## Conspectus materiae tomi XXXVIII, fasciculi 1




La revue est consacrée à la Théorie des Nombres
The journal publishes papers on the Theory of Numbers
Die Zeitschrift veröffentlicht Arbeiten aus der Zahlentheorie
Журнал посвящен теории чисел

L'adresse de la Rédaction et de l'échange
Address of the Editorial Board and of the exchange
Die Adresse der Schriftleitung und des Austausches
Адрес редакции и книгообмена

ACTA ARITHMETICA
**ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa**

Les auteurs sont priés d'envoyer leurs manuscrits en deux exemplaires
The authors are requested to submit papers in two copies
Die Autoren sind gebeten um Zusendung von 2 Exemplaren jeder Arbeit
Рукописи статей редакция просит предлагать в двух экземплярах





ISBN 83-01-01333-8 ISSN 0065-1036

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A D R U K A R N I A N A U K O W A



ACTA ARITHMETICA
XXXVIII (1980)


# Lois de répartition des diviseurs, 2


par

GÉRALD TENENBAUM* (Talence)


**1. Introduction.** Dans un précédent travail [4], Deshouillers, Dress et l'Auteur ont montré que la loi de répartition des logarithmes des diviseurs d'un entier est, en moyenne, la loi de l'arc sinus. Plus précisément, si on définit pour chaque entier $n$ une variable aléatoire $D_n$ prenant les valeurs $\dfrac{\log d}{\log n}$, où $d$ parcourt l'ensemble des diviseurs de $n$, avec égale probabilité $1/d(n)$, nous avons montré que pour tout $\alpha \in [0, 1]$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \operatorname{Prob}(D_n \leqslant \alpha) = \frac{2}{\pi} \arcsin\sqrt{\alpha}.$$

On voit sans peine que la suite $(D_n)_{n\in N}$ n'admet pas de loi limite; on peut cependant se demander s'il existe une suite de densité positive $\mathscr{A}$ telle que la suite $(D_n)_{n\in\mathscr{A}}$ possède une loi de probabilité limite. Nous montrons que la réponse à cette question est négative.

THÉORÈME A. *La variable aléatoire $D_n$ étant définie pour chaque entier $n$ comme ci-dessus, soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $[0, 1]$ et soit $\mathscr{A}$ une suite d'entiers naturels telle que la suite $(D_n)_{n\in\mathscr{A}}$ ait $\mu$ pour loi limite. Alors la densité naturelle de la suite $\mathscr{A}$ est nulle.*

Ce théorème montre qu'il est inutile de tenter de préciser la loi de répartition des diviseurs en étudiant directement les variables $D_n$. Une autre approche du problème consiste à étudier non plus la „proportion" des diviseurs de $n$ qui sont dans l'intervalle $[n^\alpha, n^\beta[$ mais la densité de la suite des nombres $n$ ayant dans cet intervalle un nombre $k$, fixé, de diviseurs. Nous nous intéresserons ici au cas $k = 0$. L'existence de la densité des entiers ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[n^\alpha, n^\beta[$ n'est pas prouvée directement: nous la déduirons de l'étude de la densité des entiers ayant $k$ facteurs premiers dans un intervalle du type $[n^\alpha, n^\beta[$ (voir théorème C) au moyen des deux idées suivantes:

1. si la densité existe, c'est une fonction continue de $(\alpha, \beta)$ dans $]0, 1[^2$;

* Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

2. si un nombre $n$ a au moins un diviseur $d$ dans $[n^{\alpha}, n^{\beta}[$, avec $\alpha > 0$, alors on peut „presque toujours" choisir $d$ avec seulement de „grands" facteurs premiers. Nous verrons que certains calculs sont simplifiés lorsque les paramètres $(\alpha, \beta)$ sont remplacés par $t = 1/\beta$ et $\lambda = \alpha/\beta$. A cause de la symétrie autour de $\sqrt{n}$ des diviseurs de $n$, on pourra toujours supposer $t \geqslant 2$ ou $t \leqslant 2$, de plus lorsque $\lambda/t \leqslant 1/2 \leqslant 1/t$ on pourra toujours se ramener au cas $t = 2$.

L'essentiel de nos résultat sur cet aspect de la répartition des diviseurs est résumé dans le théorème B ci-dessous. Nous noterons pour $x$ réel:

$$\mathscr{D}_x = [0, 1] \times [x, \infty[,$$
$$\mathscr{D}'_x = [0, 1] \times ]x, \infty[,$$
$$\mathscr{D}''_x = ]0, 1] \times [x, \infty[.$$

THÉORÈME B. *Pour tout couple $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_1$ la suite des entiers $n$ ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ possède une densité $h(\lambda, t)$ qui est une fonction continue de $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_1 \backslash \{(1, 1)\}$ et vérifie les propriétés suivantes:*

(i) *Pour* $\lambda \in [0, 4/5]$ *on a:*

$$h(\lambda, 2) = 1 - \log \frac{1}{2-\lambda} - \iint_{\Delta} \log \frac{1-u-v}{v} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}$$

*où $\Delta$ est le domaine de $\boldsymbol{R}^2$ défini par*

$$\Delta = \begin{cases} \emptyset & si \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 2/3, \\ \{(u, v):\ 1-\lambda/2-v \leqslant u \leqslant \min(v, 1-2v)\} & si \quad 2/3 < \lambda \leqslant 4/5. \end{cases}$$

(ii) *Pour* $(\lambda, t) \in \mathscr{D}''_2$ *on a*

$$h(\lambda, t) \leqslant 6\,(1-\lambda)^{\delta}$$

*où* $\delta = 1 - \dfrac{\log (e \log 2)}{\log 2} = 0.0860\ldots$

(iii) *Pour* $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_1$ *on a*

$$h(\lambda, t) \geqslant \frac{2}{\pi}\left[\arcsin \frac{1}{\sqrt{t}} - \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{t}}\right].$$

Comme nous l'avons dit plus haut, la démonstration de ces résultats est liée à l'étude de la répartition des facteurs premiers, qui est „souvent beaucoup plus facile que celle des diviseurs" et comporte une importante bibliographie dont nous avons reproduit en fin d'article une partie assez complète. Les expressions explicites des densités étudiées sont peu maniables; cependant, en les considérant comme des fonctions de $\lambda$ et $t$ on peut



montrer qu'elles satisfont certaines relations fonctionnelles et en déduire des encadrements assez fins.

Dans le théorème C, ci-dessous, $f_k(\lambda, t)$ (resp. $f_k^*(\lambda, t)$) désigne, sous condition d'existence, la densité des entiers $n$ ayant exactement (resp. au moins) $k$ facteurs premiers dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$; $\psi_k(x, y, z)$ désigne le nombre des entiers moindres que $x$ qui ont exactement $k$ facteurs premiers dans l'intervalle $[y, z[$. Dans tous les cas les facteurs premiers sont comptés avec leur ordre de multiplicité. On pose:

$$\sigma := e^{\gamma}, \quad \text{où } \gamma \text{ est la constante d'Euler.}$$

Enfin, $\Gamma$ désigne la fonction eulérienne.

Le théorème C exprime qu'*en moyenne* le nombre des diviseurs premiers de $n$ dans $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ est une variable aléatoire qui suit approximativement une loi de Poisson de paramètre $\log 1/\lambda$.

THÉORÈME C. *Avec les notations précédentes, les densités $f_k(\lambda, t)$ et $f_k^*(\lambda, t)$ existent pour tout entier naturel $k$ et tout couple $(\lambda, t)$ de $\mathscr{D}_0$. On a de plus les propriétés suivantes:*

(i) *Pour* $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_0$

$$f_0(\lambda, t) = 1 - \int_{\lambda}^{1} f_0(u, t-u) \frac{du}{u};$$

(ii) *Pour* $k \in \boldsymbol{N}$ *et* $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_0$

$$f_{k+1}(\lambda, t) = \frac{1}{k+1} \int_{\lambda}^{1} f_k(\lambda, t-u) \frac{du}{u};$$

(iii) *Pour* $k \in \boldsymbol{N}$ *et* $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_{k+1}$

$$f_k(\lambda, t) = \lambda \frac{\log^k 1/\lambda}{k!}\left(1 + \frac{a_k(\lambda, t)}{\Gamma(t-k)}\right)$$

*avec* $|a_k(\lambda, t)| \leqslant 2$;

(iv) *Pour tout* $(\lambda, t) \in \mathscr{D}'_1$

$$f_k^*(\lambda, t) \leqslant \sigma \frac{t-1}{t} \lambda \sum_{m \geqslant k} \frac{1}{m!} \log^m t/\lambda(t-1);$$

(v) *Pour* $k \in \boldsymbol{N}$ *et* $(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3$ *tel que* $e \leqslant y \leqslant z \leqslant x$ *et* $\log x \leqslant \log^2 y$

$$\psi_k(x, y, z) = x f_k\left(\frac{\log y}{\log z}, \frac{\log x}{\log z}\right) + O\left(\frac{x}{\log y} \frac{\log^k(\log z/\log y)}{k!}\right) + O\left(x e^{-c\sqrt{\log y}}\right)$$

*où les constantes impliquées par les symboles $O$ sont absolues.*

Notations. Nous utiliserons indifféremment les symboles $O$ de Landau et $\ll$ de Vinogradov.

Si $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$ désignent des suites d'entiers nous noterons $A(x), B(x), \ldots$ le nombre des entiers de $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \ldots$ qui sont moindres que $x$ et $d(\mathscr{A})$, $d(\mathscr{B}), \ldots$ (resp. $\bar{d}(\mathscr{A}), \bar{d}(\mathscr{B}), \ldots$) les densités naturelles (resp. densités naturelles supérieures) des suites considérées — sous condition d'existence.

Les lettres $p, p'$ désigneront toujours des nombres premiers; on écrira:

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Dans tout cet article, $u \mapsto \varrho(u)$ désignera la fonction introduite par Dickmann [5] et définie par:

$$\begin{cases} \varrho(u) = 1 & \text{pour } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ \varrho \quad \text{continue à droite en } u = 1, & \\ u\varrho'(u) + \varrho(u-1) = 0 & \text{pour } u > 1. \end{cases}$$

Nous prolongerons $\varrho$ par 0 pour $u < 0$; pour $u \geqslant 0$, $\varrho(u)$ est la densité des entiers $n$ dont le plus grand facteur premier est moindre que $n^{1/u}$. On a [1]:

$$\int_0^\infty \varrho(u)\, du = \sigma = e^\gamma = 1.7810\ldots$$

## 2. Etude de la répartition des facteurs premiers

**2.1.** Commençons par montrer l'existence des densités $f_k(\lambda, t)$ et la relation (i) du théorème C. Désignons par $f_k(x, \lambda, t)$ (resp. $\tilde{f}_k(x, \lambda, t)$) le nombre des entiers $n \leqslant x$ qui ont exactement $k$ facteurs premiers dans l'intervalle $[x^{\lambda/t}, x^{1/t}[$ (resp. $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$); une démonstration analogue à celle du lemme 7 ci-dessous montrerait que

$$|f_k(x, \lambda, t) - \tilde{f}_k(x, \lambda, t)| = o(x).$$

Il suffit donc d'étudier les quantités

$$\frac{1}{x} f_k(x, \lambda, t)$$

lorsque $x$ tend vers l'infini.

Pour cela nous nous intéresserons d'abord au cas $k = 0$. Le principe de la démonstration consiste à montrer que $f_0(x, \lambda, t)$ vérifie une relation de récurrence intégrale à $o(x)$ près et à déduire l'existence de $f_0(\lambda, t)$ pour tout $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_0$ en utilisant cette relation et les résultats connus pour $t \leqslant 1$. On pose, pour tout $u \in [\lambda, 1]$:

$$A_u := \operatorname{card}\{n \leqslant x^{1-u/t}\colon\ p|n \Rightarrow p \notin [x^{u/t}, x^{1/t}[\}.$$



La formule fondamentale est:

(1) $$x - f_0(x, \lambda, t) = \int_\lambda^1 x^{u/t} f_0(x^{(t-u)/t}, u, t-u)\frac{du}{u} + O(xe^{-c\sqrt{(\lambda/t)\log x}}),$$

où $c$ est une constante positive et le $O$ est absolu.

Elle se démontre en remarquant que

$$A_u = f_0(x^{(t-u)/t}, u, t-u)$$

d'où

$$[x] - f_0(x, \lambda, t) = \sum_{x^{\lambda/t} \leqslant p = x^{u/t} < x^{1/t}} A_u + O(x^{1-\lambda/t})$$

(le terme $O(x^{1-\lambda/t})$ prend en compte les entiers $n$ dont le plus grand facteur premier de l'intervalle $[x^{\lambda/t}, x^{1/t}[$ intervient avec un exposant $\geqslant 2$) et la démonstration de (1) se réduit alors au lemme suivant:

Lemme 1. *Avec les notations précédentes on a:*

$$\sum_{x^{\lambda/t} \leqslant p = x^{u/t} < x^{1/t}} A_u = \int_\lambda^1 x^{u/t} A_u \frac{du}{u} + O(xe^{-c\sqrt{(\lambda/t)\log x}})$$

*où $c$ est une constante positive et où le $O$ est absolu.*

Démonstration. Pour tout entier $n \leqslant x^{(t-\lambda)/t}$, désignons par $s(n)$ le plus grand facteur premier de $n$ dans l'intervalle $]x^{\lambda/t}, x^{1/t}]$ lorsqu'il existe (si $n$ ne possède pas de facteur premier dans l'intervalle considéré, on prend $s(n) := x^{\lambda/t}$); notons d'autre part:

$$r(n) := \min\{x^{1/t}, x/n\}$$

et

$$J_n := ]s(n), r(n)].$$

Alors la contribution d'un entier $n \leqslant x^{(t-\lambda)/t}$ à la quantité $\sum A_u$ est:

$$\sum_{p \in J_n} 1 + O(1).$$

De même, la contribution de $n$ à la quantité $\int x^{u/t} A_u \frac{du}{u}$ est

$$\int_{J_n} \frac{dq}{\log q}.$$

Si l'on pose

$$d_n := \left| \sum_{p \in J_n} 1 - \int_{J_n} \frac{dq}{\log q} \right|$$

on a alors:

(2) $$\left|\sum A_u - \int x^{u/t} A_u \frac{du}{u}\right| \leqslant \sum_{n \leqslant x^{(t-\lambda)/t}} d_n.$$

En posant pour tout réel $v$

$$\mathrm{li}(v) := \int_e^v \frac{du}{\log u}$$

on a

$$d_n = |[\pi(v)]_{s(n)}^{r(n)} - [\mathrm{li}(v)]_{s(n)}^{r(n)}|$$

et comme il existe une constante $c_1$ positive telle que pour tout réel $v \geqslant 1$

$$|\pi(v) - \mathrm{li}(v)| \leqslant v e^{-c_1\sqrt{\log v}}$$

on peut écrire, quitte à changer la valeur de $c_1$,

$$d_n \leqslant r(n)\, e^{-c_1\sqrt{\log r(n)}}.$$

En reportant dans (2), on obtient la majoration

$$\left|\sum A_u - \int x^{u/t} A_u \frac{du}{u}\right| \leqslant \sum_{n \leqslant x^{(t-1)/t}} x^{1/t} e^{-c_1\sqrt{\frac{\log x}{t}}} + \sum_{x^{(t-1)/t} \leqslant n \leqslant x^{(t-\lambda)/t}} (x/n)\, e^{-c_1\sqrt{\log(x/n)}} \ll x e^{-\frac{c_1}{2}\sqrt{\frac{\lambda}{t}\log x}}$$

d'où le résultat désiré.

Pour montrer l'existence de $f_0(\lambda, t)$, fixons $\lambda \in ]0, 1]$ et considérons l'hypothèse $\mathrm{H}_\lambda(a)$ suivante

$\mathrm{H}_\lambda(a)$: Pour tout couple $(u, t) \in [\lambda, 1] \times [0, a]$ la limite $f_0(u, t)$ existe. Pour $(u, t) \in [\lambda, 1] \times [0, a+\lambda]$ on a alors d'après (1)

(3) $$1 - x^{-1} f_0(x, u, t) = \int_u^1 x^{-(t-v)/t} f_0(x^{(t-v)/t}, v, t-v) \frac{dv}{v} + o(1)$$

l'hypothèse $\mathrm{H}_\lambda(a)$ implique donc l'existence de $f_0(u, t)$ pour tout couple $(u, t) \in [\lambda, 1] \times [0, a+\lambda]$. D'autre part on sait (voir par exemple [2]) que $\mathrm{H}_\lambda(1)$ est vérifiée pour tout $\lambda \in ]0, 1]$; en effet pour $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ on a

$$x^{-1} f_0(x, \lambda, t) = \varrho\left(\frac{t}{\lambda}\right) + o(1).$$



On en déduit donc l'existence de $f_0(\lambda, t)$ pour $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_0''$; pour $\lambda = 0$ on montre directement que $f_0(0, t) = 0$, ou on utilise les résultats de [13].

**2.2.** Montrons maintenant les propriétés (ii) et (v) du théorème C. On vérifie facilement la relation suivante pour tout entier $k \geqslant 0$ et tout couple $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_0$

(4) $$(k+1) f_{k+1}(x, \lambda, t) = \sum_{x^{\lambda/t} \leqslant p < x^{1/t}} f_k(x^{(t-u)/t}, \lambda, t-u)$$

où l'on a posé $u := t\dfrac{\log p}{\log x}$.

Par un argument analogue à celui du lemme 1 on peut réécrire (4) sous la forme

(5) $$(k+1)\, x^{-1} f_{k+1}(x, \lambda, t) = \int_\lambda^1 x^{-(t-u)/t} f_k(x^{(t-u)/t}, \lambda, t-u) \frac{du}{u} + O\left(e^{-c\sqrt{\frac{\lambda}{t}\log x}}\right)$$

ce qui montre, compte tenu de l'existence de $f_0(\lambda, t)$ à la fois l'existence de $f_k(\lambda, t)$ pour tout $k$ et la relation (ii) du théorème C.

D'autre part on sait [2] que pour tout couple de nombres réels positifs $(x, y)$ tels que

$$\log y \leqslant \log x \leqslant \log^2 y$$

on a

$$\psi_0(x, y, x) = x\varrho\left(\frac{\log x}{\log y}\right) + O\left(\frac{x}{\log y}\right) = xf_0\left(\frac{\log y}{\log x}, 1\right) + O\left(\frac{x}{\log y}\right)$$

où la constante impliquée dans le terme reste est absolue. Pour un triplet de nombres réels $(x, y, z)$ tels que

$$(y \leqslant z \leqslant x), \quad (\log x \leqslant \log^2 y) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\log x}{\log z} \leqslant 1 + \frac{\log y}{\log z}\right)$$

on a donc, d'après (1) en posant

$$t = \frac{\log x}{\log z} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\log y}{\log z},$$

$$x - \psi_0(x, y, z) = \int_\lambda^1 \left\{xf_0(u, t-u) + O\left(\frac{t}{u}\,\frac{x}{\log x}\right)\right\} \frac{du}{u} + O(xe^{-c\sqrt{\log y}})$$
$$= x\{1 - f_0(\lambda, t)\} + O\left(\frac{x}{\log y}\right) + O(xe^{-c\sqrt{\log y}})$$

soit encore

(6) $$\psi_0(x, y, z) = xf_0(\lambda, t) + O\left(\frac{x}{\log y}\right) + O(xe^{-c\sqrt{\log y}}).$$

En itérant ce procédé on voit que pour

$$\frac{\log x}{\log z} \leqslant 1+n\frac{\log y}{\log z} \quad (\text{i.e. } t \leqslant 1+n\lambda)$$

on a

$$\psi_0(x, y, z) = xf_0(\lambda, t)+O\left(\frac{x}{\log y}\right)+O\left(xe^{-c\sqrt{\log y}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\log^k 1/\lambda}{k!}\right)$$

où les constantes impliquées par les symboles $O$ sont absolues. En prenant $n = [\log y]$ on voit finalement que (6) est valable sous les seules conditions:

$$(7) \qquad (y \leqslant z \leqslant x) \quad \text{et} \quad (\log x \leqslant \log^2 y).$$

En utilisant (5) on montre alors par récurrence sur $k$ que pour $(x, y, z)$ vérifiant (7) on a:

$$\psi_k(x, y, z) = xf_k\left(\frac{\log y}{\log z}, \frac{\log x}{\log z}\right)+O\left(\frac{x}{k!}\frac{\log^k(\log z/\log y)}{\log y}\right)+ \\ +O\left(xe^{-c\sqrt{\log y}}\sum_{j=0}^{k}\frac{\log^j(\log z/\log y)}{j!}\right)$$

ce qui prouve (v).

**2.3.** La démonstration de (iii) est plus difficile. Il suffit de faire la démonstration pour $k = 0$ (en effet, l'application itérée de (ii) permet de déduire $|a_k(\lambda, t)| \leqslant 2$ à partir de $|a_0(\lambda, t)| \leqslant 2$). Nous aurons besoin de cinq lemmes.

Lemme 2. *Pour tout couple* $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_0''$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\lambda, t) = 1.$$

Démonstration. En remarquant que $f_k(x, \lambda, t)$ est nul pour $k > t/\lambda$, on obtient

$$\sum_{k \leqslant t/\lambda} f_k(x, \lambda, t) = [x],$$

d'où la conclusion annoncée, on faisant tendre $x$ vers l'infini. Remarque: Cette conclusion est mise en défaut pour $\lambda = 0$ puisque $f_k(0, t)$ est nul pour tout entier $k$. On peut, cependant, montrer facilement en utilisant la méthode de Turán que, si $\lambda = \lambda(x) \to 0$, on a uniformément, pour $t$ et $x \geqslant 1$,

$$\sum_{k=(1+o(1))\log\frac{1}{\lambda}} f_k(x, \lambda, t) = x+o(x).$$



On trouvera dans [7] une généralisation de ce résultat à l'étude de l'ordre normal du nombre des facteurs premiers d'un entier $n$ dans un intervalle dont les bornes dépendent de $n$.

Lemme 3. *Soit* $\hat{\varrho}(\lambda, s)$ *la transformée de Laplace de la fonction* $t \mapsto \varrho(t/\lambda)$. *On a pour* $\operatorname{Re} s > 0$

$$\hat{\varrho}(\lambda, s) = \hat{\varrho}(1, s)\exp\left\{-\int_{\lambda s}^{s}\frac{e^{-u}}{u}\,du\right\}.$$

Démonstration. On a $\hat{\varrho}(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-ts}\varrho\left(\frac{t}{\lambda}\right)dt$. En dérivant par rapport à $\lambda$, en tenant compte du fait que $\varrho(u) = 0$ pour $u < 0$, et en utilisant l'équation fonctionnelle de $\varrho$, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{\varrho}(\lambda, s) = \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda}\hat{\varrho}(\lambda, s).$$

Le résultat annoncé découle alors par intégration de cette équation différentielle.

Lemme 4. *La fonction* $(\lambda, t) \mapsto f_0(\lambda, t)$ *prolongée par* 0 *pour* $t < 0$ *vérifie l'équation fonctionnelle*

$$(8) \qquad \int_0^t f_0(\lambda, u)\,\varrho(t-u)\,du = \lambda\int_0^{t/\lambda}\varrho(u)\,du.$$

Démonstration. Soit $\hat{f}_0(\lambda, s) = \int_0^\infty e^{-ts}f_0(\lambda, t)\,dt$ la transformée de Laplace en $t$ de la fonction $f_0(\lambda, t)$. Posons de plus

$$\varkappa(\lambda, t) = \frac{1}{t}\chi_{[\lambda,1]}(t)$$

où $\chi_{[\lambda,1]}$ est la fonction caractéristique de l'intervalle $[\lambda, 1]$. La propriété (ii) du théorème C montre que pour tout entier $k \geqslant 0$ et pour tout $(\lambda, t) \in \mathscr{D}''_{-\infty}$ on a

$$(9) \qquad f_k(\lambda, t) = \frac{1}{k!}(\varkappa^{*k}*f_0)(\lambda, t)$$

où „$*$" désigne la convolution par rapport à la variable $t$ et où $\varkappa^{*k}$ désigne la $k$ième convolée de $\varkappa$ par elle-même (égale à la distribution de Dirac si $k = 0$). Remarquons que (9) implique que l'on prolonge $f_k(\lambda, t)$ par 0 pour $t < 0$.

Soit $t \mapsto Y(t)$ la fonction de Heaviside:

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

D'après le lemme 2 on a pour $(\lambda, t)\in\mathscr{D}''_{-\infty}$:

$$(10)\qquad \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varkappa^{*k}}{k!}\right)*f_0\right](\lambda, t) = Y(t).$$

En posant

$$\hat{\varkappa}(\lambda, s) := \int_0^{\infty} e^{-ts}\varkappa(\lambda, t)\,dt,$$

il vient:

$$\exp\{\hat{\varkappa}(\lambda, s)\}\hat{f}_0(\lambda, s) = \frac{1}{s}$$

soit encore

$$\hat{f}_0(\lambda, s) = \frac{1}{s}\exp\left\{-\int_{\lambda s}^{s} e^{-u}\frac{du}{u}\right\}.$$

En combinant ceci avec le résultat du lemme 3 on obtient:

$$(11)\qquad \hat{\varrho}(1, s)\hat{f}_0(\lambda, s) = \frac{1}{s}\,\hat{\varrho}(\lambda, s),$$

ce qui est équivalent à (9), en appliquant la transformée de Laplace inverse.

COROLLAIRE. *Pour tout couple $(\lambda, t)\in\mathscr{D}''_0$, on a:*

$$(12)\qquad f_0(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_{\Delta_n}\frac{du_1}{u_1}\cdots\frac{du_n}{u_n}$$

*où $\Delta_n$ est le domaine de $\mathbf{R}^n$ défini par*

$$\Delta_n\left\{\begin{array}{l}\lambda\leqslant u_i\leqslant 1\ \ (i = 1, \ldots, n),\\ \sum_{i=1}^{n} u_i\leqslant t.\end{array}\right.$$

*En particulier on a:*

$$(13)\qquad \lim_{t\to\infty} f_0(\lambda, t) = \lambda,$$

$$(14)\qquad \lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}f_0(\lambda, t) = f_0(\lambda, t-\lambda).$$

Démonstration. D'après (10) on a:

$$f_0(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\varkappa^{*n}*Y)(\lambda, t),$$

ce qui est exactement (12).



Lorsque $t$ tend vers l'infini, l'intégrale sur $\Delta_n$ tend vers $\log^n 1/\lambda$, et comme la série (12) converge absolument, on obtient (13). Enfin, (14) s'obtient soit en dérivant (11) terme à terme par rapport à $\lambda$, soit en utilisant la propriété (i) du théorème C.

LEMME 5. *Posons pour tout couple $(\lambda, t)\in\mathscr{D}''_0$*

$$g(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda}\{f_0(\lambda, t)-\lambda\}.$$

*Alors pour tout couple $(\lambda, t)\in\mathscr{D}''_1$ on a*

$$-1\leqslant g(\lambda, t)\leqslant\sigma-1.$$

Démonstration. L'inégalité de gauche est triviale. D'autre part (8) donne par dérivation:

$$\begin{aligned} f_0(\lambda, t) &= \varrho\left(\frac{t}{\lambda}\right)+\int_0^{t-1} f_0(\lambda, u)\varrho(t-u-1)\frac{du}{t-u}\\ &\leqslant \varrho\left(\frac{t}{\lambda}\right)+\int_0^{t-1} f_0(\lambda, u)\varrho(t-u-1)\,du = \varrho\left(\frac{t}{\lambda}\right)+\lambda\int_0^{(t-1)/\lambda}\varrho(u)\,du.\end{aligned}$$

Comme $\int_0^1\varrho(u)\,du = 1$, cela implique

$$(15)\qquad g(\lambda, t)\leqslant\frac{1}{\lambda}\,\varrho\left(\frac{t}{\lambda}\right)+\int_1^{(t-1)/\lambda}\varrho(u)\,du.$$

La majoration dans (15) est une fonction de $t$ dont la dérivée est

$$\frac{1}{\lambda}\left\{\varrho\left(\frac{t-1}{\lambda}\right)-\frac{1}{t}\,\varrho\left(\frac{t-\lambda}{\lambda}\right)\right\}.$$

Pour $t\geqslant 1$, c'est donc une fonction croissante de $t$; en faisant tendre $t$ vers l'infini, on obtient alors la majoration annoncée.

LEMME 6. *Pour $(\lambda, t)\in\mathscr{D}'_0$, la fonction $f_0(\lambda, t)$ admet une dérivée partielle en $t$ et vérifie*

$$(16)\qquad t\frac{\partial}{\partial t}f_0(\lambda, t) = f_0(\lambda, t-1)-f_0(\lambda, t-\lambda).$$

Démonstration. La formule (16) est trivialement vraie pour $\lambda = 1$ puisque $f_0(1, t)$ est identiquement égale à 1. On peut donc supposer $\lambda < 1$; soit alors $u\in\,]\lambda t, t[$. On pose pour tout réel $x\geqslant 1$:

$$E(x) = \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\varepsilon(n)$$

où $\varepsilon(n)$ vaut 1 si $n$ a un facteur premier dans $[x^{1/t}, x^{1/u}[$ mais n'a pas de facteur premier dans $[x^{\lambda/t}, x^{1/t}[$, vaut $(-1)$ si $n$ a un facteur premier dans

$[x^{\lambda/t}, x^{\lambda/u}[$ mais n'a pas de facteur premier dans $[x^{\lambda/u}, x^{1/u}[$ et vaut 0 dans tous les autres cas. Il est facile de voir que:

$$E(x) = f_0(\lambda, t) - f_0(\lambda, u) + o(1). \tag{17}$$

Posons $E(x) = E_1(x) - E_2(x)$ où les entiers $n$ comptés dans $E_1$ (resp. $E_2$) sont tels que $\varepsilon(n) = 1$ (resp. $\varepsilon(n) = -1$); soit $\theta(n)$ la fonction de $n$ valant 0 si $n$ a un facteur premier dans $[x^{\lambda/t}, x^{1/t}[$ et 1 sinon; on désigne enfin par $p_n$ le plus petit facteur premier de $n$ dans l'intervalle $[x^{1/t}, x^{1/u}[$. On a

$$E_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{x^{1/t} \leqslant p < x^{1/u}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p_n = p}} \theta(n) = \frac{1}{x} \sum_{\substack{x^{1/t} \leqslant p < x^{1/u} \\ p = x^{1/v}}} f_0\left(x^{(v-1)/v}, \frac{\lambda v}{t}, v-1\right).$$

Par un argument semblable à celui du lemme 1, on en déduit

$$E_1(x) = \int_u^t f_0\left(\frac{\lambda v}{t}, v-1\right) \frac{dv}{v} + o(1).$$

On montre de même que

$$E_2(x) = \int_u^t f_0\left(\frac{\lambda u}{v}, \frac{v-\lambda}{v}\, u\right) \frac{dv}{v} + o(1),$$

ce qui implique (16), compte tenu de (17), en faisant tendre $x$ vers l'infini, puis $u$ vers $t$.

**2.4.** Nous sommes maintenant en mesure de montrer (iii). D'après le lemme 6, on a, pour $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_0''$,

$$t \frac{\partial}{\partial t} g(\lambda, t) = g(\lambda, t-1) - g(\lambda, t-\lambda)$$

et, puisque, d'après le corollaire au lemme 4, $g(\lambda, t)$ tend vers 0 lorsque $t$ tend vers l'infini, on a:

$$g(\lambda, t) = -\int_t^\infty \frac{\partial}{\partial u} g(\lambda, u)\, du. \tag{19}$$

En utilisant (18), il vient pour $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_1''$

$$g(\lambda, t) = (1-\lambda) \int_t^\infty \frac{g(\lambda, u-\lambda)}{u(u+1-\lambda)}\, du - \int_t^{t+1-\lambda} \frac{g(\lambda, u-1)}{u}\, du. \tag{20}$$

Dans (20) l'intégrale impropre est bien convergente puisque d'après le lemme 5 $|g(\lambda, u)|$ est majoré par 1 pour $u \geqslant 1$. En utilisant ce résultat et l'inégalité:

$$\frac{1-\lambda}{u(u+1-\lambda)} \leqslant \frac{1}{u(u+1)},$$



on obtient pour $t \geqslant 2$

$$|g(\lambda, t)| \leqslant 2 \log \frac{t+1}{t} \leqslant \frac{2}{t}. \tag{21}$$

Nous allons montrer par récurrence sur l'entier $n$ que pour $t \geqslant n$, on a:

$$|g(\lambda, t)| \leqslant \frac{n}{t(t-1)\cdots(t-n+2)}. \tag{22}$$

Si la propriété est vraie au rang $n$, on a pour $t \geqslant n+1$, d'après (20)

$$|g(\lambda, t)| \leqslant n \int_t^\infty \frac{du}{(u+1)u\cdots(u-n+1)} + n \int_t^\infty \frac{du}{u\cdots(u-n+1)} - n \int_{t+1}^\infty \frac{du}{u\cdots(u-n+1)}$$

$$\leqslant n(n+1) \int_t^\infty \frac{du}{(u+1)u\cdots(u-n+1)}.$$

Considérons alors pour $t \geqslant n+1$

$$G_n(t) := \frac{1}{t(t-1)\cdots(t-n+1)} - n \int_t^\infty \frac{du}{(u+1)\cdots(u-n+1)};$$

il suffit de montrer que $G_n(t) \geqslant 0$; mais, puisque $G_n(t)$ tend vers 0 lorsque $t$ tend vers l'infini, il suffit de montrer que $G_n'(t) \leqslant 0$ pour $t \geqslant n+1$. Or on a:

$$G_n'(t) = \frac{1}{t(t-1)\cdots(t-n+1)} \left\{ \frac{n}{t+1} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{t-k} \right\} \leqslant 0$$

ce qui montre bien (22). Pour $t \geqslant 2$, on a donc en prenant $n = [t]$

$$|g(\lambda, t)| \leqslant \frac{1}{(t-1)\cdots(t-n+2)} = \frac{\Gamma(t-n+2)}{\Gamma(t)} \leqslant \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(t)} = \frac{2}{\Gamma(t)}.$$

Compte tenu du lemme 5, cette dernière inégalité est en fait valable pour $t \geqslant 1$, ce qui achève la démonstration de (iii).

**2.5.** Montrons maintenant la propriété (iv) du théorème C. D'après (9) il est clair que, si l'on note $\hat{f}_k(\lambda, s)$ la transformée de Laplace de $f_k(\lambda, t)$, on a pour tout $k \geqslant 0$

$$\hat{f}_k(\lambda, s) = \frac{1}{k!} \hat{f}_0(\lambda, s)\, \hat{\varkappa}^k(\lambda, s).$$

D'après (11) on peut donc écrire

$$\hat{f}_k(\lambda, s)\, \hat{\varrho}(1, s) = \frac{1}{k!} \frac{1}{s}\, \hat{\varrho}(\lambda, s)\, \hat{\varkappa}^k(\lambda, s)$$

soit encore en appliquant la transformée de Laplace inverse

$$\int_0^t f_k(\lambda, u)\varrho(t-u)\,du = \frac{1}{k!}\int_0^t \varrho\left(\frac{t-u}{\lambda}\right)\varphi_k(\lambda, u)\,du \tag{23}$$

où l'on a posé pour $k \geqslant 1$

$$\varphi_k(\lambda, u) := \int\limits_{\substack{[\lambda, 1]^k \\ \Sigma u_i \leqslant u}} \frac{du_1}{u_1}\dots\frac{du_k}{u_k}. \tag{24}$$

En majorant $\varphi_k(\lambda, u)$ par $\log^k 1/\lambda$ on en déduit pour $t > 1$

$$\int_{t-1}^t f_k(\lambda, u)\,du \leqslant \sigma\frac{\lambda}{k!}\log^k 1/\lambda. \tag{25}$$

Mais si $\lambda \leqslant (t-1)/t$ on a pour tout entier $n$

$$u \in [t-1, t] \Rightarrow [n^{\lambda/(t-1)}, n^{1/t}[ \subseteq [n^{\lambda/u}, n^{1/u}[,$$

donc

$$\int_{t-1}^t f_k^*(\lambda, u)\,du \geqslant f_k^*\left(\frac{\lambda t}{t-1}, t\right).$$

On déduit donc de (25) pour $t > 1$

$$f_k^*(\lambda, t) \leqslant \sigma\lambda\frac{t-1}{t}\sum_{m \geqslant k}\frac{1}{m!}\log^m\frac{t}{\lambda(t-1)},$$

ce qui achève la démonstration du théorème C.

## 3. Etude de la répartition des diviseurs

Notations. Nous désignerons par $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts ou non d'un entier $n$ et par $d(n)$ le nombre de ses diviseurs.

Le ppcm de $k$ entiers $a_1, \dots, a_k$ sera noté $[a_1, \dots, a_k]$.

De plus nous considérerons pour chaque entier $n$ la décomposition

$$n = \varrho_1(n)\varrho_2(n)$$

avec:

$$\varrho_1(n) := \max\{d : d|n, d^2 \leqslant n\}, \quad \varrho_2(n) := \min\{d : d|n, d^2 \geqslant n\}.$$

Nous nous proposons dans ce paragraphe de démontrer les théorèmes B et A dans cet ordre car nous utiliserons le théorème B dans la démonstration du théorème A. Le lemme suivant permet de simplifier les calculs en montrant qu'à une quantité $o(x)$ près il revient au même de compter les entiers $n \leqslant x$ ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ et les entiers $n \leqslant x$ ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[x^{\lambda/t}, x^{1/t}[$.



Posons en effet pour $(\lambda, t) \in \mathscr{D}'_0$

$$\bar{h}(\lambda, t, x) := \operatorname{card}\{n \leqslant x : \exists d|n, n^{\lambda/t} \leqslant d < n^{1/t}\},$$
$$h(\lambda, t, x) := \operatorname{card}\{n \leqslant x : \exists d|n, x^{\lambda/t} \leqslant d < x^{1/t}\}.$$

Lemme 7. *Avec les notations précédentes on a pour tout couple $(\lambda, t) \in \mathscr{D}'_0$*

$$\bar{h}(\lambda, t, x) = h(\lambda, t, x) + o(x).$$

On a en effet l'estimation triviale

$$|\bar{h}(\lambda, t, x) - h(\lambda, t, x)| \tag{26}$$
$$\leqslant \frac{x}{\log x} + \operatorname{card}\left\{\frac{x}{\log x} \leqslant n \leqslant x : \exists d|n,\ n^{\lambda/t} \leqslant d < x^{\lambda/t}\right\} +$$
$$+ \operatorname{card}\left\{\frac{x}{\log x} \leqslant n \leqslant x : \exists d|n,\ n^{1/t} \leqslant d < x^{1/t}\right\}.$$

Or nous avons montré ([17], pages 523–524) qu'il existe une constante absolue $c$ telle que pour tout $k \leqslant v := \left[\frac{\log\log x}{\log 2}\right]$ on ait:

$$\operatorname{card}\left\{n \leqslant x : \exists d|n,\ \frac{x^{1/2}}{2^{k+1}} \leqslant d < \frac{x^{1/2}}{2^k}\right\} \leqslant c\frac{x}{\log^\delta x\sqrt{\log\log x}} \tag{27}$$

avec $\delta = 1 - \dfrac{\log(e\log 2)}{\log 2} > 0$.

En fait la méthode employée pour montrer (27) est indépendante de l'exposant 1/2 et (27) est valable pour tout exposant de l'intervalle $]0, 1[$. En reportant dans (26), il vient:

$$|\bar{h}(\lambda, t, x) - h(\lambda, t, x)| \leqslant \frac{x}{\log x} + \sum_{k=0}^{v}\frac{x}{\log^\delta x\sqrt{\log\log x}} = o(x).$$

**3.1.** Pour montrer la propriété (i) du théorème B nous allons évaluer la quantité

$$\bar{\bar{h}}(\lambda, 2, x) := [x] - \bar{h}(\lambda, 2, x) = \operatorname{card}\{n \leqslant x : d|n \Rightarrow d \notin [n^{\lambda/2}, n^{1/2}[\}.$$

Si un entier $n$ non carré est compté dans $\bar{\bar{h}}(\lambda, 2, x)$ on a $\varrho_2(n) > n^{1-\lambda/2}$; on sait d'après le lemme 2 de [17] que cela implique

$$\Omega(\varrho_2(n)) \leqslant -\left[-\frac{\lambda}{2(1-\lambda)}\right].$$

Si $\lambda \leqslant 2/3$, le facteur $\varrho_2(n)$ est donc premier et l'on a:

$$\bar{h}(\lambda, 2, x) = \text{card}\{n \leqslant x : \exists p|n,\ p > n^{1-\lambda/2}\} + O(x^{1/2}) \tag{28}$$
$$= x \log \frac{2}{2-\lambda} + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Lorsque $\lambda \in ]2/3, 4/5]$ on a $\Omega(\varrho_2(n)) = 1$ ou $2$. Pour les nombres $n$ tels que $\Omega(\varrho_2(n)) = 1$ l'évaluation (28) reste valable, il suffit donc d'étudier la quantité

$$\tilde{j}(\lambda, x) := \text{card}\{n \leqslant x : \Omega(\varrho_2(n)) = 2 \text{ et } \varrho_2(n) \geqslant n^{1-\lambda/2}\};$$

or d'après le lemme 7 on a

$$\tilde{j}(\lambda, x) = j(\lambda, x) + o(x)$$

avec

$$j(\lambda, x) := \text{card}\{n \leqslant x : \Omega(\varrho_2(n)) = 2 \text{ et } \varrho_2(n) \geqslant x^{1-\lambda/2}\}$$
$$= \sum_{x^{1-\lambda/2} \leqslant q_2 < x} \ \sum_{\substack{n \leqslant x/q_2 \\ \varrho_2(nq_2) = q_2}} 1$$

où $q_2$ désigne un entier vérifiant $\Omega(q_2) = 2$.

Lemme 8. *Avec les notations précédentes et celles du théorème* B *on a pour* $\lambda \leqslant 4/5$

$$j(\lambda, x) = \sum_{p,p'}{}^{*} \text{card}\{n \leqslant x/pp' : \varrho_1(n) \leqslant n/p'\} \tag{29}$$

*où le symbole* $\sum^*$ *désigne la double sommation sur les nombres premiers* $p$ *et* $p'$ *tels que* $\left(\frac{\log p}{\log x}, \frac{\log p'}{\log x}\right) \in \Delta$.

Démonstration. Il faut montrer que sous l'hypothèse

$$\begin{cases} x^{1-\lambda/2} \leqslant pp' \leqslant x, \\ n \leqslant x/pp', \\ p \leqslant p' \end{cases} \tag{30}$$

on a l'équivalence:

$$\varrho_2(npp') = pp' \Leftrightarrow \begin{cases} \varrho_1(n) \leqslant n/p', \\ \left(\frac{\log p}{\log x}, \frac{\log p'}{\log x}\right) \in \Delta. \end{cases} \tag{31}$$

Supposons $\varrho_2(npp') = pp'$; alors $n$ n'a pas diviseur $d$ vérifiant

$$n/p' < d < p. \tag{32}$$

En effet, s'il en était autrement le diviseur $dp'$ de $npp'$ appartiendrait à l'intervalle $]n, pp'[=]\varrho_1(npp'), \varrho_2(npp')[$ ce qui est absurde. Cela implique $n/p' \geqslant 1$, donc $pp'^2 \leqslant x$, donc $\left(\frac{\log p}{\log x}, \frac{\log p'}{\log x}\right) \in \Delta$. De plus si on pose



$$(u, v) := \left(\frac{\log p}{\log x}, \frac{\log p'}{\log x}\right) \tag{33}$$

on a:

$$\frac{p^2}{n} = \frac{x^{2u}}{n} \geqslant x^{3u+v-1} \geqslant x^{2-5\lambda/2} \geqslant 1$$

donc $\varrho_1(n) \leqslant n/p'$ puisque $n$ n'a pas de diviseur vérifiant (32).

Réciproquement, supposons la condition de droite dans (31) vérifiée. Il est clair que $pp' > n$, donc il suffit de montrer que tout diviseur $d$ de $npp'$ tel que

$$d \geqslant \sqrt{npp'}$$

vérifie également

$$d \geqslant pp'.$$

Soit $d$ un tel diviseur; si $pp'|d$ la conclusion est triviale; on peut supposer que $d$ s'écrit $mp$ ou $mp'$ avec $m|n$. Dans le premier cas on a:

$$m \geqslant \sqrt{n}\sqrt{p'/p} \geqslant \sqrt{n} > n/p',$$

et dans le second

$$m \geqslant \sqrt{n}\sqrt{p/p'} > n/p'.$$

Comme $n$ n'a pas de diviseur dans l'intervalle $]n/p', p'[$, ceci implique donc

$$m \geqslant p'$$

et achève la démonstration du lemme 8.

Par un argument semblable à celui du lemme 7 on peut montrer que, si l'on conserve la notation (33) on peut remplacer (moyennant une erreur qui est $o(x)$) dans le membre de droite de (29) la condition $\varrho_1(n) \leqslant n/p'$ par $\varrho_1(n) \leqslant n^{1-(v/(1-u-v))}$ c'est-à-dire $\varrho_2(n) \geqslant n^{v/(1-u-v)}$. Or il est facile de voir que pour $(u, v) \in \Delta$ on a $v/(1-u-v) \geqslant 2/3$, on a donc:

$$j(\lambda, x) = \sum_{p,p'}{}^{*} \text{card}\{n \leqslant x/pp' : \varrho_2(n) \geqslant n^{v/(1-u-v)}\} + o(x)$$
$$= \sum_{p,p'}{}^{*} \frac{x}{pp'}\left\{\log \frac{1-u-v}{v} + O\left(\frac{1}{\log x/pp'}\right)\right\} + o(x)$$
$$= x \sum_{p,p'}{}^{*} \frac{1}{pp'} \log \frac{1-u-v}{v} + o(x).$$

Le lemme suivant montre alors le résultat souhaité.

LEMME 9. *Soit $f$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann dont le support est inclus dans un compact de* $]0, \infty[^n$. *Alors*:

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{p_1, \ldots, p_n} \frac{1}{p_1 \ldots p_n} f\left(\frac{\log p_1}{\log x}, \ldots, \frac{\log p_n}{\log x}\right) = \int_{R^n} f(u_1, \ldots, u_n) \frac{du_1}{u_1} \ldots \frac{du_n}{u_n}.$$

Démonstration. Soit $[a, b]^n$ un hypercube inclus dans $]0, \infty[^n$ contenant le support de $f$ et soit $\nu$ la mesure définie sur $[a, b]^n$ par

$$d\nu(u_1, \ldots, u_n) = \frac{du_1}{u_1} \ldots \frac{du_n}{u_n}.$$

On définit d'autre part pour tout réel positif $x$ une mesure $\nu_x$ sur $[a, b]^n$ par

$$d\nu_x(u_1, \ldots, u_n) = x^{-(u_1 + \ldots + u_n)} d\pi(x^{u_1}) \ldots d\pi(x^{u_n}).$$

Une intégration par partie montre immédiatement, grâce au théorème des nombres premiers, que pour tout pavé

$$P = \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$$

inclus dans $[a, b]^n$ on a:

$$\int_P d\nu_x(u_1, \ldots, u_n) = \int_P d\nu(u_1, \ldots, u_n) + o(1).$$

Cela montre que la famille des mesures positives $\nu_x$ est uniformément bornée pour $x \in \mathbf{R}$ et converge vers $\nu$ au sens de la convergence simple sur l'ensemble des combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques de pavés. On a donc également convergence vers $\nu$ au sens de la convergence simple sur l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]^n$. Or, puisque $f$ est intégrable au sens de Riemann, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ deux fonctions continues $h$ et $g$ sur $[a, b]^n$ telles que l'on ait

$$g \leqslant f \leqslant h \quad \text{sur} \quad [a, b]^n$$

et

$$\int_{[a,b]^n} (h-g)\, d\nu \leqslant \varepsilon.$$

De la relation

$$\int g\, d\nu_x \leqslant \int f\, d\nu_x \leqslant \int h\, d\nu_x$$

on tire donc:

$$\left|\int f\, d\nu_x - \int f\, d\nu\right| \leqslant \varepsilon + o(1)$$

d'où la conclusion, en faisant tendre successivement $x$ vers l'infini et $\varepsilon$ vers 0.



**3.2.** Nous allons maintenant montrer une forme légèrement affaiblie de la propriété (ii) du théorème B, à savoir, en reprenant les notations du lemme 7:

$$(34) \qquad (\lambda, t) \in \mathscr{D}_2 \Rightarrow \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} h(\lambda, t, x) \leqslant 6(1-\lambda)^\delta\text{(¹)}.$$

Ceci nous servira ensuite pour démontrer l'existence de la densité $h(\lambda, t)$ et, grâce au lemme 7, (34) sera alors équivalent à (ii). Avant d'exposer le principe de la démonstration de (34), montrons un lemme qui sera utile plus loin.

LEMME 10. *Soient $a, b, c$ des nombres réels tels que*

$$0 < a < 1 < b \quad \text{et} \quad c \geqslant 0.$$

*Pour tout réel $x_1 > \max\{e^{c/1-a}, e^{c/b-1}, e\}$, il existe des constantes $\tau_1(a, c, x_1)$ et $\tau_2(b, c, x_1)$ telles que pour $x \geqslant x_1$ on ait*:

$$\text{(i)} \qquad \sum_{k \leqslant a \log x + c} \frac{1}{k!} \log^k x \leqslant \tau_1(a, c, x_1) \frac{x^{a \log e/a}}{\sqrt{\log x}},$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{k > b \log x - c} \frac{1}{k!} \log^k x \leqslant \tau_2(b, c, x_1) \frac{x^{b \log e/b}}{\sqrt{\log x}}.$$

*En particulier on a les majorations*:

$$\tau_1\left(\frac{1}{2\log 2}, 0, 10^{18}\right) \leqslant 1.69, \qquad \tau_2\left(\frac{1}{\log 2}, 1, 2\cdot 10^9\right) \leqslant 1.81.$$

Démonstration. Pour (i), posons $y := \log x$, $n := [ay+c]$; $z := ay+ +c-n$ on a:

$$\sum_{k\leqslant n} \frac{1}{k!} y^k = \sum_{k\leqslant n} \frac{1}{(n-k)!} y^{n-k} = \frac{y^n}{n!} \sum_{k\leqslant n} \frac{n!}{y^k (n-k)!}$$
$$\leqslant \frac{y^n}{n!} \sum_{k\leqslant n} \left(\frac{n}{y}\right)^k \leqslant \frac{y^n}{n!} \sum_{k\leqslant n} \left(a + \frac{c}{y}\right)^k.$$

Pour $x > e^{c/1-a}$ on a $a + c/y < 1$, donc

$$\sum_{k\leqslant n} \frac{1}{k!} y^k \leqslant \frac{y^n}{n!} \frac{1}{1-a-c/y}.$$

---

(¹) Il est à noter qu'une fois démontrée l'existence de la densité $h(\lambda, t)$, la majoration (34) implique la continuité de $h$ sur $\mathscr{D}_2$; les formules (44) permettent alors l'étendre le domaine de continuité à $\mathscr{D}_1 \backslash \{(1, 1)\}$.

D'après la formule de Stirling, on a:

$$n! \geqslant n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

d'où la majoration

$$\sum_{k \leqslant n} \frac{1}{k!} y^k \leqslant \frac{1}{1-a-c/y} \left(\frac{y}{n}\right)^n \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}. \tag{35}$$

En remplaçant dans (35) $n$ par $ay+c-z$ on obtient:

$$\sum_{k \leqslant n} \frac{1}{k!} y^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{1}{1-a-c/y} \times$$
$$\times \frac{x^{a \log e/a}}{\sqrt{y}} \exp\left\{(c-z) \log \frac{e}{a} - (ay+\tfrac{1}{2}+c-z) \log\left(1+\frac{c-z}{ay}\right)\right\}$$

ce qui montre l'existence de la constante $\tau_1(a, c, x_1)$. Pour $a = 1/(2\log 2)$, $c = 0$, et $x \geqslant 10^{18}$, l'expression sous l'exponentielle est une fonction décroissante de $z$; on obtient donc:

$$\tau_1\left(\frac{1}{2\log 2}, 0, 10^{18}\right) \leqslant \sqrt{\frac{\log 2}{\pi}} \frac{\log 4}{\log 4/e} \leqslant 1.69.$$

Pour (ii), nous procédons de même, en posant:

$$y := \log x, \quad n := [by-c], \quad z := by-c-n.$$

On a, dès que $y < n+1$,

$$\sum_{k > n} \frac{1}{k!} y^k = \frac{y^n}{n!} \sum_{k \geqslant 1} y^k \frac{n!}{(n+k)!} \leqslant \frac{y^n}{n!} \sum_{k \geqslant 1} \left(\frac{y}{n+1}\right)^k$$
$$\leqslant \frac{y^n}{n!} \sum_{k \geqslant 1} \left\{\frac{n+1+c}{b(n+1)}\right\}^k \leqslant \frac{1}{b'-1} \frac{y^n}{n!}$$

où l'on a posé $b' = b/(1+c/(n+1))$. On termine alors la démonstration comme pour (i).

**3.3.** La méthode conduisant à la démonstration de (34) est essentiellement fondée sur celle d'Erdös dans [6]. Cependant, dans le cas qui nous occupe, deux difficultés supplémentaires apparaissent: la première est due à la dépendance précise entre la taille des nombres considérés et celle des diviseurs imposés, la seconde est que nous avons besoin de majorations plus fines que celles d'Erdös puisque, à supposer que la première difficulté soit écartée, la méthode d'Erdös employée directement donnerait une majoration en $O(1/|\log(1-\lambda)|)$ au lieu de (34). Ces difficultés seront contournées grâce aux méthodes et aux résultats du paragraphe 1.



Donnons d'abord quelques notations, valables uniquement pour la démonstration de (34).

Rappelons que la lettre $p$ désigne toujours un nombre premier. On suppose $\lambda$ et $t$ fixés avec $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_2''$, $\lambda \neq 1$, et on pose:

$$\begin{aligned}
\mu &:= 1-\lambda,\\
m &:= \log 1/\mu,\\
m' &:= m^{1/2},\\
P &:= \{p\colon x^{\mu/t} \leqslant p < x^{1/t}\},\\
Q &:= \{q \in N\colon p|q \Rightarrow p \in P\},\\
Q^* &:= \left\{q \in Q\colon \Omega(q) \leqslant \frac{m}{\log 2}+1 \text{ et } \exists q'|q\colon x^{(1-m'\mu)/t} \leqslant q' < x^{1/t}\right\},\\
U &:= \{u \in N\colon p|u \Rightarrow p \notin P\},\\
Z &:= [x^{\lambda/t}, x^{1/t}[.
\end{aligned}$$

Il est clair que tout entier $n$ se décompose de façon unique sous la forme $n = qu$, avec $q \in Q$ et $u \in U$. Soit alors $n$ un entier $\leqslant x$ ayant un diviseur $z \in Z$. On a

$$n = zv$$

pour un certain $v \in N$. Si on considère les décompositions

$$z = q'u' \quad \text{et} \quad v = q''u'',$$

on a l'encadrement:

$$x^{(1-\mu)/t} \leqslant q'u' < x^{1/t}.$$

Posons $n = qu$ avec $q = q'q''$ et $u = u'u''$, et considérons les quatre conditions suivantes:

$$(\bar{Q})\colon\ \Omega(q) > \frac{m}{\log 2}+1,$$

$$(\bar{U})\colon\ x^{(m-1)\mu/t} < u' < x^{1/t},$$

$$(\hat{Q})\colon\ \Omega(q) \leqslant \frac{m}{\log 2}+1 \text{ et } x^{(1-m\mu)/t} \leqslant q' < x^{1/t},$$

$$(\hat{U})\colon\ x^{(m'-1)\mu/t} < u' < x^{1/t}.$$

On voit facilement que si $q = q'q''$ n'appartient pas à $Q^*$, alors $n$ est de l'une des trois formes suivantes, avec des notations évidentes: $\bar{q}u$, $q\bar{u}$, $\hat{q}\hat{u}$.

En notant $N_x(\ldots)$ le nombre des entiers inférieurs ou égaux à $x$ qui ont la forme indiquée dans la parenthèse, on a donc la majoration:

$$h(\lambda, t, x) \leqslant N_x(\bar{q}u)+N_x(q\bar{u})+N_x(\hat{q}\hat{u})+N_x(q^*u). \tag{36}$$

Avant de procéder aux majorations des quantités figurant au membre de droite dans (36), montrons un résultat préliminaire.

LEMME 11. *Soit $\mu$ un nombre réel positif fixé et soient $\theta$ et $\varepsilon$ des nombres réels tels que $0 < \mu \leqslant \varepsilon < \theta$. On pose, pour tout entier $n$,*

$$I(n, \theta, \varepsilon) = \int\limits_{\substack{[\mu, 1]^n \\ \theta-\varepsilon<\Sigma u_i<\theta}} \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_n}{u_n}.$$

*On a la majoration*

$$I(n, \theta, \varepsilon) \leqslant n \log^{n-1}\frac{\theta}{\mu} \log\frac{1}{1-\varepsilon/\theta}.$$

Démonstration. Par le changement de variables $v_j = u_1 + \ldots + u_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ on obtient

$$I(n, \theta, \varepsilon) \leqslant \int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta} dv_n \int\limits_{\mu}^{v_n-\mu} \frac{dv_{n-1}}{v_n - v_{n-1}} \int\limits_{\mu}^{v_{n-1}-\mu} \cdots \int\limits_{\mu}^{v_2-\mu} \frac{dv_1}{v_2(v_2-v_1)}.$$

L'intégrale en $v_1$ vaut

$$\frac{2}{v_2}\int\limits_{\mu}^{v_2-\mu} \frac{dv_1}{v_1} \leqslant \frac{2}{v_2}\log\frac{v_2}{\mu}.$$

La majoration des intégrales suivantes s'effectue par récurrence:

$$\begin{aligned} j \int\limits_{\mu}^{v_{j+1}-\mu} & \log^{j-1}\frac{v_j}{\mu}\,\frac{dv_j}{v_j(v_{j+1}-v_j)} \\ & \leqslant \frac{j}{v_{j+1}} \int\limits_{\mu}^{v_{j+1}-\mu} \log^{j-1}\frac{v_j}{\mu}\,\frac{dv_j}{v_j} + \frac{j}{v_{j+1}}\log^{j}\frac{v_{j+1}}{\mu} \int\limits_{\mu}^{v_{j+1}-\mu} \frac{dv_j}{v_{j+1}-v_j} \\ & \leqslant \frac{j+1}{v_{j+1}}\log^{j}\frac{v_{j+1}}{\mu}. \end{aligned}$$

Finalement l'intégrale $n$-uple est majorée

$$I(n, \theta, \varepsilon) \leqslant n \int\limits_{\theta-\varepsilon}^{\theta} \log^{n-1}\frac{v_n}{\mu}\,\frac{dv_n}{v_n} \leqslant n \log^{n-1}\frac{\theta}{\mu}\log\frac{1}{1-\varepsilon/\theta}. \ \blacksquare$$

LEMME 12. *Pour $\mu \leqslant 10^{-9}$ et $t \geqslant 2$, on a:*

$$N_x(\bar{q}u) \leqslant 0.66\,\mu^{\delta} x\big(1+o(1)\big).$$

Démonstration. Si l'on pose $m_1 := 1 + \left[\dfrac{m}{\log 2}\right]$, on a:

$$N_x(\bar{q}u) \leqslant f^*_{m_1}(\mu, t)\, x\big(1+o(1)\big).$$



D'après le théorème C, on a de plus:

$$f^*_{m_1}(\mu, t) \leqslant \sigma\mu\,\frac{t-1}{t} \sum_{k>(m/\log 2)} \frac{1}{k!}\log^k\frac{t}{(t-1)\mu}.$$

En dérivant terme à terme on voit que la majoration est une fonction décroissante de $t$ dès que $\mu \leqslant 0.15$; cela implique, d'après le lemme 10

$$\begin{aligned} f^*_{m_1}(\mu, t) & \leqslant \frac{\sigma\mu}{2}\,\tau_2\left(\frac{1}{\log 2}, 1, 2\cdot 10^9\right)\left(\frac{2}{\mu}\right)^{1-\delta}\frac{1}{\sqrt{\log 2/\mu}} \\ & \leqslant \frac{1.81\cdot\sigma}{2^{\delta}\sqrt{\log 2\cdot 10^9}}\,\mu^{\delta} \end{aligned}$$

d'où le résultat souhaité.

LEMME 13. *Pour $\mu \leqslant 10^{-9}$ et $t \geqslant 2$, on a:*

$$N_x(q\bar{u}) \leqslant 0.01\,\mu^{\delta} x\big(1+o(1)\big).$$

Démonstration. Si $\bar{u}$ vérifie $(\bar{U})$, alors le plus grand diviseur $u_1$ de $\bar{u}$ composé uniquement de facteurs premiers inférieurs à $x^{\mu/t}$ est au moins égal à $x^{(m-1)\mu/t}$.

On peut donc écrire $\bar{u} = u_1 u_2$ où $u_1$ et $u_2$ vérifient les conditions:

$$u_1 \geqslant x^{(m-1)\mu/t}, \quad p|u_1 \Rightarrow p \leqslant x^{\mu/t}, \quad p|u_2 \Rightarrow p \geqslant x^{1/t}.$$

D'après le théorème C on a, pour $y \leqslant x$ et $x$ assez grand

$$\sum_{u_1\leqslant y} 1 \leqslant \psi_0(y, x^{\mu/t}, y) = y\varrho\left(\frac{t}{\mu}\,\frac{\log y}{\log x}\right) + O_{\mu,t}\left(\frac{y}{\log x}\right). \tag{38}$$

D'autre part, pour $y > x^{\alpha}$, on a (voir par exemple [13]):

$$\sum_{\substack{m<y \\ p|m\Rightarrow p>x^{\alpha}}} 1 \leqslant \frac{y}{\alpha\log x} + O\left(\frac{y}{\alpha^2\log^2 x}\right) + O\left(\frac{x^{\alpha}}{\alpha\log x}\right) \tag{39}$$

où les constantes impliquées sont absolues.

Cela nous permet de majorer $N_x(q\bar{u})$:

$$\begin{aligned} N_x(q\bar{u}) & \leqslant \sum_{u_1\leqslant x}\ \sum_{qu_2\leqslant x/u_1} 1 \\ & \leqslant \sum_{u_1\leqslant x^{(t-\mu)/t}} \left\{\frac{tx}{\mu u_1\log x} + O\left(\frac{t^2 x}{\mu^2 u_1\log^2 x}\right) + O\left(\frac{tx^{\mu/t}}{\mu\log x}\right)\right\} + \sum_{u_1\leqslant x} 1 \\ & \leqslant \frac{tx}{\mu\log x}\sum_{u_1\leqslant x}\frac{1}{u_1} + \sum_{u_1\leqslant x} 1 + O\left(\frac{t^2 x}{\mu^2\log x}\right). \end{aligned}$$

Or, d'après (38) on a d'une part:

$$\sum_{u_1 \leqslant x} 1 = x\varrho\left(\frac{t}{\mu}\right) + O_{\mu,t}\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

et d'autre part

$$\sum_{u_1 \leqslant x} \frac{1}{u_1} = \int_{x^{(m-1)\mu/t}}^{x} \Big(\sum_{u_1 \leqslant s} 1\Big) \frac{ds}{s^2} + O(1)$$

$$\leqslant \int_{x^{(m-1)\mu/t}}^{\infty} \varrho\left(\frac{t}{\mu}\,\frac{\log s}{\log x}\right) \frac{ds}{s} + O_{\mu,t}(1)$$

$$\leqslant \frac{\mu}{t} \log x \int_{m-1}^{\infty} \varrho(v)\, dv + O_{\mu,t}(1).$$

On obtient donc:

$$N_x(q\bar{u}) \leqslant (1+o(1))\, x \left\{ \int_{m-1}^{\infty} \varrho(v)\, dv + \varrho\left(\frac{t}{\mu}\right) \right\}$$

d'où la majoration numérique indiquée, en remarquant que

$$\mu^{-\delta} \left\{ \int_{m-1}^{\infty} \varrho(v)\, dv + \varrho\left(\frac{t}{\mu}\right) \right\}$$

est une fonction croissante de $\mu$ lorsque $\mu$ est inférieur à $1/e$.

Lemme 14. *Pour* $\mu \leqslant 10^{-9}$, *on a*:

$$N_x(q^* u) \leqslant 4.97\, \mu^{\delta} x (1+o(1)).$$

Démonstration. On a:

$$N_x(q^* u) = \sum_{q^* \in Q^*} \sum_{u \leqslant x/q^*} 1 = \sum_{q^* \in Q^*} U\left(\frac{x}{q^*}\right).$$

Nous majorons différemment les quantités $U(x/q^*)$ selon l'intervalle de variation de $q^*$:

(a) lorsque $q^*$ appartient à $]x^{(t-\mu)/t}, x]$, on a:

$$U\left(\frac{x}{q^*}\right) = \left[\frac{x}{q^*}\right] \leqslant \frac{x}{q^*};$$

(b) lorsque $q^*$ appartient à $]x^{(t-1)/t}, x^{(t-\mu)/t}]$, on a:

$$U\left(\frac{x}{q^*}\right) = \psi_0\left(\frac{x}{q^*}, x^{\mu/t}, \frac{x}{q^*}\right)$$

$$= \frac{x}{q^*}\varrho\left(\frac{t}{\mu}\left(1 - \frac{\log q^*}{\log x}\right)\right) + O\left(\frac{x}{q^*}\,\frac{t}{\mu \log x}\right);$$



(c) lorsque $q^*$ appartient à $[1, x^{(t-1)/t}]$, on a:

$$U\left(\frac{x}{q^*}\right) = \psi_0\left(\frac{x}{q^*}, x^{\mu/t}, x^{1/t}\right) = \frac{x}{q^*} f_0\left(\mu, t\,\frac{\log x/q^*}{\log x}\right) + O\left(\frac{x}{q^*}\,\frac{t}{\mu \log x}\right)$$

$$\leqslant \sigma\mu \frac{x}{q^*} + O\left(\frac{x}{q^*}\,\frac{t}{\mu \log x}\right).$$

Comme $\sum_{q^* \leqslant x} 1/q^* = O(1/\mu)$, on peut écrire:

$$N_x(q^* u) \leqslant x\{S_1 + S_2 + S_3\} + o(x)$$

avec

$$S_1 := \sum_{x^{(t-\mu)/t} < q^* \leqslant x} \frac{1}{q^*},$$

$$S_2 := \sum_{x^{(t-1)/t} < q^* \leqslant x^{(t-\mu)/t}} \frac{1}{q^*} \varrho\left(\frac{t}{\mu}\left(1 - \frac{\log q^*}{\log x}\right)\right),$$

$$S_3 := \sigma\mu \sum_{q^* \leqslant x} \frac{1}{q^*}.$$

Désignons par $q_i$ un nombre de $Q$ tel que $\Omega(q_i) = i$; on a:

$$S_1 \leqslant \sum_{i+j \leqslant \frac{m}{\log 2}+1} \sum \frac{1}{q_i q_j}$$

où la somme intérieure est étendue à tous les couples d'entiers $(q_i, q_j)$ vérifiant les conditions

$$x^{(1-m'\mu)/t} \leqslant q_i < x^{1/t}, \quad x^{(t-\mu)/t} < q_i q_j \leqslant x$$

(on remarquera que $i$ et $j$ sont nécessairement positifs). D'après le lemme 9, on peut écrire

$$\sum \frac{1}{q_i q_j} = \frac{(1+o(1))}{i!\, j!} \int \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_i}{u_i}\, \frac{du'_1}{u'_1} \cdots \frac{du'_j}{u'_j}$$

où l'intégrale est étendue au domaine des $(i+j)$-uples $(u_1, \ldots, u_i, u'_1, \ldots, u'_j)$ qui vérifient les conditions

$$\mu \leqslant u_s, \quad u'_{s'} \leqslant 1 \quad (1 \leqslant s \leqslant i,\ 1 \leqslant s' \leqslant j),$$
$$1 - m'\mu \leqslant \sum u_s \leqslant 1,$$
$$t - \mu \leqslant \sum u_s + \sum u'_{s'} \leqslant t.$$

On a donc encore (avec les notations du lemme 11)

$$\sum \frac{1}{q_i q_j} \leqslant \frac{(1+o(1))}{i!\, j!} \int_{\substack{[\mu,1]^i \\ 1-m'\mu \leqslant \sum u_s \leqslant 1}} \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_i}{u_i}\, I\big(j, t - \sum u_s, \mu\big).$$

En utilisant le lemme 11 et la majoration $\log \frac{1}{1-x} \leqslant x(1+x)$ valable pour $x \leqslant 1/2$, on obtient pour $\mu \leqslant 10^{-9}$:

$$\sum \frac{1}{q_i q_j} \leqslant \frac{(1+10^{-9}+o(1))}{i!\,(j-1)!} \frac{\mu}{t-1} \log^{j-1} \frac{t-1+m'\mu}{\mu} I(i, 1, m'\mu)$$

$$\leqslant \frac{(1+10^{-8}+o(1))}{(i-1)!\,(j-1)!} \frac{\mu^2 m'}{t-1} m^{i-1} \log^{j-1} \frac{t-1+m'\mu}{\mu}.$$

Cela permet de majorer $S_1$:

$$S_1 \leqslant (1+10^{-8}+o(1)) \frac{\mu^2 m'}{t-1} \sum_{i+j \leqslant m/\log 2} \frac{1}{i!\,j!} \log^i \frac{1}{\mu} \log^j \frac{t-1+m'\mu}{\mu},$$

$$S_1 \leqslant (1+10^{-8}+o(1)) \frac{\mu^2 m'}{t-1} \sum_{k \leqslant m/\log 2} \frac{1}{k!} \log^k \frac{t-1+m'\mu}{\mu^2},$$

$$S_1 \leqslant (1+10^{-8}+o(1)) \frac{\mu^2 m'}{t-1} \tau_1\left(\frac{1}{2\log 2}, 0, 10^{18}\right)\left(\frac{t-1+m'\mu}{\mu^2}\right)^{1-\delta/2} \frac{1}{\sqrt{2m}},$$

(40) $$S_1 \leqslant (1+o(1))\, 1.20\, \mu^\delta.$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été tenu pour majorer $S_1$ montre que l'on a

$$S_2 \leqslant (1+o(1)) \sum_{i+j \leqslant \frac{m}{\log 2}+1} \frac{1}{i!\,j!} \int_{i,j} \varrho\left(\frac{1}{\mu}\left(t-\sum u_s - \sum u'_{s'}\right)\right) \times$$

$$\times \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_i}{u_i} \frac{du'_1}{u'_1} \cdots \frac{du'_j}{u'_j}$$

où l'intégrale $\int_{i,j}$ est étendue au domaine des $(i+j)$-uples $(u_1, \ldots, u_i, u'_1, \ldots, u'_j)$ qui vérifient

$$\mu \leqslant u_s, u'_{s'} \leqslant 1 \quad (1 \leqslant s \leqslant i, 1 \leqslant s' \leqslant j),$$

$$1-m'\mu \leqslant \sum u_s \leqslant 1, \quad t-1 \leqslant \sum u_s + \sum u'_{s'} \leqslant t-\mu.$$

Majorons cette intégrale par une somme:

$$\int_{i,j} \leqslant \int_{i,j}^{*} + \sum_{1 \leqslant l \leqslant 1/\sqrt{\mu}} \int_{i,j}^{l}$$



où le domaine de l'intégrale $\int_{i,j}^{*}$ (resp. $\int_{i,j}^{l}$) est soumis à la condition supplémentaire

$$t-1 \leqslant \sum u_s + \sum u'_{s'} \leqslant t-\sqrt{\mu}$$

$$(\text{resp. } t-(l+1)\mu \leqslant \sum u_s + \sum u'_{s'} \leqslant t-l\mu).$$

Pour $\mu \leqslant 10^{-9}$ on a, d'une part

$$\int_{i,j}^{*} \leqslant \varrho\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) m^j I(i, 1, m'\mu) \leqslant (1+10^{-8})\varrho\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) i m'\mu\, m^{i+j-1}$$

et d'autre part

$$\int_{i,j}^{l} \leqslant \varrho(l) \int_{\substack{[\mu,1]^i \\ 1-m'\mu \leqslant \sum u_s \leqslant 1}} \frac{du_1}{u_1} \cdots \frac{du_i}{u_i} I\left(j, t-l\mu-\sum u_s, \mu\right)$$

$$\leqslant \varrho(l)(1+10^{-8}) \frac{\mu}{t-1-\sqrt{\mu}} j \log^{j-1} \frac{t-1+m'\mu}{\mu} I(i, 1, m'\mu)$$

$$\leqslant \varrho(l)(1+10^{-7}) \frac{m'\mu^2}{t-1-\sqrt{\mu}} ij \log^{j-1} \frac{t-1+m'\mu}{\mu} \log^{i-1} \frac{1}{\mu}.$$

En posant $r := \sum_{l \geqslant 1} \varrho(l) \leqslant 1.37$, on a donc

$$S_2 \leqslant (1+10^{-7}+o(1)) \left\{\mu\varrho\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) m' \sum_{i+j \leqslant \frac{m}{\log 2}} \frac{m^{i+j}}{i!\,j!} + \right.$$

$$\left. + r \frac{m'\mu^2}{t-1-\sqrt{\mu}} \sum_{i+j \leqslant \frac{m}{\log 2}} \frac{1}{i!\,j!} \log^j \frac{t-1+m'\mu}{\mu} \log^i \frac{1}{\mu}\right\},$$

$$S_2 \leqslant (1+10^{-7}+o(1)) \mu^2 m' \left\{\frac{1}{\mu} \varrho\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) \sum_{k \leqslant \frac{m}{\log 2}} \frac{1}{k!} (2m)^k + \right.$$

$$\left. + \frac{r}{t-1-\sqrt{\mu}} \sum_{k \leqslant \frac{m}{\log 2}} \frac{1}{k!} \log^k \frac{t-1+m'\mu}{\mu^2}\right\},$$

$$S_2 \leqslant (1+10^{-7}+o(1)) \mu^\delta \frac{\tau_1\left(\frac{1}{2\log 2}, 0{,}10^{18}\right)}{\sqrt{2}} \left\{\frac{1}{\mu} \varrho\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right) + r\left(\frac{1+m'\mu}{1-\sqrt{\mu}}\right)\right\},$$

(41) $$S_2 \leqslant (1+o(1))\, 1.64\, \mu^\delta.$$

Pour la majoration de $S_3$, nous avons comme précédemment:

$$S_3 \leqslant (1+o(1))\sigma\mu \sum_{i+j\leqslant \frac{m}{\log 2}+1} \frac{1}{i!\,j!} \int\limits_{\substack{[\mu,1]^{i+j} \\ 1-m'\mu\leqslant \sum_1^i u_s \leqslant 1}} \frac{du_1}{u_1}\cdots\frac{du_i}{u_i}\frac{du_1'}{u_1'}\cdots\frac{du_j'}{u_j'},$$

$$S_3 \leqslant (1+o(1))\sigma\mu \sum_{i+j\leqslant \frac{m}{\log 2}+1} \frac{m^j}{j!}\,\frac{I(i,1,m'\mu)}{i!},$$

$$S_3 \leqslant (1+10^{-8}+o(1))\sigma\mu^2 m' \sum_{k\leqslant \frac{m}{\log 2}} \frac{(2m)^k}{k!},$$

$$S_3 \leqslant (1+10^{-8}+o(1))\sigma\,\frac{\tau_1\left(\frac{1}{2\log 2}, 0{,}10^{18}\right)}{\sqrt{2}}\,\mu^{\delta},$$

$$S_3 \leqslant (1+o(1))\,2.13\,\mu^{\delta}. \tag{42}$$

En utilisant (41) et (40) on obtient la majoration annoncée au lemme 14.

LEMME 15. *Pour* $\mu \leqslant 10^{-9}$ *et* $t \geqslant 2$, *on a:*

$$N_x(\hat{q}\hat{u}) \leqslant 0.20\,\mu^{\delta} x(1+o(1)).$$

Démonstration. Désignons toujours par $q_i$ un nombre de $Q$ tel que $\Omega(q_i) = i$; nous pouvons décomposer tout nombre $n = \hat{q}\hat{u}$ inférieur ou égal à $x$ sous la forme:

$$n = q_i q_j u_1 u_2$$

avec les conditions suivantes:

$$\begin{cases} i+j \leqslant \dfrac{m}{\log 2}+1 \ (i\geqslant 1), & x^{(1-m\mu)/t} \leqslant q_i < x^{1/t}, \\ u_1 \geqslant x^{(m'-1)\mu/t}, \quad p|u_1 \Rightarrow p \leqslant x^{\mu/t}, & p|u_2 \Rightarrow p > x^{1/t}. \end{cases}$$

On a alors:

$$N_x(\hat{q}\hat{u}) \leqslant \sum_{i+j\leqslant \frac{m}{\log 2}+1} \Big\{ \sum_{q_iq_ju_1\leqslant x}\ \sum_{1<u_2<\frac{x}{q_iq_ju_1}} 1 + \sum_{q_iq_ju_1\leqslant x} 1 \Big\} =: N_x^{(1)} + N_x^{(2)}.$$



D'après (39) on obtient:

$$N_x^{(1)} \leqslant \sum_{i+j\leqslant \frac{m}{\log 2}+1}\ \sum_{q_iq_ju_1\leqslant x^{(t-1)/t}} \left\{ \frac{tx}{q_iq_ju_1\log x} + O\left(\frac{t^2 x}{q_iq_ju_1\log^2 x}\right) + O\left(\frac{tx^{1/t}}{\log x}\right)\right\}$$

$$\leqslant \frac{tx}{\log x}\Big\{\sum_{i+j\leqslant \frac{m}{\log 2}+1}\ \sum_{q_iq_ju_1\leqslant x} \frac{1}{q_iq_ju_1}\Big\} + O_{\mu,t}\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

$$\leqslant \frac{tx}{\log x}(1+o(1))\Big\{\sum_{u_1\leqslant x}\frac{1}{u_1}\Big\} \sum_{i+j\leqslant \frac{m}{\log 2}+1} \Big\{\sum \frac{1}{q_i}\Big\}\Big\{\sum\frac{1}{q_j}\Big\}.$$

En utilisant (38), il vient:

$$\sum_{u_1\leqslant x}\frac{1}{u_1} \leqslant \frac{\mu}{t}\log x \int_{m'-1}^{\infty} \varrho(v)\,dv + O(1).$$

D'autre part, d'après le lemme 9, on peut écrire:

$$\sum \frac{1}{q_j} \leqslant \frac{(1+o(1))}{j!} \int\limits_{[\mu,1]^j} \frac{du_1}{u_1}\cdots\frac{du_j}{u_j} = (1+o(1))\frac{m^j}{j!}$$

et

$$\sum\frac{1}{q_i} \leqslant \frac{(1+o(1))}{i!} I(i,1,m\mu) \leqslant (1+o(1))\frac{m^{i-1}}{(i-1)!}\log\frac{1}{1-m\mu}$$
$$\leqslant (1+10^{-7}+o(1))\, m\mu\, \frac{m^{i-1}}{(i-1)!}$$

dès que $\mu \leqslant 10^{-9}$.

On a donc

$$N_x^{(1)} \leqslant (1+10^{-7}+o(1))\, x\mu^2 m \int_{m'-1}^{\infty}\varrho(v)\,dv \sum_{i+j\leqslant \frac{m}{\log 2}} \frac{m^{i+j}}{i!\,j!}$$

$$\leqslant (1+10^{-7}+o(1))\, x\mu^2 m \int_{m'-1}^{\infty}\varrho(v)\,dv \sum_{k\leqslant \frac{2m}{2\log 2}} \frac{(2m)^k}{k!}$$

$$\leqslant (1+10^{-7}+o(1))\, x\mu^2 m \int_{m'-1}^{\infty}\varrho(v)\,dv\ \tau_1\left(\frac{1}{2\log 2}, 0{,}10^{18}\right)\frac{\mu^{\delta-2}}{\sqrt{2m}}$$

$$\leqslant (1+o(1))\,x\,(1.20)\,\mu^{\delta} m' \int_{m'-1}^{\infty}\varrho(v)\,dv \leqslant (0.12+o(1))\,\mu^{\delta} x \quad \text{pour } \mu\leqslant 10^{-9}.$$

D'autre part, on a:

$$N_x^{(2)} \leqslant (1+o(1))\, x \sum_{i+j \leqslant \frac{m}{\log 2}+1} \sum^*_{q_i q_j \leqslant x} \frac{1}{q_i q_j}\, \varrho\left(\frac{t}{\mu}\left(1-\frac{\log q_i q_j}{\log x}\right)\right)$$

où l'astérisque signifie que la sommation est étendue aux couples $(q_i, q_j)$ tels que $x/q_i q_j > x^{(m'-1)\mu/t}$. La technique de la majoration de $S_2$ au lemme 14 peut alors s'employer sans changement et on obtient le résultat annoncé.

Grâce aux lemmes 12, 13 et 14, nous obtenons donc (34) en remarquant que la majoration de (34) est supérieure à 1 pour $\mu \geqslant 10^{-9}$.

Remarque. Soit $\varepsilon > 0$; si au lieu de choisir dans la démonstration de (34) $m' = \sqrt{m}$ on choisit $m' = m^{\varepsilon}$, on montre qu'il existe une constante $c(\varepsilon)$ telle que pour tout couple $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_2''$ on ait:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x}\, h(\lambda, t, x) \leqslant c(\varepsilon)\, \frac{(1-\lambda)^{\delta}}{|\log(1-\lambda)|^{1/2-\varepsilon}}. \tag{43}$$

Cette inégalité est à rapprocher du résultat suivant, prouvé dans [17] en utilisant un théorème d'Erdös:

*Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $x$ assez grand, on a:*

$$\frac{x}{(\log x)^{\delta+\varepsilon}} \leqslant h\left(1-\frac{\log 2}{\log x}, 2, x\right) \leqslant c\, \frac{x}{\log^{\delta} x\sqrt{\log\log x}}$$

*où $c$ est une constante absolue.*

**3.4.** Nous allons maintenant démontrer l'existence de la densité $h(\lambda, t)$. Nous nous limiterons au cas $t \geqslant 2$: grâce à la symétrie des diviseurs de $n$ autour de $\sqrt{n}$, on en déduit l'existence de $h(\lambda, t)$ dans le cas général et les relations suivantes:

$$h(\lambda, t) = \begin{cases} h\left(\dfrac{t-1}{t-\lambda}, \dfrac{t}{t-\lambda}\right) & \text{si} \quad 1 \leqslant t \leqslant 2\lambda \text{ et } \lambda \neq 1, \\ h\left(2\,\dfrac{t-1}{t}, 2\right) & \text{si} \quad 2\lambda \leqslant t \leqslant 1+\lambda, \\ h\left(\dfrac{2\lambda}{t}, 2\right) & \text{si} \quad 1+\lambda \leqslant t \leqslant 2. \end{cases} \tag{44}$$

Fixons donc $(\lambda, t) \in \mathscr{D}_2''$(²) et considérons la suite $\mathscr{H}$ des entiers $n$ ayant au moins un diviseur dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$. L'idée essentielle de la démonstration consiste à „approcher" la suite $\mathscr{H}$ par la suite $\mathscr{H}_\varepsilon$ des entiers $n$

(²) Il est clair en effet que $h(0, t) = 1$ pour tout $t > 0$.



ayant au moins dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ un diviseur $k$ dont le plus petit facteur premier $q(k)$ vérifie

$$q(k) \geqslant n^{\lambda\varepsilon/t}. \tag{45}$$

En effet, si $n \in \mathscr{H} \setminus \mathscr{H}_\varepsilon$, considérons

$$m := \min\{k:\ k|n,\ n^{\lambda/t} \leqslant k < n^{1/t}\}.$$

Il est clair que $m/q(m) \leqslant n^{\lambda/t}$ et $q(m) < n^{\lambda\varepsilon/t}$, donc

$$n^{\lambda/t} \leqslant m < n^{\lambda(1+\varepsilon)/t}.$$

D'après (34) cela implique

$$\bar{d}(\mathscr{H} \setminus \mathscr{H}_\varepsilon) \leqslant 6\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\delta} \leqslant 6\varepsilon^{\delta}.$$

Comme on a $\mathscr{H}_\varepsilon \subseteq \mathscr{H}_{\varepsilon'}$ pour $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$, il nous suffit de montrer que pour tout $\varepsilon$ fixé la suite $\mathscr{H}_\varepsilon$ possède une densité.

Fixons donc $\varepsilon > 0$ et posons

$$Z_\varepsilon = \{x^{\lambda/t} \leqslant z < x^{1/t}:\ q(z) \geqslant x^{\lambda\varepsilon/t}\}.$$

Par un argument semblable à celui du lemme 7 on a

$$H_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} B_k(x) + o(x)$$

avec

$$B_k(x) = \sum_{\substack{z_1 < \ldots < z_k \\ z_i \in Z_\varepsilon}} \left[\frac{[x]}{[z_1, \ldots, z_k]}\right].$$

Considérons un $k$-uple $(z_1, \ldots, z_k)$ fournissant un terme non nul de la somme $B_k(x)$. On a $a := [z_1, \ldots, z_k] \leqslant x$ et $q(a) \geqslant x^{\lambda\varepsilon/t}$, donc $\Omega(a) \leqslant t/\lambda\varepsilon$ et $d(a) \leqslant 2^{t/\lambda\varepsilon}$; comme les $z_i$ sont distincts on voit que $B_k(x) = 0$ pour $k > 2^{t/\lambda\varepsilon}$. Il suffit donc de montrer que pour tout $k$ fixé $B_k(x)/x$ tend vers une limite lorsque $x$ tend vers l'infini. On a:

$$\frac{B_k(x)}{x} = C_k(x) + R_k(x)$$

avec

$$C_k(x) := \sum_{\substack{z_1 < \ldots < z_k \\ [z_1, \ldots, z_k] \leqslant x \\ z_i \in Z_\varepsilon}} \frac{1}{[z_1, \ldots, z_k]}$$

et

$$|R_k(x)| \leqslant \frac{1}{x} \sum_{\substack{z_1<\ldots<z_k \\ [z_1,\ldots,z_k]\leqslant x \\ z_i\in Z_\varepsilon}} 1.$$

Puisque le nombre de solutions de $[z_1, \ldots, z_k] = a$ est borné indépendamment de $x$, on a:

$$|R_k(x)| \ll \frac{1}{x} \sum_{\substack{a\leqslant x \\ \Omega(a)\leqslant t/\lambda\varepsilon}} 1 \ll \frac{(\log\log x)^{t/\lambda\varepsilon}}{\log x} = o(1).$$

Il suffit donc de voir que $C_k(x)$ tend vers une limite lorsque $x$ tend vers l'infini. On a:

$$C_k(x) = \sum_{a\leqslant x} \frac{r_k(a, x)}{a}$$

où $r_k(a, x)$ est égal au nombre de décompositions de $a$ sous la forme $a = [z_1, \ldots, z_k]$ avec les conditions

$$z_1 < \ldots < z_k, \quad z_i \in Z_\varepsilon \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Comme $r_k(a, x)$ et $\Omega(a)$ sont bornés uniformément en $x$, il suffit d'étudier la limite des quantités

$$C_k^{r,i}(x) := \sum_{\substack{a\leqslant x \\ r_k(a,x)=r \\ \Omega(a)=i}} \frac{1}{a} = \sum_{\substack{x^{\lambda\varepsilon/t}\leqslant p_1<\ldots<p_i \\ p_1\ldots p_i\leqslant x \\ r_k(p_1\ldots p_i,x)=r}} \frac{1}{p_1\ldots p_i} + o(1)$$

(le reste provient ici des entiers $a$ ayant au moins un facteur carré; il est donc majoré par $(\sum 1/p^2)(\sum 1/p)^{i-1} = O(x^{-\lambda\varepsilon/t})$).

Posons

$$E_i := \{(u_1, \ldots, u_i)\in \mathbf{R}^i: \ \lambda\varepsilon/t \leqslant u_1 < \ldots < u_i \ \text{et} \ \sum_{j=1}^{i} u_j \leqslant 1\}$$

et soit $\mathscr{M}(k, i)$ l'ensemble des matrices à $k$ lignes et $i$ colonnes de la forme

$$M = (\varepsilon_j^h)_{\substack{1\leqslant j\leqslant k \\ 1\leqslant h\leqslant i}}$$

telles que $\varepsilon_j^h = 0$ ou $1$ et $\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j^h \geqslant 1$ pour tout $h = 1, \ldots, i$. On pose:

$$\mathscr{M}(k, i) = \{M_1, \ldots, M_l\}.$$

Soit de plus

$$N_k := \{(v_1, \ldots, v_k)\in \mathbf{R}^k: \ \lambda/t \leqslant v_1 < \ldots < v_k < 1/t \ \text{et} \ \sum_{j=1}^{k} v_j \leqslant 1\}.$$



Si on considère le domaine de $\mathbf{R}^i$

$$\Delta(k, r, i) := E_i \cap \bigcup_{1\leqslant l_1<\ldots<l_r\leqslant l} \{[\bigcap_{s=1}^{r} M_{l_s}^{-1} N_k] \cap [\bigcap_{\substack{n\neq l_1,\ldots,l_r \\ 1\leqslant n\leqslant l}} M_n^{-1}(\mathbf{R}^k \setminus N_k)]\}$$

on vérifie alors que l'on a

$$C_k^{r,i}(x) = \sum{}' \frac{1}{p_1\ldots p_i} + o(1) \tag{46}$$

où le symbole $\sum'$ désigne la sommation sur les $i$-uples $(p_1, \ldots, p_i)$ tel que $\left(\frac{\log p_1}{\log x}, \ldots, \frac{\log p_i}{\log x}\right) \in \Delta(k, r, i)$. De plus $\Delta(k, r, i)$ est un domaine de $\mathbf{R}^i$ dont la frontière est limitée par un nombre fini d'hyperplans, il est donc intégrable au sens de Riemann et, grâce au lemme 9, la relation (46) montre que

$$C_k^{r,i}(x) = \int_{\Delta(k,r,i)} \frac{du_1}{u_1} \ldots \frac{du_i}{u_i} + o(1)$$

ce qui achève la démonstration de l'existence de la densité $h(\lambda, t)$.

**3.5.** Pour terminer la preuve du théorème B, il suffit maintenant de montrer la minoration suivante

$$h(\lambda, t) \geqslant \frac{2}{\pi}\left\{\arcsin \frac{1}{\sqrt{t}} - \arcsin \sqrt{\frac{\lambda}{t}}\right\}.$$

En fait elle résulte immédiatement du théorème DDT de [4]. On a, en effet:

$$h(\lambda, t) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \varepsilon_n(\lambda, t)$$

où $\varepsilon_n(\lambda, t)$ vaut 1 si $n$ a un diviseur dans l'intervalle $[n^{\lambda/t}, n^{1/t}[$ et 0 sinon. On a donc pour tout $n$:

$$\varepsilon_n(\lambda, t) \geqslant \frac{1}{d(n)} \sum_{\substack{k|n \\ n^{\lambda/t}\leqslant k<n^{1/t}}} 1$$

d'où la conclusion puisque pour tout $\alpha$ dans $[0, 1]$ on a [4]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \frac{1}{d(n)} \sum_{\substack{k|n \\ k<n^\alpha}} 1 = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\alpha}.$$

**3.6.** Pour montrer le théorème A, nous aurons besoin d'un lemme classique de théorie de la mesure:

Lemme 16. *Soit $\mu$ une mesure de probabilité sur $[0, 1]$. Alors il existe* *un nombre réel* $\alpha \in [0, 1]$ *et une constante* $c$ *positive, dépendants de* $\mu$, *tels que*:

(47) $$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mu(]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[) \geqslant c.$$

Démonstration. Soit $\mu = \mu_s + f\,dx$ la décomposition de Radon-Nikodym de $\mu$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Si $\mu_s \neq 0$, on sait (voir [16], théorème 8.9, page 158) que, pour $\mu_s$-presque tout $\alpha \in [0, 1]$, on a:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2\varepsilon} \mu_s(]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[ \cap [0, 1]) = +\infty,$$

on peut donc choisir la constante $c$ arbitrairement grande.

D'autre part, si $\mu_s = 0$ on peut prendre $c = f(\alpha)$ pour presque tout $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f(\alpha) \neq 0$.

Le théorème A est alors une conséquence du théorème B et du théorème DDT de [4]. En effet, si $\mu$ est une mesure de probabilité telle que

$$\forall \alpha \in [0, 1] \quad \big(\mu(\{\alpha\}) = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathscr{A}}} \operatorname{Prob}(D_n \leqslant \alpha) = \mu([0, \alpha])\big)$$

alors $\mu$ est nécessairement symétrique par rapport à $\alpha = 1/2$ et, d'après le lemme 14, il existe un $\alpha \in [0, 1/2]$ vérifiant (47).

S'il existe un tel $\alpha$ non nul, on peut supposer, quitte à modifier $\mathscr{A}$ sur un ensemble de densité nulle, que

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in \mathscr{A}}} d(n) = \infty.$$

Fixons alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{1}{2\varepsilon} \mu(]\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon[) \geqslant \frac{c}{2}.$$

Pour $n \in \mathscr{A}$ suffisamment grand on a:

$$\sum_{\substack{k|n \\ n^{\alpha-\varepsilon} < k < n^{\alpha+\varepsilon}}} 1 \geqslant \frac{c}{2} \varepsilon d(n) \geqslant 1.$$

D'après le théorème B on a donc

$$\bar{d}(\mathscr{A}) \leqslant 6 \left(\frac{2\varepsilon}{\alpha+\varepsilon}\right)^{\delta}$$

ce qui montre le résultat annoncé, en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0.

Si aucun $\alpha$ de l'intervalle $]0, 1/2]$ ne vérifie (47) on a:

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$$



où $\delta_u$ désigne la mesure de Dirac au point $u$. Pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit il existe donc un entier $n_0(\varepsilon)$ tel que l'on ait:

$$n \geqslant n_0(\varepsilon) \text{ et } n \in \mathscr{A} \Rightarrow \operatorname{Prob}(D_n \leqslant \varepsilon) \geqslant \tfrac{1}{4}.$$

Pour tout nombre réel $x \geqslant n_0(\varepsilon)$ on a donc

$$\frac{1}{4} A(x) \leqslant \sum_{\substack{n_0(\varepsilon) \leqslant n \leqslant x \\ n \in \mathscr{A}}} \frac{1}{d(n)} \sum_{\substack{k|n \\ k \leqslant n^{\varepsilon}}} 1 + \frac{1}{4} A(n_0(\varepsilon))$$

$$\leqslant \sum_{n \leqslant x} \frac{1}{d(n)} \sum_{\substack{k|n \\ k \leqslant n^{\varepsilon}}} 1 + \frac{1}{4} A(n_0(\varepsilon)) \leqslant \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\varepsilon}\, x(1+o(1)).$$

Cela montre donc

$$\bar{d}(\mathscr{A}) \leqslant \frac{8}{\pi} \arcsin \sqrt{\varepsilon}$$

et achève la démonstration, puisque l'on peut choisir $\varepsilon$ arbitrairement petit.

**Bibliographie**


[1] J. D. Bovey, *On the size of prime factors of integers*, Acta Arith. 33 (1977), p. 65–80.

[2] N. G. de Bruijn, *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$*, Indag. Math. 13 (1951), p. 50–60.

[3] – *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, II*, ibid. 28 (1966), p. 239–247.

[4] J.-M. Deshouillers, F. Dress, et G. Tenenbaum, *Lois de répartition des diviseurs, 1*, Acta Arith. 34 (1979), p. 273–285.

[5] K. Dickmann, *On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude*, Ark. Mat. Astr. Fys. 22 (1930), p. 1–14.

[6] P. Erdös, *A generalization of a theorem of Besicovitch*, J. London Math. Soc. 11 (1936), p. 92–98.

[7] – *On the distribution of prime divisors*, Aequationes Math. 2 (1969), p. 177–183.

[8] – *Some remarks on prime factors of integers*, Canadian J. Math. 11 (1959), p. 161–167.

[9] – *On some properties of prime factors of integers*, Nagoya Math. J. 27 (1966), p. 617–623.

[10] – *On the density of some sequences of integers*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), p. 685–692.

[11] P. Erdös et J.-L. Nicolas, *Propriétés probabilistes des diviseurs d'un nombre*, Astérisque 41–42 (1977), p. 203–214.

[12] – – *Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres*, Bull. Soc. Math. 2e série, 100 (1976), p. 301–320.

[13] J. B. Friedlander, *Integers free from large and small primes*, Proc. London Math. Soc. (3) 33 (1976), p. 565–576.

[14] J. Galambos, *The sequences of prime divisors of integers*, Acta Arith. 31 (1976), p. 213–218.

[15] V. Ramaswami, *The number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime divisors $> x^c$, and a problem of S. S. Pillai*, Duke Math. J. 16 (1949), p. 99–109.
[16] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw Hill, 1970.
[17] G. Tenenbaum, *Sur deux fonctions de diviseurs*, J. London Math. Soc. (2) 14 (1976), p. 521–526.

U. E. R. DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, France

*Reçu le 30. 7. 1977*
*et dans la forme modifiée le 17. 6. 1978* (964)

ACTA ARITHMETICA
XXXVIII (1980)

# Bioctic Gauss sums and sixteenth power residue difference sets

by

RONALD J. EVANS (La Jolla, Calif.)

**1. Introduction.** For an integer $k > 1$, define the Gauss sum $G_k = \sum_{n=0}^{p-1} e^{2\pi i n^k/p}$, where $p$ denotes a prime congruent to 1 modulo $k$. One object of this paper is to evaluate $G_{16}$ (up to some sign ambiguities). This is done in terms of parameters that appear in the representations of $p$ as binary and quartic integral quadratic forms. We shall make heavy use of the results and notation of [2], wherein $G_k$ is evaluated for $k = 4, 6, 8, 12$, and 24.

The values of $G_k$ are connected with a well-known problem on power residue difference sets, namely that of characterizing the set of primes $p$ for which the set $H_k$ of $k$th power residues (mod $p$) (or the modified set $H_k \cup \{0\}$) is a difference set. In the period 1933–1967, this problem has been solved for all the values $k < 20$ except $k = 16$. For references and good expositions, see the books of Baumert [1], pp. 119 ff, and Storer [4]. In 1957, Whiteman [5] obtained a partial solution for $k = 16$ by showing that $H_{16}$ and $H_{16} \cup \{0\}$ are never difference sets when 2 is an octic residue (mod $p$). The problem for $k = 16$ when 2 is an octic nonresidue remained open (see [1], p. 124, [4], p. 82). Using our evaluation of $G_{16}$, we complete the solution for $k = 16$ by showing that $H_{16}$ and $H_{16} \cup \{0\}$ are never difference sets. The case where 2 is a quartic residue (mod $p$) is solved in § 4, and the case where 2 is a quartic nonresidue (mod $p$) is solved in § 5. In the latter case we utilize several results from [5] which are proved using the theory of cyclotomic numbers; in the former case, the theory of cyclotomic numbers is not used. Our methods are similar to those of [2], Chapter 5, wherein we obtained new and relatively simple solutions to the problem for $k = 4, 6, 8$ and 12.

**2. Notation and the formula for $G_{16}$.** For characters $\lambda, \chi$ (mod $p$), define the Jacobi sum

$$J(\chi, \lambda) = \sum_{n=0}^{p-1} \chi(n)\lambda(1-n)$$