^{l_{r'}-1} v_j^{(r')}\Big).$$

Da das Mehrfachintegral

$$I_\varrho(x_1 + v_1^{(1)} + \ldots + v_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'} + v_1^{(r')} + \ldots + v_{l_{r'}-1}^{(r')})$$

für $x_p > 0$ $(p = 1, \ldots, r')$ eine stetige Funktion von $(v_1^{(1)}, \ldots, v_{l_1-1}^{(1)}, \ldots \ldots, v_1^{(r')}, \ldots, v_{l_{r'}-1}^{(r')})$ ist, gibt es Vektoren

$$(t_{m,1}^{(1)}, \ldots, t_{m,l_1-1}^{(1)}, \ldots, t_{m,1}^{(r')}, \ldots, t_{m,l_{r'}-1}^{(r')}), \qquad m = 1, 2,$$

mit

$$(11)\qquad 0 \leqslant t_{m,j_p}^{(p)} \leqslant y_{j_p}^{(p)}, \qquad m = 1, 2,\ p = 1, \ldots, r',\ j_p = 1, \ldots, l_p - 1,$$

so daß gilt:

$$(12)\qquad YI_\varrho(x_1 + t_{1,1}^{(1)} + \ldots + t_{1,l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'} + t_{1,1}^{(r')} + \ldots + t_{1,l_{r'}-1}^{(r')}) \leqslant J(I_\varrho;\, x_1 + v_1^{(1)} + \ldots + v_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'} + v_1^{(r')} + \ldots + v_{l_{r'}-1}^{(r')}) \leqslant YI_\varrho(x_1 + t_{2,1}^{(1)} + \ldots + t_{2,l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'} + t_{2,1}^{(r')} + \ldots + t_{2,l_{r'}-1}^{(r')}).$$

Aus Hilfssatz 8(b) erhält man nach einiger Rechnung unter Beachtung von (9) und (11) für $m = 1, 2$:

$$(13)\quad I_\varrho(x_1 + t_{m,1}^{(1)} + \ldots + t_{m,l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'} + t_{m,1}^{(r')} + \ldots + t_{m,l_{r'}-1}^{(r')}) = x_1 \cdots x_{r'} \sum_{\varkappa=0}^{\varrho-1} (-1)^{\varrho-1-\varkappa} \frac{(\varrho-1)!}{\varkappa!} \binom{\varrho-1-\varkappa+r}{r} (\log x_1 \cdots x_{r'})^\varkappa + O\Big((x_1 \ldots x_{r'})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{r'} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)}\Big).$$

Aus (8), (12) und (13) ergibt sich

$$\frac{1}{Y} J(F;\, x_1 + v_1^{(1)} + \ldots + v_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, x_{r'} + v_1^{(r')} + \ldots + v_{l_{r'}-1}^{(r')}) = x_1 \cdots x_{r'} \frac{w_0}{R} \sum_{\varrho=1}^{P} A_\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\varrho-1} (-1)^{\varrho-1-\varkappa} \frac{1}{\varkappa!} \binom{\varrho-1-\varkappa+r}{r} (\log x_1 \cdots x_{r'})^\varkappa + O\Big((x_1 \cdots x_{r'})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{r'} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)}\Big) + O\Big(\prod_{p=1}^{r'} \frac{x_p^{z_0+l_p-1+\delta}}{y_1^{(p)} \cdots y_{l_p-1}^{(p)}}\Big);$$

analoge Überlegungen ergeben eine entsprechende Beziehung für die linke Seite von (10). Somit erhält man aus (10):

$$(14)\quad F(x_1, \ldots, x_{r'}) = x_1 \cdots x_{r'} \frac{w_0}{R} \sum_{\varkappa=0}^{P-1} \sum_{\varrho=\varkappa+1}^{P} A_\varrho (-1)^{\varrho-1-\varkappa} \frac{1}{\varkappa!} \binom{\varrho-1-\varkappa+r}{r} (\log x_1 \cdots x_{r'})^\varkappa + O\Big((x_1 \cdots x_{r'})^{1+\delta} \sum_{p=1}^{r'} \frac{1}{x_p} \sum_{j=1}^{l_p-1} y_j^{(p)}\Big) + O\Big(\prod_{p=1}^{r'} \frac{x_p^{z_0+l_p-1+\delta}}{y_1^{(p)} \cdots y_{l_p-1}^{(p)}}\Big).$$

Das günstigste Ergebnis erzielt man mit

$$y_1^{(1)} x_1^{-1} = \ldots = y_{l_1-1}^{(1)} x_1^{-1} = \ldots = y_1^{(r')} x_{r'}^{-1} = \ldots = y_{l_{r'}-1}^{(r')} x_{r'}^{-1} = (x_1 \cdots x_{r'})^{-(1-z_0)(\sum_{p=1}^{r'} (l_p-1)+1)^{-1}};$$

diese Wahl ist möglich, da wegen $z_0 < 1$ für hinreichend großes $x_1 \cdots x_{r'}$ die Bedingung (9) erfüllt ist. Setzt man nun die so gewählten $y_1^{(1)}, \ldots, y_{l_1-1}^{(1)}, \ldots, y_1^{(r')}, \ldots, y_{l_{r'}-1}^{(r')}$ in (14) ein, so ergibt sich die Behauptung des Hilfssatzes für hinreichend großes $x_1 \cdots x_{r'}$, etwa für $x_1 \cdots x_{r'} > X$. Durch geeignete Ausnutzung der Beziehung

$$F(x_1 |\eta_q^{(1)}|^{e_1}, \ldots, x_{r'} |\eta_q^{(r')}|^{e_{r'}}) = F(x_1, \ldots, x_{r'}), \qquad q = 1, \ldots, r,$$

erhält man die Behauptung auch für $x_1 \ldots x_{r'} \leqslant X$.

Korollar 3. *Die Funktionen $f(\gamma)$, $\Phi_{\mathfrak{m}}(s)$ mögen den Voraussetzungen von Hilfssatz 7 mit $z_0 < 1$ und $z_1 = 1$ genügen; ferner sei $f(\gamma) \geqslant 0$ für alle ganzen Zahlen $\gamma \in K$; darüber hinaus gelte: $\lambda(z_1 - z_0) \leqslant 1/2$. Die Funktion $\Phi_{\mathfrak{D}}(s)$ habe im Punkte $z_1 = 1$ einen Pol der Ordnung $P \geqslant 1$. Dann gilt in den Bezeichnungen von Hilfssatz 9 für $r' \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:*

$$F(x_1, \ldots, x_{r'}) = x_1 \cdots x_{r'} \frac{w_0}{R} \sum_{\varkappa=0}^{P-1} B_\varkappa (\log x_1 \cdots x_{r'})^\varkappa + O\Big((x_1 \cdots x_{r'})^{1-\frac{1-z_0}{r'-1}+\delta}\Big).$$

Bemerkung. Korollar 3 läßt sich aus Korollar 2 anstelle von Hilfssatz 7 herleiten.

4. Anwendungen. 4.1. Für $k \geqslant 2$, $\mathfrak{K}_\varkappa \in \mathfrak{H}$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, und für ganze Ideale $\mathfrak{a} \neq (0)$ sei

$$d_{\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k}(\mathfrak{a}) := \sum_{\substack{(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k) \\ \mathfrak{b}_\varkappa \in \mathfrak{K}_\varkappa,\, \varkappa=1,\ldots,k \\ \mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}}} 1, \qquad d_k(\mathfrak{a}) := \sum_{\substack{(\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_k) \\ \mathfrak{b}_1 \cdots \mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}}} 1.$$

Es ist also $d_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(\mathfrak{a})$ die Anzahl derjenigen Zerlegungen von $\mathfrak{a}$ in k Faktoren, in denen der $\varkappa$-te Faktor der Idealklasse $\mathfrak{K}_\varkappa$ angehört $(\varkappa = 1, \ldots, k)$, während $d_k(\mathfrak{a})$ die Anzahl aller Zerlegungen von $\mathfrak{a}$ in k Faktoren bezeichnet. Dabei werden auch solche Zerlegungen, die sich nur durch die Reihenfolge der Faktoren unterscheiden, als verschieden angesehen. Offenbar gilt:

$$d_k(\mathfrak{a}) = \sum_{\substack{(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)\\ \mathfrak{K}_\varkappa\in\mathfrak{H},\, \varkappa=1,\ldots,k}} d_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(\mathfrak{a}).$$

Wegen der eineindeutigen Zuordnung zwischen der Menge der ganzen Ideale von K und der Menge der von ganzen idealen Zahlen erzeugten Hauptideale gilt, falls (α') das dem Ideal $\mathfrak{a}$ zugeordnete Hauptideal und $\mathfrak{K}'$ die der Idealklasse $\mathfrak{K}$ zugeordnete Hauptidealklasse ist,

$$d_{\mathfrak{K}_1',\ldots,\mathfrak{K}_k'}(\alpha') := \sum_{\substack{((\beta_1'),\ldots,(\beta_k'))\\ (\beta_\varkappa')\in\mathfrak{K}_\varkappa',\, \varkappa=1,\ldots,k\\ (\beta_1'\cdots\beta_k')=(\alpha')}} 1 = d_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(\mathfrak{a}),$$

$$d_k(\alpha') := \sum_{\substack{((\beta_1'),\ldots,(\beta_k'))\\ (\beta_1'\cdots\beta_k')=(\alpha')}} 1 = d_k(\mathfrak{a}).$$

Bezeichnet $\mathfrak{K}_0$ die Hauptklasse von $\mathfrak{H}$, so sei für $k \geqslant 2$, $\mathfrak{K}_\varkappa \in \mathfrak{H}$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ mit $\mathfrak{K}_1\cdots\mathfrak{K}_k = \mathfrak{K}_0$ und für $\sigma > 1$

$$\Phi_{\mathfrak{m}}(s; \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k) := \sum_{\gamma}{}' \frac{d_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{g}(\gamma)\};$$

der durch den Strich am Summenzeichen ausgedrückten Summationsvorschrift und der Definition der Zahlen $e_p, e_p^{(q)}$ sollen in diesem § immer die durch (5) definierten Einheiten zugrunde liegen; das bedeutet insbesondere, daß in der obigen Reihe die Summation über ein volles System ganzer total positiver nicht assoziierter Zahlen aus K zu erstrecken ist.

Mit Hilfssatz 3 erhält man für die Funktionen $\Phi_{\mathfrak{m}}(s; \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k)$ für $\sigma > 1$ die Darstellung

$$\Phi_{\mathfrak{m}}(s; \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k) = \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} \sum_{t_{Q+2},\ldots,t_{r_1}=0,1} \prod_{\varkappa=1}^{k} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_\varkappa', \mathfrak{t}). \tag{15}$$

Hierzu ist wegen Hilfssatz 3 nur zu zeigen:

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_\varkappa', \mathfrak{t}) = \sum_{(\gamma)\in\mathfrak{K}_0'} \frac{d_{\mathfrak{K}_1',\ldots,\mathfrak{K}_k'}(\gamma)}{N(\gamma)^s} \lambda_{\mathfrak{m}}((\gamma), \mathfrak{t}). \tag{16}$$

Durch Induktion nach k läßt sich für beliebige Klassen $\mathfrak{K}_\varkappa' \in \mathfrak{H}'$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ zeigen:

$$\prod_{\varkappa=1}^{k} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_\varkappa', \mathfrak{t}) = \sum_{(\gamma')\in\mathfrak{K}_1'\cdots\mathfrak{K}_k'} \frac{d_{\mathfrak{K}_1',\ldots,\mathfrak{K}_k'}(\gamma')}{N(\gamma')^s} \lambda_{\mathfrak{m}}((\gamma'), \mathfrak{t});$$

speziell für $\mathfrak{K}_1'\cdots\mathfrak{K}_k' = \mathfrak{K}_0'$ folgt hieraus dann (16).

Aus (15) folgt mit Hilfssatz 6, daß die Funktionen $\Phi_{\mathfrak{m}}(s; \mathfrak{K}_1', \ldots, \mathfrak{K}_k')$ für $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{O}$ im Streifen S_ϱ, $0 < \varrho \leqslant 1/2$, der folgenden Ungleichung genügen:

$$|\Phi_{\mathfrak{m}}(s; \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k)| \leqslant c_1^k(\varrho) \Big\{\prod_{p=1}^{r'} |1 + s - iE_p(\mathfrak{m})|^{e_p}\Big\}^{\frac{k}{2}(1+\varrho-\sigma)};$$

für $|t| \geqslant t_0 > 0$ genügt auch die Funktion $\Phi_{\mathfrak{O}}(s; \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k)$ dieser Ungleichung. Ferner gilt, wie man durch Induktion nach k leicht sieht, für jedes $c > 0$:

$$d_k(\gamma) = O\big(N(\gamma)^c\big), \tag{17}$$

also auch $d_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(\gamma) = O\big(N(\gamma)^c\big)$; daher ist die Funktion $d_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(\gamma) \times \times N(\gamma)^{-c}$ für jedes $c > 0$ auf der Menge der von 0 verschiedenen ganzen Zahlen von K beschränkt.

Hieraus entnimmt man unter Beachtung von Hilfssatz 5(a), daß die Funktionen $\Phi_{\mathfrak{m}}(s; \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 mit $c_0 = z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $\lambda = k/2$, $c_2(\varrho) = c_1^k(\varrho)$ und $P = k$ erfüllen. Hilfssatz 9 liefert somit Teil (a) des folgenden Satzes, aus dem Teil (b) unmittelbar folgt.

Satz 3. *Für $k \geqslant 2$, $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_k \in \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{K}_1\cdots\mathfrak{K}_k = \mathfrak{K}_0$, für $r' \geqslant 2$ und $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ sei*

$$D_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} d_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(\gamma),$$

$$D_k(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} d_k(\gamma).$$

Dann gilt für $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ und für jedes $\delta > 0$:

$$\text{(a)}\quad D_{\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k}(x_1, \ldots, x_{r'}) = x_1\cdots x_{r'} \frac{w_0}{R} \sum_{\varkappa=0}^{k-1} B_{\varkappa,k}^{(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)} (\log x_1\cdots x_{r'})^\varkappa + O\Big((x_1\cdots x_{r'})^{1-\frac{1}{(k/2)r_1+kr_2+1}+\delta}\Big);$$

$$\text{(b)}\ D_k(x_1,\ldots,x_{r'}) = x_1\cdots x_{r'}\frac{w_0}{R}\sum_{\varkappa=0}^{k-1} B_{\varkappa,k}(\log x_1\cdots x_{r'})^{\varkappa} + \\ + O\left((x_1\cdots x_{r'})^{1-\frac{1}{\langle k/2\rangle r_1+kr_2+1}+\delta}\right).$$

Darin wurde

$$\langle y\rangle := \min\{g\in \boldsymbol{Z}\mid g\geqslant y\},$$

$$B_{\varkappa,k}^{(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)} := \frac{1}{\varkappa!}\sum_{\varrho=\varkappa+1}^{k}(-1)^{\varrho-1-\varkappa}\binom{r+\varrho-1-\varkappa}{r} A_{\varrho}^{(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)},$$

$$B_{\varkappa,k} := \sum_{\substack{(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)\\ \mathfrak{K}_1\cdots\mathfrak{K}_k=\mathfrak{K}_0}} B_{\varkappa,k}^{(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)}$$

gesetzt, die $A_{\varrho}^{(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)}$ *bezeichnen die Koeffizienten des Hauptteils der Laurent-Entwicklung von* $\Phi_{\mathfrak{D}}(s;\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)$ *um den Punkt* $s=1$ *und* R *den Regulator der Einheiten aus* (5). *Die höchsten Koeffizienten in* (a) *und* (b) *lauten mit* h *als Klassenzahl von* K

$$\frac{w_0}{R}B_{k-1,k}^{(\mathfrak{K}_1,\ldots,\mathfrak{K}_k)} = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R_0}{w|\sqrt{d}|}\right)^{k-1},$$

bzw.

$$\frac{w_0}{R}B_{k-1,k} = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R_0h}{w|\sqrt{d}|}\right)^{k-1}.$$

Beweis. In Hilfssatz 9 ist $l_p = \langle e_pk/2\rangle+1$, $p=1,\ldots,r'$, zu setzen, also gilt:

$$\sum_{p=1}^{r'}(l_p-1) = \sum_{p=1}^{r'}\langle e_pk/2\rangle = \langle k/2\rangle r_1+kr_2.$$

Bei der Berechnung der höchsten Koeffizienten wurde benutzt, daß für $r_1=0$ $w=w_0$ und $R=R_0$, für $r_1\geqslant 1$ $w=2w_0$ und $R=2^QR_0$, in jedem Falle also $2^{Q+1}w_0R_0/wR=1$ ist.

4.2. Für $r'\geqslant 2$, $x_1,\ldots,x_{r'}>0$ sei

$$L(x_1,\ldots,x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma\succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} \log N(\gamma).$$

Setzt man für $\sigma>1$

$$\Phi_{\mathfrak{m}}^{(L)}(s) := \sum_{\gamma}{}' \frac{\log N(\gamma)}{N(\gamma)^s}\exp\{\mathfrak{m}^T E\mathfrak{g}(\gamma)\},$$

so erhält man mit Hilfssatz 3 unmittelbar

$$(18)\qquad -\Phi_{\mathfrak{m}}^{(L)}(s) = \frac{1}{2^{r_1-Q-1}}\sum_{t_{Q+2},\ldots,t_{r_1}=0,1}\frac{d}{ds}\zeta_{\mathfrak{m}}(s,\mathfrak{K}_0',\mathfrak{t}).$$

Aus Hilfssatz 5 folgt:

Hilfssatz 10. *Für* $\mathfrak{m}$ *gemäß* (6), $\mathfrak{t}$ *gemäß* (7) *und* $\mathfrak{K}'\in\mathfrak{H}'$ *gilt:*

(a) $\zeta_{\mathfrak{m}}'(s,\mathfrak{K}',\mathfrak{t})$ *ist eine ganze transzendente Funktion, falls* $|\mathfrak{m}|^2+|\mathfrak{t}|^2>0$ *ist; die Funktion* $\zeta_{\mathfrak{D}}'(s,\mathfrak{K}',\mathfrak{D})$ *ist überall regulär mit Ausnahme des Punktes* $s=1$; *dort liegt ein zweifacher Pol vor mit dem Hauptteil*

$$-\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}R_0}{w|\sqrt{d}|}\frac{1}{(s-1)^2}.$$

(b) $\zeta_{\mathfrak{m}}'(s,\mathfrak{K}',\mathfrak{t})$ *genügt der Funktionalgleichung*

$$\zeta_{\mathfrak{m}}'(s,\mathfrak{K},\mathfrak{t}) = -W_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{t})\gamma_{-2\mathfrak{m}}A^{1-2s}\frac{\Gamma_{-\mathfrak{m}}(1-s,\mathfrak{t})}{\Gamma_{\mathfrak{m}}(s,\mathfrak{t})}\zeta_{-\mathfrak{m}}(1-s,\mathfrak{K}'^*,\mathfrak{t})\Big\{2\log A + \\ + \frac{\Gamma_{-\mathfrak{m}}'(1-s,\mathfrak{t})}{\Gamma_{-\mathfrak{m}}(1-s,\mathfrak{t})}+\frac{\Gamma_{\mathfrak{m}}'(s,\mathfrak{t})}{\Gamma_{\mathfrak{m}}(s,\mathfrak{t})}+\frac{\zeta_{-\mathfrak{m}}'(1-s,\mathfrak{K}'^*,\mathfrak{t})}{\zeta_{-\mathfrak{m}}(1-s,\mathfrak{K}'^*,\mathfrak{t})}\Big\}.$$

Unter Verwendung dieses Hilfssatzes erhält man die nachstehende Abschätzung für die Funktionen $\zeta_{\mathfrak{m}}'(s,\mathfrak{K}',\mathfrak{t})$, deren Beweis ähnlich verläuft wie die Beweise von Th. 4 und Th. 5 in [4].

Hilfssatz 11. *Für* $\mathfrak{m}$ *gemäß* (6), $\mathfrak{t}$ *gemäß* (7), $|\mathfrak{m}|^2+|\mathfrak{t}|^2>0$, $\mathfrak{K}'\in\mathfrak{H}'$, $0<\varrho\leqslant 1/2$ *gilt in* S_ϱ:

$$|\zeta_{\mathfrak{m}}'(s,\mathfrak{K}',\mathfrak{t})| \leqslant c_3(\varrho)\Big\{\prod_{p=1}^{r'}|1+s-iE_p(\mathfrak{m})|^{e_p}\Big\}^{\frac{3}{4}(1+\varrho-\sigma)};$$

für $|t|\geqslant t_0>0$ *genügt auch die Funktion* $\zeta_{\mathfrak{D}}(s,\mathfrak{K}',\mathfrak{D})$ *dieser Ungleichung.*

Aus Hilfssatz 11 und (18) entnimmt man unter Berücksichtigung von Hilfssatz 10(a), daß die Funktionen $\Phi_{\mathfrak{m}}^{(L)}(s)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 mit $c_0=z_0=0$, $z_1=1$, $\lambda=3/4$, $c_2(\varrho)=c_3(\varrho)$ und $P=2$ erfüllen. Hilfssatz 9 liefert somit:

Satz 4. *Für* $r'\geqslant 2$, $x_1,\ldots,x_{r'}>0$ *und für jedes* $\delta>0$ *gilt:*

$$L(x_1,\ldots,x_{r'}) \\ = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}(x_1\cdots x_{r'}\log x_1\cdots x_{r'}-r'x_1\cdots x_{r'})+O\left((x_1\cdots x_{r'})^{1-\frac{1}{n+1}+\delta}\right).$$

Beweis. Bei der Anwendung der Hilfssätze 9 und 10 und der Gleichung (18) ist zu beachten, daß der Hauptteil der Laurent-Entwicklung von $\Phi_{\mathfrak{D}}^{(L)}(s)$ um den Punkt $s=1$ mit demjenigen von $-2^{-r_1+Q+1}\frac{d}{ds}\zeta_{\mathfrak{D}}(s,\mathfrak{K}_0',\mathfrak{D})$ übereinstimmt und daß $2^{Q+1}w_0R_0/wR=1$ ist. Ferner ist wegen $l_p=\langle\frac{3}{4}e_p\rangle+1$, $p=1,\ldots,r'$,

$$\sum_{p=1}^{r'}(l_p-1) = \sum_{p=1}^{r'}\langle\tfrac{3}{4}e_p\rangle = r_1+2r_2 = n.$$

4.3. Für $\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}$, ganze Zahlen $\gamma \in K$, $r' \geqslant 2$ und $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ sei

$$\tau_{\mathfrak{K}}(\gamma) := \sum_{\substack{\mathfrak{a} \mid (\gamma) \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{K}}} N\mathfrak{a}, \qquad \tau(\gamma) := \sum_{\mathfrak{a} \mid (\gamma)} N\mathfrak{a}, \tag{19}$$

$$T^*_{\mathfrak{K}}(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} \frac{\tau_{\mathfrak{K}}(\gamma)}{N(\gamma)},$$

$$T^*(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} \frac{\tau(\gamma)}{N(\gamma)};$$

offenbar gilt

$$\tau(\gamma) = \sum_{\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}} \tau_{\mathfrak{K}}(\gamma), \qquad T^*(x_1, \ldots, x_{r'}) = \sum_{\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}} T^*_{\mathfrak{K}}(x_1, \ldots, x_{r'}).$$

Setzt man für $\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}, \sigma > 1$

$$\Phi^{(T^*)}_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}) := \sum_{\gamma}{}' \frac{\tau_{\mathfrak{K}}(\gamma)}{N(\gamma)^{s+1}} \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{g}(\gamma)\},$$

so folgt aus Hilfssatz 3:

$$\Phi^{(T^*)}_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}) = \frac{1}{2^{r_1 - Q - 1}} \sum_{t_{Q+2}, \ldots, t_{r_1} = 0,1} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t}) \zeta_{\mathfrak{m}}(s+1, \mathfrak{K}'^{-1}, \mathfrak{t}). \tag{20}$$

Da ferner für jedes $c > 0$

$$\tau_{\mathfrak{K}}(\gamma) \leqslant N(\gamma) \sum_{\mathfrak{a} \mid (\gamma)} 1 = N(\gamma) d_2(\gamma) = O\big(N(\gamma)^{c+1}\big) \tag{21}$$

gilt, ist die Funktion $\tau_{\mathfrak{K}}(\gamma) N(\gamma)^{-(c+1)}$ für jedes $c > 0$ beschränkt. Somit folgt aus (20) und Hilfssatz 6 unter Beachtung von Hilfssatz 5(a), daß die Funktionen $\Phi^{(T^*)}_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K})$ die Voraussetzungen von Korollar 3 mit $c_0 = z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $\lambda = 1/2$, $c_2(\varrho) = c_1(\varrho) \zeta_K(1 + 2\varrho)$ und $P = 1$ erfüllen. Aus Korollar 3, Hilfssatz 5(a) und (20) erhält man nun, da das Residuum von $\Phi^{(T^*)}_{\mathfrak{D}}(s, \mathfrak{K})$ im Punkte $s = 1$ mit dem von $2^{-r_1+Q+1} \zeta_{\mathfrak{D}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{D}) \times \zeta_{\mathfrak{D}}(s+1, \mathfrak{K}'^{-1}, \mathfrak{D})$ übereinstimmt und da $2^{Q+1} w_0 R_0 / wR = 1$ ist, den nachstehenden Satz.

Satz 5. *Für $\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}$, $r' \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ und für jedes $\delta > 0$ gilt:*

(a) $$T^*_{\mathfrak{K}}(x_1, \ldots, x_{r'}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \zeta_{\mathfrak{D}}(2, \mathfrak{K}'^{-1}, \mathfrak{D}) x_1 \cdots x_{r'} + O\Big((x_1 \cdots x_{r'})^{1 - \frac{1}{r'+1} + \delta}\Big);$$

(b) $$T^*(x_1, \ldots, x_{r'}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \zeta_K(2) x_1 \cdots x_{r'} + O\Big((x_1 \cdots x_{r'})^{1 - \frac{1}{r'+1} + \delta}\Big).$$

4.4. Für $r' \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ und $\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}$ sei

$$T_{\mathfrak{K}}(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} \tau_{\mathfrak{K}}(\gamma),$$

$$T(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0 < |\gamma^{(h)}|^{e_h} < x_h}} \tau(\gamma)$$

mit $\tau_{\mathfrak{K}}(\gamma)$, $\tau(\gamma)$ aus (19). Offenbar ist

$$T(x_1, \ldots, x_{r'}) = \sum_{\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}} T_{\mathfrak{K}}(x_1, \ldots, x_{r'}).$$

Setzt man für $\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}$, $\sigma > 2$

$$\Phi^{(T)}_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}) := \sum_{\gamma}{}' \frac{\tau_{\mathfrak{K}}(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{g}(\gamma)\},$$

so folgt aus Hilfssatz 3:

$$\Phi^{(T)}_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}) = \frac{1}{2^{r_1 - Q - 1}} \sum_{t_{Q+2}, \ldots, t_{r_1} = 0,1} \zeta_{\mathfrak{m}}(s-1, \mathfrak{K}', \mathfrak{t}) \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}'^{-1}, \mathfrak{t}). \tag{22}$$

Aus Hilfssatz 6 folgt, daß die Funktionen $\zeta_{\mathfrak{m}}(s-1, \hat{\mathfrak{K}}, \mathfrak{t})$ für $|\mathfrak{m}|^2 + |\mathfrak{t}|^2 > 0$ im Streifen $1 - \varrho \leqslant \sigma \leqslant 2 + \varrho$ mit $0 < \varrho \leqslant 1/2$ der folgenden Ungleichung genügen:

$$|\zeta_{\mathfrak{m}}(s-1, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})| \leqslant c_1(\varrho) \Big\{\prod_{p=1}^{r'} |s - iE_p(\mathfrak{m})|^{e_p}\Big\}^{(2+\varrho-\sigma)/2}$$
$$\leqslant c_1(\varrho) \Big\{\prod_{p=1}^{r'} |1 + s - iE_p(\mathfrak{m})|^{e_p}\Big\}^{(2+\varrho-\sigma)/2};$$

für $|t| \geqslant t_0 > 0$ genügt auch die Funktion $\zeta_{\mathfrak{D}}(s-1, \mathfrak{K}', \mathfrak{D})$ dieser Ungleichung. Hieraus entnimmt man unter Beachtung von Hilfssatz 5(a), (21) und (22), daß die Funktionen $\Phi^{(T)}_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K})$ die Voraussetzungen von Korollar 2 mit $c_0 = z_0 = 1$, $z_1 = 2$, $\lambda = 1/2$ und $c_2(\varrho) = c_1(\varrho) \zeta_K(1 + 2\varrho)$ erfüllen. Aus Korollar 2 folgt somit für $y^{(1)}, \ldots, y^{(r')} > 0$, $x_1 \cdots x_{r'} \geqslant 1$ und jedes $\delta > 0$:

$$\int_0^{y^{(r')}} \cdots \int_0^{y^{(1)}} T_{\mathfrak{K}}(x_1 + v^{(1)}, \ldots, x_{r'} + v^{(r')}) \, dv^{(1)} \cdots dv^{(r')}$$
$$= \frac{w_0}{R} \operatorname*{Res}_{s=2} \Phi^{(T)}_{\mathfrak{D}}(s, \mathfrak{K}) \prod_{p=1}^{r'} \frac{(x_p + y^{(p)})^{s+1} - x_p^{s+1}}{s(s+1)} + O\Big(\Big\{\prod_{p=1}^{r'} (x_p + y^{(p)})\Big\}^{2+\delta}\Big).$$

Nach Anwendung der Hilfssätze 8(a) und 5(a) erhält man unter Berücksichtigung von $2^{Q+1}w_0R_0/wR = 1$:

$$(23)\quad \int_0^{y^{(r')}} \cdots \int_0^{y^{(1)}} T_{\mathfrak{K}}(x_1+v^{(1)},\dots,x_{r'}+v^{(r')})\,dv^{(1)}\cdots dv^{(r')}$$
$$= \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}\zeta_{\mathfrak{D}}(2,\mathfrak{K}'^{-1},\mathfrak{D})\prod_{p=1}^{r'}\int_0^{y^{(p)}}\int_0^{x_p+v^{(p)}} u^{(p)}\,du^{(p)}\,dv^{(p)}+$$
$$+O\Big(\Big\{\prod_{p=1}^{r'}(x_p+y^{(p)})\Big\}^{2+\delta}\Big).$$

Im Folgenden sei stets

$$(24)\quad y^{(p)}\leqslant x_p,\qquad p=1,\dots,r',$$

vorausgesetzt. Wegen der Monotonie von $T_{\mathfrak{K}}(x_1,\dots,x_{r'})$ in allen Variablen gilt:

$$(25)\quad \int_0^{y^{(r')}} \cdots \int_0^{y^{(1)}} T_{\mathfrak{K}}(x_1+v^{(1)}-y^{(1)},\dots,x_{r'}+v^{(r')}-y^{(r')})\,dv^{(1)}\cdots dv^{(r')}$$
$$\leqslant y^{(1)}\cdots y^{(r')}T_{\mathfrak{K}}(x_1,\dots,x_{r'})$$
$$\leqslant \int_0^{y^{(r')}} \cdots \int_0^{y^{(1)}} T_{\mathfrak{K}}(x_1+v^{(1)},\dots,x_{r'}+v^{(r')})\,dv^{(1)}\cdots dv^{(r')}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{y^{(1)}\cdots y^{(r')}}\prod_{p=1}^{r'}\int_0^{y^{(p)}}\int_0^{x_p+v^{(p)}} u^{(p)}\,du^{(p)}\,dv^{(p)}$$
$$=\frac{1}{2^{r'}}(x_1\cdots x_{r'})^2+O\Big((x_1\cdots x_{r'})^2\sum_{p=1}^{r'}\frac{y^{(p)}}{x_p}\Big),$$

also mit (23)

$$\frac{1}{y^{(1)}\cdots y^{(r')}}\int_0^{y^{(r')}} \cdots \int_0^{y^{(1)}} T_{\mathfrak{K}}(x_1+v^{(1)},\dots,x_{r'}+v^{(r')})\,dv^{(1)}\cdots dv^{(r')}$$
$$=\frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}2^{-r'}\zeta_{\mathfrak{D}}(2,\mathfrak{K}'^{-1},\mathfrak{D})(x_1\cdots x_{r'})^2+O\Big((x_1\cdots x_{r'})^2\sum_{p=1}^{r'}\frac{y^{(p)}}{x_p}\Big)+$$
$$+O\Big(\frac{(x_1\cdots x_{r'})^{2+\delta}}{y^{(1)}\cdots y^{(r')}}\Big);$$

analoge Überlegungen ergeben eine entsprechende Beziehung für die linke Seite von (25). Somit erhält man aus (25):

$$T_{\mathfrak{K}}(x_1,\dots,x_{r'})=\frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}2^{-r'}\zeta_{\mathfrak{D}}(2,\mathfrak{K}'^{-1},\mathfrak{D})(x_1\cdots x_{r'})^2+$$
$$+O\Big((x_1\cdots x_{r'})^2\sum_{p=1}^{r'}\frac{y^{(p)}}{x_p}\Big)+O\Big(\frac{(x_1\cdots x_{r'})^{2+\delta}}{y^{(1)}\cdots y^{(r')}}\Big).$$

Das günstigste Ergebnis erzielt man mit

$$y^{(1)}x_1^{-1}=\dots=y^{(r')}x_{r'}^{-1}=(x_1\cdots x_{r'})^{-1/(r'+1)};$$

diese Wahl ist möglich, da für $x_1\cdots x_{r'}\geqslant 1$ die Bedingung (24) erfüllt ist. Setzt man die so gewählten $y^{(1)},\dots,y^{(r')}$ ein, so erhält man:

SATZ 6. *Für* $\mathfrak{K}\in\mathfrak{H}$, $r'\geqslant 2$, $x_1,\dots,x_{r'}>0$ *und für jedes* $\delta>0$ *gilt*:

$$\text{(a)}\quad T_{\mathfrak{K}}(x_1,\dots,x_{r'})=\frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}2^{-r'}\zeta_{\mathfrak{D}}(2,\mathfrak{K}'^{-1},\mathfrak{D})(x_1\cdots x_{r'})^2+$$
$$+O\Big((x_1\cdots x_{r'})^{2-\frac{1}{r'+1}+\delta}\Big);$$

$$\text{(b)}\quad T(x_1,\dots,x_{r'})=\frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}2^{-r'}\zeta_K(2)(x_1\cdots x_{r'})^2+O\Big((x_1\cdots x_{r'})^{2-\frac{1}{r'+1}+\delta}\Big).$$

4.5. Als nächstes soll die für $r'\geqslant 2$, $x_1,\dots,x_{r'}>0$ durch

$$D^{(2)}(x_1,\dots,x_{r'}):=\sum_{\substack{\gamma\succ 0\\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} d^2(\gamma)$$

definierte Summe behandelt werden; darin ist $d(\alpha'):=d_2(\alpha')$ wie in 4.1 Setzt man für $\mathfrak{m}$ gemäß (6), $\mathfrak{t}$ gemäß (7), $\mathfrak{K}'\in\mathfrak{H}'$ und $\sigma>1$

$$M_{\mathfrak{m}}(s,\mathfrak{K}',\mathfrak{t}):=\sum_{(\alpha')\in\mathfrak{K}'}\frac{\mu^2(\alpha')}{N(\alpha')^s}\lambda_{\mathfrak{m}}\big((\alpha'),\mathfrak{t}\big),$$

worin $\mu(\alpha')$ die Moebiussche Funktion bezeichnet, so gilt:

$$(26)\quad \sum_{(\gamma)\in\mathfrak{K}_0'}\frac{d^2(\gamma)}{N(\gamma)^s}\lambda_{\mathfrak{m}}\big((\gamma),\mathfrak{t}\big)$$
$$=\sum_{\substack{(\mathfrak{K}_1',\dots,\mathfrak{K}_4')\\ \mathfrak{K}_1'\cdots\mathfrak{K}_4'=\mathfrak{K}_0'}}\zeta_{\mathfrak{m}}(s,\mathfrak{K}_1',\mathfrak{t})\,\zeta_{\mathfrak{m}}(s,\mathfrak{K}_2',\mathfrak{t})\,\zeta_{\mathfrak{m}}(s,\mathfrak{K}_3',\mathfrak{t})\,M_{\mathfrak{m}}(s,\mathfrak{K}_4',\mathfrak{t});$$

dies sieht man durch einfache Rechnung unter Verwendung der Identität

$$\sum_{(\alpha')|(\gamma)}d_2(\alpha')\mu^2\Big(\frac{\gamma}{\alpha'}\Big)=d^2(\gamma).$$

Für die Funktionen $M_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})$ gilt:

Hilfssatz 12. *Für* $\mathfrak{m}$ *gemäß* (6) *und* $\mathfrak{t}$ *gemäß* (7) *ist mit* h *als Klassenzahl von* K

$$M_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_l', \mathfrak{t}) = \frac{\Delta_{\mathfrak{m}}^{(l)}(s, \mathfrak{t})}{\Delta_{\mathfrak{m}}(s)}, \qquad l = 0, \ldots, h-1,$$

mit

$$\Delta_{\mathfrak{m}}^{(l)}(s, \mathfrak{t}) := \det \begin{bmatrix} Z_{\mathfrak{m}}^{(0,0)}(s) & \ldots & Z_{\mathfrak{m}}^{(0,l-1)}(s) & \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_0', \mathfrak{t}) & Z_{\mathfrak{m}}^{(0,l+1)}(s) & \ldots & Z_{\mathfrak{m}}^{(0,h-1)}(s) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Z_{\mathfrak{m}}^{(h-1,0)}(s) & \ldots & Z_{\mathfrak{m}}^{(h-1,l-1)}(s) & \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_{h-1}', \mathfrak{t}) & Z_{\mathfrak{m}}^{(h-1,l+1)}(s) & \ldots & Z_{\mathfrak{m}}^{(h-1,h-1)}(s) \end{bmatrix},$$

$$\Delta_{\mathfrak{m}}(s) := \det\big(Z_{\mathfrak{m}}^{(k,l)}(s)\big)_{k,l=0,\ldots,h-1},$$

$$Z_{\mathfrak{m}}^{(k,l)}(s) := \sum_{\substack{\mathfrak{K}' \\ \mathfrak{K}_l' \cdot \mathfrak{K}'^2 = \mathfrak{K}_k'}} \zeta_{2\mathfrak{m}}(2s, \mathfrak{K}', \mathfrak{D}).$$

Beweis. Wegen $\lambda_{\mathfrak{m}}\big((\beta')^2, \mathfrak{t}\big) = \lambda_{\mathfrak{m}}\big((\beta'), \mathfrak{t}\big)^2 = \lambda_{2\mathfrak{m}}\big((\beta'), \mathfrak{D}\big)$ gilt, wie man durch einfache Rechnung sieht,

$$\sum_{l=0}^{h-1} M_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_l', \mathfrak{t}) Z_{\mathfrak{m}}^{(k,l)}(s) = \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_k', \mathfrak{t}), \qquad k = 0, \ldots, h-1;$$

Anwendung der Cramerschen Regel auf dieses lineare Gleichungssystem liefert die Behauptung.

Bemerkung. Hilfssatz 12 liefert zusammen mit Hilfssatz 5 die analytische Fortsetzung der Funktionen $M_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})$ in die ganze komplexe Zahlenebene. Da das analytische Verhalten dieser Funktionen im allgemeinen jedoch etwas unübersichtlich ist, soll im Folgenden, soweit nichts anderes gesagt ist, stets vorausgesetzt werden, daß der Körper K der folgenden Bedingung genügt:

$(K\mathfrak{H})$ die Idealklassengruppe $\mathfrak{H}$ von K ist das direkte Produkt von Gruppen der Ordnung 2.

Mit

$$\zeta_{\mathfrak{m}}(s) := \sum_{(\alpha') \neq (0)} \frac{\lambda_{\mathfrak{m}}\big((\alpha'), \mathfrak{D}\big)}{N(\alpha')^s}$$

gilt unter der Voraussetzung $(K\mathfrak{H})$ offenbar $Z^{(k,l)}(s) = \delta_{k,l}\zeta_{2\mathfrak{m}}(2s)$, $k, l = 0, \ldots, h-1$, woraus folgt: $\Delta_{\mathfrak{m}}(s) = \zeta_{2\mathfrak{m}}^h(2s)$, $\Delta_{\mathfrak{m}}^{(l)}(s, \mathfrak{t}) = \zeta_{2\mathfrak{m}}^{h-1}(2s) \times \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_l', \mathfrak{t})$, $l = 0, \ldots, h-1$, und

$$M_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t}) = \frac{\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', \mathfrak{t})}{\zeta_{2\mathfrak{m}}(2s)}, \qquad \mathfrak{K}' \in \mathfrak{H}'. \tag{27}$$

Setzt man für $\sigma > 1$

$$\Phi_{\mathfrak{m}}^{(2)}(s) := \sum_{\gamma}{}' \frac{d^2(\gamma)}{N(\gamma)^s} \exp\{\mathfrak{m}^T E \mathfrak{g}(\gamma)\},$$

so folgt unter der Voraussetzung $(K\mathfrak{H})$ aus Hilfssatz 3, (26) und (27)

$$\Phi_{\mathfrak{m}}^{(2)}(s) = \frac{1}{2^{r_1-Q-1}} \frac{1}{\zeta_{2\mathfrak{m}}(2s)} \times \\ \times \sum_{t_{Q+2}, \ldots, t_{r_1} = 0,1} \; \sum_{\substack{(\mathfrak{K}_1', \ldots, \mathfrak{K}_4') \\ \mathfrak{K}_1' \cdots \mathfrak{K}_4' = \mathfrak{K}_0'}} \prod_{j=1}^{4} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}_j', \mathfrak{t}). \tag{28}$$

Wegen

$$\left|\frac{1}{\zeta_{2\mathfrak{m}}(2s)}\right| = \left|\exp\left\{\log \frac{1}{\zeta_{2\mathfrak{m}}(2s)}\right\}\right| \leqslant \exp\left\{\left|\log \frac{1}{\zeta_{2\mathfrak{m}}(2s)}\right|\right\} \leqslant \exp\{2\zeta_K(1+4\varrho)\}$$

für $\sigma \geqslant 1/2 + 2\varrho$ entnimmt man aus (28) und (17) mit den Hilfssätzen 5(a und 6, daß die Funktionen $\Phi_{\mathfrak{m}}^{(2)}(s)$ die Voraussetzungen von Hilfssatz 9 mit $c_0 = 0$, $z_0 = 1/2$, $z_1 = 1$, $\lambda = 2$, $c_2(\varrho) = c_1^4(\varrho)\exp\{2\zeta_K(1+4\varrho)\}$ und $P = 4$ erfüllen. Hilfssatz 9 liefert daher:

Satz 7. *Unter der Voraussetzung* $(K\mathfrak{H})$ *gilt für* $r' \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ *und für jedes* $\delta > 0$:

$$D^{(2)}(x_1, \ldots, x_{r'}) = x_1 \cdots x_{r'} \frac{w_0}{R} \sum_{\varkappa=0}^{3} B_{\varkappa}^{(2)} (\log x_1 \cdots x_{r'})^{\varkappa} + \\ + O\Big((x_1 \cdots x_{r'})^{1 - \frac{1}{2(n+1)} + \delta}\Big)$$

mit

$$B_{\varkappa}^{(2)} := \frac{1}{\varkappa!} \sum_{\varrho=\varkappa+1}^{4} (-1)^{\varrho-1-\varkappa} \binom{r+\varrho-1-\varkappa}{r} A_{\varrho}^{(2)},$$

worin die $A_{\varrho}^{(2)}$ *die Koeffizienten des Hauptteils der Laurent-Entwicklung von* $\Phi_{\mathfrak{D}}^{(2)}(s)$ *um den Punkt* $s = 1$ *bezeichnen. Der höchste Koeffizient lautet:*

$$\frac{w_0}{R} B_3^{(2)} = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|} \frac{1}{6\zeta_K(2)} \left(\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} R_0 h}{w|\sqrt{d}|}\right)^3.$$

Beweis. In Hilfssatz 9 ist $l_p = \langle e_p \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \rangle + 1$, $p = 1, \ldots, r'$, zu setzen, also

$$\sum_{p=1}^{r'} (l_p - 1) = \sum_{p=1}^{r'} e_p = n.$$

Bemerkung. Man kann die Funktionen $M_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}', t)$ aus (27) verwenden, um mit den hier dargestellten Methoden eine asymptotische Beziehung für die Summe

$$M(x_1, \ldots, x_{r'}) := \sum_{\substack{\gamma \succ 0 \\ 0<|\gamma^{(h)}|^{e_h}<x_h}} \mu^2(\gamma)$$

herzuleiten. Auf diesem Wege erhält man unter der Voraussetzung $(K\mathfrak{H})$ für $r' \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ und jedes $\delta > 0$:

$$(29)\quad M(x_1, \ldots, x_{r'}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}\,|}\frac{1}{\zeta_K(2)} x_1 \cdots x_{r'} + O\left((x_1 \cdots x_{r'})^{1-\frac{1}{2(r'+1)}+\delta}\right).$$

Ein Satz von Rieger ([5], Hilfssatz 10) gestattet es jedoch, auf elementare Weise die im nachstehenden Satz formulierte asymptotische Beziehung für $M(x_1, \ldots, x_{r'})$ zu beweisen, die in beliebigen Zahlkörpern (ohne die einschränkende Voraussetzung $(K\mathfrak{H})$) gültig ist und in der das Restglied offensichtlich besser ist als das in (29) angegebene. Bei den anderen in diesem § behandelten Funktionen liefert dieses Ergebnis von Rieger allerdings, soweit überhaupt anwendbar, durchweg schlechtere Restglieder.

Satz 8. *Für $r' \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_{r'} > 0$ gilt:*

$$M(x_1, \ldots, x_{r'}) = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}\frac{1}{\zeta_K(2)} x_1 \cdots x_{r'} + O\left((x_1 \cdots x_{r'})^{1-1/n}\right).$$

Beweis. Satz 8 folgt aus [5], Hilfssatz 10 durch elementare Rechnung unter Verwendung der Identität

$$\mu^2(\gamma) = \sum_{\mathfrak{a}^2|(\gamma)} \mu(\mathfrak{a}).$$

Literaturverzeichnis

[1] E. Hecke, *Über die L-Funktionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper*, Göttinger Nachrichten 1917, S. 299–318.

[2] — *Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen* (Zweite Mitteilung), Math. Zeitschr. 6 (1920), S. 11–51.

[3] E. Landau, *Über Ideale und Primideale in Idealklassen*, ibid. 2 (1918), S. 52–154.

[4] H. Rademacher, *On the Phragmén-Lindelöf theorem and some applications*, ibid. 72 (1959), S. 192–204.

[5] G. J. Rieger, *Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper, III.*, J. Reine Angew. Math. 208 (1961), S. 79–90.

[6] W. Schaal, *On the expression of a number as the sum of two squares in totally real algebraic number fields*, Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965), S. 529–537.

[7] C. L. Siegel, *Mittelwerte arithmetischer Funktionen in Zahlkörpern*, Trans. Amer. Math. Soc. 39 (1936), S. 219–224.

FACHBEREICH MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT MARBURG
3550 Marburg

Eingegangen am 23. 1. 1978 (1032)