ACTA ARITHMETICA
XXXVII (1980)

Об арифметических свойствах многочленов от значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями в поле рациональных функций

А. Б. Шидловский (Москва)

§ 1. Обозначения и определения. В работе устанавливаются общие теоремы об оценках снизу модулей многочленов с целыми рациональными или целыми алгебраическими коэффициентами от значений в алгебраических точках подсовокупности E-функций в случае, когда основная рассматриваемая совокупность E-функций, составляющая решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $C(z)$, алгебраически зависима над $C(z)$.

С подробной историей вопроса можно ознакомиться в работах [1], [2].

Пусть в дальнейшем A обозначает поле всех алгебраических чисел над Q, K — алгебраическое поле над Q, $h = [K:Q]$, I — некоторое мнимое квадратичное поле.

Если $\xi \in K$, то $\overline{|\xi|} = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant h} |\xi_i|$, где $\xi_1, \ldots, \xi_h$ — числа сопряженные с ξ в K.

Мерой взаимной трансцендентности чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ называют функцию

$$\Phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; n; H) = \min|P(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)|, \tag{1}$$
$$P = P(z_1, \ldots, z_m) \in Z[z_1, \ldots, z_m], \quad P \not\equiv 0, \quad H_P \leqslant H,$$

где H_P — высота P (максимум модулей всех коэффициентов P), $n = \deg_{\bar z} P$, а минимум берется по всем многочленам, удовлетворяющим этим условиям.

При $m = 1$ функцию

$$\Phi(\alpha; n; H) = \min|P(\alpha)|, \tag{2}$$

называют *мерой трансцендентности* числа α.

При $n = 1$ (в однородном случае) функцию

$$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m; H) = \min|a_1\alpha_1 + \ldots + a_m\alpha_m|, \tag{3}$$
$$a_k \in Z, \quad |a_k| \leqslant H, \quad k = 1, \ldots, m, \quad a_1^2 + \ldots + a_m^2 > 0,$$

называют *мерой линейной независимости* чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, а функцию $L(1, \alpha; H)$ — *мерой иррациональности* числа α.

При помощи принципа Дирихле легко получаются оценки мер сверху для любого набора чисел α (см. например [1], [3]). В теории трансцендентных чисел и ее приложениях представляет интерес получение оценок снизу для мер тех или иных классов чисел α.

Если известна оценка снизу, например для $\Phi(\alpha; n; H)$, то эта же оценка имеет место для $|P(\alpha)|$, при любом многочлене $P(z) \in \mathbf{Z}[z]$, $P(z) \not\equiv 0$, $\deg P \leqslant n$, $H_P \leqslant H$, так как $\Phi(\alpha; n; H)$ — значение наименьшего из модулей конечного числа всех таких многочленов в точке α.

Известный в теории трансцендентных чисел метод К. Зигеля и его дальнейшие обобщения позволили доказать много теорем о трансцендентности и алгебраической независимости значений одного класса целых функций, названных К. Зигелем E-функциями. Этим же методом доказано много теорем об оценках меры взаимной трансцендентности и линейной независимости значений E-функций.

К. Зигель (см. [4], [5]) называет целую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!}, \tag{4}$$

E-функцией, если: 1. $c_n \in \mathbf{K}$, $n = 0, 1, \ldots$; 2. при любом $\varepsilon > 0$ $\overline{|c_n|} = O(n^{\varepsilon n})$ при $n \to \infty$; 3. существует последовательность $\{q_n\}$, $q_n \in \mathbf{N}$, такая, что числа $q_n c_k \in \mathbf{Z_K}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, при всех $n = 0, 1, \ldots$, а при любом $\varepsilon > 0$, $q_n = O(n^{\varepsilon n})$ при $n \to \infty$.

E-функции образуют кольцо функций, замкнутое по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования в пределах от 0 до z и замены аргумента z на λz, где $\lambda \in \mathbf{A}$.

E-функции (4) с коэффициентами степенных рядов c_n из алгебраического поля $\mathbf{K}$ будем называть $\mathbf{K}E$-функциями.

В 1929 г. К. Зигель [4] с помощью своего метода доказал алгебраическую независимость чисел $I_0(\xi)$ и $I_0'(\xi)$, где $I_0(z)$ — функция Бесселя, $\xi \in \mathbf{A}$, и получил оценку для $\Phi(I_0(\xi), I_0'(\xi); n; H)$, а также ряд других результатов относительно значений E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям 2-го порядка.

В середине 50-х годов метод Зигеля получил дальнейшее развитие (см. обзоры [1], [2] и работы [6], [7]), что позволило получить много новых результатов об арифметических свойствах значений E-функций.

Будем рассматривать совокупность $\mathbf{K}E$-функций

$$f_1(z), \ldots, f_m(z), \tag{5}$$

удовлетворяющую системе линейных дифференциальных уравнений

$$y_k' = Q_{k,0} + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \ldots, m, \quad Q_{k,i} \in \mathbf{C}(z), \tag{6}$$

или системе однородных уравнений

$$y_k' = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i} y_i, \quad k = 1, \ldots, m, \quad Q_{k,i} \in \mathbf{C}(z). \tag{7}$$

В этом случае (см. [6]) числовые коэффициенты многочленов-числителей и знаменателей всех функций $Q_{k,i}$ в (6) или (7) могут быть выбраны из $\mathbf{Z_K}[z]$, так что $Q_{k,i} \in \mathbf{K}(z)$.

Обозначим через $T = T(z) \in \mathbf{Z_K}[z]$ и $T^0 = T^0(z) \in \mathbf{Z_K}[z]$ многочлены, являющиеся общими наименьшими кратными знаменателей всех рациональных функций $Q_{k,i}$ в системе (6) или (7). Тогда все $TQ_{k,i} \in \mathbf{Z_K}[z]$ и, соответственно, все $T^0 Q_{k,i} \in \mathbf{Z_K}[z]$.

Было доказано (см. [6]), что если совокупность $\mathbf{K}E$-функций (5) составляет решение системы (6) и алгебраически независима над $\mathbf{C}(z)$, а $\xi \in \mathbf{A}$, $\xi T(\xi) \neq 0$, то числа

$$f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi) \tag{8}$$

алгебраически независимы.

Используя доказательство этой теоремы и работу К. Зигеля [4], легко получить общую теорему об оценке меры взаимной трансцендентности чисел (8), на что указывалось в докладе [9] и работе [7]. Такая теорема была опубликована С. Ленгом в 1962 г. [10]. Он показал, что при сформулированных выше условиях

$$\Phi\big(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi); n; H\big) > \sigma H^{-\gamma n^m}, \tag{9}$$

где $\sigma > 0$ — постоянная, зависящая только от функций (5) и чисел ξ, m и n, а γ — постоянная, зависящая только от числа m и степени $\varkappa$ над $\mathbf{Q}$ алгебраического поля, получающегося присоединением к полю $\mathbf{K}$ числа ξ. С. Ленг рассмотрел случай однородной системы дифференциальных уравнений, но неоднородный случай рассматривается аналогично.

С помощью уточнения основных лемм метода, данных в [8], А. И. Галочкин заменил в неравенстве (9) постоянную γ конкретной функцией от $\varkappa$ и m и обобщил результат на случай меры более общего вида [11].

В работах [3], [12], для случая когда $\mathbf{K} = \mathbf{I}$ и $\xi \in \mathbf{I}$, получены общие теоремы об оценке мер взаимной трансцендентности значений $\mathbf{I}E$-функций, весьма близкие к их естественным границам.

В статье Ю. В. Нестеренко [13] установлена оценка меры вида (9), но в которой постоянная σ эффективно зависит от n, а n может расти вместе с H до некоторого предела, зависящего от H. Формулировка такого типа теоремы в случае $\mathbf{K} = \mathbf{I}$ и $\xi \in \mathbf{I}$ опубликована в 1967 г. в [14].

Обобщим определенные выше понятия мер и будем рассматривать меры взаимной трансцендентности, трансцендентности и линейной независимости относительно поля $\boldsymbol{K}$, которые определяются аналогично (1)–(3), с той лишь разницей, что коэффициенты соответствующих многочлена P или линейной формы принадлежат $\boldsymbol{Z_K}$, а высота многочлена P или линейной формы относительно поля $\boldsymbol{K}$ (максимум модулей коэффициентов многочлена P или линейной формы и всех их сопряженных в поле $\boldsymbol{K}$) не превосходят H. Соответствующие меры будем обозначать аналогично (1)–(3), но вместо Φ или L писать $\Phi_{\boldsymbol{K}}$ или $L_{\boldsymbol{K}}$.

Наконец будем рассматривать однородные меры взаимной трансцендентности $\Phi^0(a_1, \ldots, a_m; n; H)$ и $\Phi_{\boldsymbol{K}}^0(a_1, \ldots, a_k; n; H)$, которые определяются аналогично (1), с той лишь разницей, что в их определении $P(z_1, \ldots, z_m)$ — однородный многочлен степени не большей n, соответственно, из $\boldsymbol{Z}[z_1, \ldots, z_m]$ или $\boldsymbol{Z_K}[z_1, \ldots, z_m]$.

Из оценок для Φ^0 и $\Phi_{\boldsymbol{K}}^0$ следуют оценки для Φ и $\Phi_{\boldsymbol{K}}$, если ввести в рассмотрение число $a_{m+1} = 1$, а также оценки для Φ или $\Phi_{\boldsymbol{K}}$ для чисел $a_1/a_m, \ldots, a_{m-1}/a_m$.

Используемый нами метод позволяет получать оценки для $L_{\boldsymbol{K}}$, $\Phi_{\boldsymbol{K}}$, Φ^0 и $\Phi_{\boldsymbol{K}}^0$. Так как $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Z_K}$, то из доказанных оценок снизу для $L_{\boldsymbol{K}}$, $\Phi_{\boldsymbol{K}}$ и $\Phi_{\boldsymbol{K}}^0$ следуют те же оценки для L, Φ и Φ^0.

В статье [12] получены оценки мер $\Phi_{\boldsymbol{I}}^0$ и Φ^0 для значений IE-функций.

Ясно, что установив оценки снизу для введенных мер $\Phi_{\boldsymbol{K}}$, Φ^0, $\Phi_{\boldsymbol{K}}^0$ и $L_{\boldsymbol{K}}$, мы тем самым получим оценки для значений модулей соответствующих многочленов и линейных форм из $\boldsymbol{Z_K}[z_1, \ldots, z_m]$ и $\boldsymbol{Z}[z_1, \ldots, z_m]$ с соответственно ограниченными степенями и высотами относительно поля $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{Q}$.

В работе [7] доказаны теоремы об алгебраической независимости подсовокупности чисел (8), в случае, когда исходная совокупность KE-функций (5) алгебраически зависима над $\boldsymbol{C}(z)$. Там же доказано, что если совокупность KE-функций (5) составляет решение системы (6), а $\xi T(\xi) \neq 0$, то степень трансцендентности совокупности чисел (8) (максимальное число алгебраически независимых) равна степени трансцендентности функций (5) над $\boldsymbol{C}(z)$.

Рассматривая меры от значений KE-функций (5) в точке ξ, мы можем выбирать $\xi \in \boldsymbol{A}$, но $\xi \notin \boldsymbol{K}$, а также рассматривать коэффициенты многочлена P или линейной формы в определении мер из $\boldsymbol{Z_{K^*}}$, где $\boldsymbol{K}^*$ отлично от $\boldsymbol{K}$. В формулировках теорем и доказательствах удобнее рассматривать одно поле, содержащее поля $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}^*$ и число ξ. В дальнейшем мы будем само поле $\boldsymbol{K}$ считать таким полем.

Если $\xi \in \boldsymbol{K}$, то будем обозначать $\xi_1, \ldots, \xi_h$ — числа сопряженные для ξ в поле $\boldsymbol{K}$. Через $\boldsymbol{K}_i$, $i = 1, \ldots, h$, обозначим алгебраические поля, сопряженные для $\boldsymbol{K}$, а через $f_{1,i}(z), \ldots, f_{m,i}(z)$, $i = 1, \ldots, h$ — K_iE-функции, получающиеся из функций (5) заменой всех их коэффициентов степенных рядов на числа сопряженные из поля $\boldsymbol{K}_i$, и будем называть их функциями сопряженными с функциями (5).

Аналогичные обозначения будут и для совокупности KE-функций, обозначенных буквой φ с индексами.

Пусть всюду в дальнейшем ε обозначает любое действительное число, $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. Положительные постоянные b с различными индексами и без индекса будут зависеть только от рассматриваемых KE-функций (5), системы дифференциальных уравнений (6) или (7), которой удовлетворяют эти функции, числа m этих функций, чисел ξ и ε. В случаях, когда рассматриваются меры трансцендентности, в §§ 2–5, числа b, кроме того, будут зависеть от n-степени соотвествующей меры. Положительные постоянные C и C_0 будут иметь тот же смысл, что постоянные b, но только не будут зависеть от числа ε. Положительное число γ и числа γ с различными индексами (не обязательно положительные), а также число N_0 будут зависеть только от функций (5) и их числа m. При этом буквы b, C и γ в разных случаях будут обозначать различные постоянные.

В дальнейшем $l_{\boldsymbol{K}} = l_{\boldsymbol{K}}(z_1, \ldots, z_m)$ будет обозначать произвольную не равную тождественно нулю линейную форму с коэффициентами из $\boldsymbol{Z_K}$ высоты H относительно $\boldsymbol{K}$, а $l_{\boldsymbol{K}_i} = l_{\boldsymbol{K}_i}(z_1, \ldots, z_m)$, $i = 1, \ldots, h$ — линейные формы, получающиеся из формы $l_{\boldsymbol{K}}$ после замены всех ее коэффициентов на сопряженные числа из поля $\boldsymbol{K}$.

Аналогично $g_{\boldsymbol{K}} = g_{\boldsymbol{K}}(z_1, \ldots, z_m)$ будет обозначать произвольный не равный тождественно нулю многочлен с коэффициентами из $\boldsymbol{Z_K}$, высоты H относительно $\boldsymbol{K}$ и степени n по $z_1, \ldots, z_m$, а $g_{\boldsymbol{K}_i} = g_{\boldsymbol{K}_i}(z_1, \ldots, z_m)$, $i = 1, \ldots, h$ получаются из $g_{\boldsymbol{K}}$ подобно тому, как $l_{\boldsymbol{K}_i}$ получаются из $l_{\boldsymbol{K}}$. Наконец, $g_{\boldsymbol{K}}^0$ и $g_{\boldsymbol{K}_i}^0$ имеют тот же смысл, что и $g_{\boldsymbol{K}}$ и $g_{\boldsymbol{K}_i}$, когда рассматриваемый многочлен однороден.

Доказательства в статье существенно используют результаты работ [3], [6], [7], [8].

§ 2. Оценка меры линейной независимости.

Теорема 1. *Пусть совокупность KE-функций (5), $m \geqslant 2$, составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (7) и линейно независима над $\boldsymbol{C}(z)$, а $\xi \in \boldsymbol{K}$, $\xi T^0(\xi) \neq 0$. Тогда выполняется неравенство*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant h} \left| l_{\boldsymbol{K}_i}\left(f_{1,i}(\xi_i), \ldots, f_{m,i}(\xi_i)\right) \right| > bH^{1-m-\varepsilon}, \tag{10}$$

а если $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$, то неравенство

$$L_{\boldsymbol{I}}\left(f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi); H\right) > bH^{1-m-\varepsilon}. \tag{11}$$

Доказательство. Последующие рассуждения аналогичны рассуждениям, с помощью которых доказана теорема 1 работы [3]. Небольшие изменения возникают только от рассмотрения произвольного поля $\boldsymbol{K}$ и сопряженных полей $\boldsymbol{K}_i$.

В работе [6], с уточнениями, внесенными в статье [8], при некотором $n \in \boldsymbol{N}$ строится функциональная линейная форма от функций (5)

$$R_1(z) = \sum_{l=1}^{m} P_{1,l} f_l(z), \quad R_1(z) \not\equiv 0, \quad P_{1,l} \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}[z], \quad \deg P_{1,l} \leqslant 2n-1, \quad l = 1, \ldots, m,$$

имеющая „достаточно большой" порядок нуля при $z = 0$ и „достаточно хорошие" оценки для коэффициентов многочленов $P_{1,l}$ и их сопряженных.

Производная $R_1'(z)$ будет линейной формой от функций (5) и их производных. Если заменить $f_l'(z)$ на правые части соответствующих дифференциальных уравнений (7) и умножить результат на T^0, то $T^0 R_1'(z)$ будет снова линейной формой от функций (5) с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}[z]$. Поэтому если положить

$$R_k(z) = T^0 R_{k-1}'(z), \quad k = 2, 3, \ldots,$$

то мы получим совокупность функциональных линейных приближающих форм

$$R_k(z) = \sum_{l=0}^{m} P_{k,l} f_l(z), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad P_{k,l} \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}[z].$$

В [6] и [8] доказывается, что существует $n_0 \in \boldsymbol{N}$, такое, что при $n \geqslant n_0$ формы $R_1(z), \ldots, R_m(z)$ будут линейно независимы, а если $\xi \in \boldsymbol{K}$ и $\xi T^0(\xi) \neq 0$, то при $n \geqslant n_0$ среди числовых линейных форм от чисел $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ с коэффициентами из $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$

$$R_k(\xi), \quad k = 1, \ldots, m+t, \; t = \varepsilon n + O(1), \tag{12}$$

можно выбрать m линейно независимых. При этом

$$\begin{gathered} \left|\overline{P_{k,l}(\xi)}\right| = O(n^{(2+\varepsilon)n}), \quad R_k(\xi) = O(n^{-(2m-2-\varepsilon)n}) \\ \max \deg P_{k,l} = O(n), \quad k = 1, \ldots, m+t, \; l = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{13}$$

Из доказанного в [6] и [8] очевидно следует, что оценка (13) для $R_k(\xi)$ сохранится, если коэффициенты многочлена $P_{k,l}$ и число ξ заменить на числа сопряженные из поля $\boldsymbol{K}_i$, а функции (5) на сопряженные функции из того же поля.

Рассмотрим любую числовую линейную форму

$$L_0 = \sum_{l=1}^{m} a_l f_l(\xi), \; a_l \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}, \quad \left|\overline{a_l}\right| \leqslant H, \; l = 1, \ldots, m, \; |a_1| + \ldots + |a_m| > 0.$$

Среди линейных форм (12) можно выбрать $m-1$ форму так, что вместе с формой L_0 они будут линейно независимы. Пусть это будут формы $L_s = R_{k_s}(\xi)$, $s = 1, \ldots, m-1$.

Обозначим через Δ, $\Delta \not\equiv 0$, определитель линейных форм $L_1, \ldots, L_{m-1}$, L_0, а через $\Delta_{k,l}$ — алгебраическое дополнение элемента k-ой строки и l-го столбца в Δ. Тогда

$$\Delta f_l(\xi) = \Delta_{1,l} L_1 + \ldots + \Delta_{m-1,l} L_{m-1} + \Delta_{m,l} L_0. \tag{14}$$

Выберем l так, чтобы $f_l(\xi) \neq 0$, что возможно, ввиду $T^0(\xi) \neq 0$. Тогда из (14) имеем:

$$|\Delta_{m,l}|\,|L_0| \geqslant |f_l(\xi)|\,|\Delta| - (m-1) \max_{1 \leqslant k \leqslant m-1} |\Delta_{k,l}| \max_{1 \leqslant k \leqslant m-1} |L_k|. \tag{15}$$

При помощи оценок (13) получаем неравенства

$$\begin{gathered} \left|\overline{\Delta_{m,l}}\right| \leqslant b_1 n^{[2(m-1)+\varepsilon]n}, \\ \max_{1 \leqslant k \leqslant m-1} \left|\overline{\Delta_{k,l}}\right| \leqslant b_2 H n^{[2(m-1)+\varepsilon/2]n}, \\ \max_{1 \leqslant k \leqslant m-1} |L_k| \leqslant b_3 n^{-(2m-2-\varepsilon/2)n}. \end{gathered} \tag{16}$$

При этом последняя из этих оценок сохранится, если совершить описанный выше переход к сопряженному полю $\boldsymbol{K}_i$.

Пусть $a \in \boldsymbol{N}$ и таково, что $a\xi \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$. Тогда из (13) имеем $a^{O(n)}\Delta \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{K}}$. Отсюда следует, ввиду того, что $\Delta \not\equiv 0$, неравенство

$$(a^{O(n)}|\Delta_1|) \ldots (a^{O(n)}|\Delta_h|) \geqslant 1,$$

где $\Delta_1, \ldots, \Delta_h$ — числа сопряженные с Δ. Значит при некотором значении i выполняется неравенство

$$|\Delta_i| > b_4 n^{-\varepsilon n}. \tag{17}$$

Заменим поле $\boldsymbol{K}$ на поле $\boldsymbol{K}_i$, как и выше. При этом коэффициенты всех форм L_k, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, заменятся на сопряженные числа из $\boldsymbol{K}_i$. Очевидно, что после такой замены все предшествующие рассуждения сохранятся. Сохранятся равенство (14) и неравенство (15), с соответствующей заменой входящих в них чисел. При этом только, может быть, придется изменить выбор числа l так, чтобы $f_{l,i}(\xi_i) \neq 0$. Неравенство (15) примет вид

$$\left|\overline{\Delta_{m,l}}\right|\,|L_{0,i}| \geqslant |f_{l,i}(\xi_i)|\,|\Delta_i| - (m-1) \max_{1 \leqslant k \leqslant m-1} \left|\overline{\Delta_{k,l}}\right| \max_{1 \leqslant k \leqslant m-1} |L_{k,i}|, \tag{18}$$

где $L_{k,i}$ обозначает линейную форму, соответствующую форме L_k в поле $\boldsymbol{K}_i$.

Из неравенств (16), (17) и (18) находим, что

$$|L_{0,i}| \geqslant b_5 n^{-2(m-1+\varepsilon)n}(1-b_6 H n^{-2(1-\varepsilon)n}).$$

Выберем n наименьшим возможным так, чтобы удовлетворялись условия $n \geqslant n_0$ и $n^{2(1-\varepsilon)n} > 2b_6 H$. Тогда

$$|L_{0,i}| > \frac{b_5}{2} n^{-2(m-1+\varepsilon)n}. \tag{19}$$

При наших предположениях, начиная с некоторого H, выполняется неравенство

$$(n-1)^{2(1-\varepsilon)(n-1)} \leqslant 2b_6 H,$$

откуда

$$n^{2(1-\varepsilon)n} < b_7 H \ln^2 H. \tag{20}$$

Из неравенств (19) и (20), ввиду неравенства $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$, получаем

$$|L_{0,i}| > b_8 H^{1-m-3m\varepsilon},$$

откуда следует, что неравенство (10) выполняется начиная с некоторого H. Но поскольку неравенство (19) выполняется при любом H, то увеличив, если это необходимо, постоянную b, получим, что неравенство (10) будет выполнятся при любом H.

При $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$ неравенство (11) следует из неравенства (10), так как модули комплексно сопряженных чисел равны.

Ввиду теоремы 1, теоремы 2–5 работы [3] можно усилить, заменив в их формулировках поле $\boldsymbol{I}$ на поле $\boldsymbol{K}$, а в их утверждениях меры L и Φ на $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant h} l_{\boldsymbol{K}_i}$, $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant h} g_{\boldsymbol{K}_i}$, а при $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$, на $L_{\boldsymbol{I}}$ и $\Phi_{\boldsymbol{I}}$.

§ 3. Общие теоремы об оценках меры взаимной трансцендентности. Условимся в дальнейшем вместо „не связаны однородным алгебраическим уравнением" писать „однородно алгебраически независимы".

Теорема 2. *Пусть совокупность $\boldsymbol{I}E$-функций (5), $m \geqslant 2$, составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (7). Среди этих функций максимальное число функций однородно алгебраически независимых над $\boldsymbol{C}(z)$ равно l, $2 \leqslant l \leqslant m$, $\xi \in \boldsymbol{I}$, $\xi T^0(\xi) \neq 0$, а в случае $m \geqslant 2$ и $l < m$ числа*

$$f_1(\xi), \ldots, f_l(\xi) \tag{21}$$

однородно алгебраически независимы. Тогда выполняются неравенства

$$\Phi^0_{\boldsymbol{I}}(f_1(\xi), \ldots, f_l(\xi); n; H) > CH^{-\gamma n^{l-1}}, \tag{22}$$

$$\Phi_{\boldsymbol{I}}\left(\frac{f_1(\xi)}{f_l(\xi)}, \ldots, \frac{f_{l-1}(\xi)}{f_l(\xi)}; n; H\right) > C_0 H^{-\gamma n^{l-1}}. \tag{23}$$

Заметим, что нумерация функций

$$f_1(z), \ldots, f_l(z) \tag{24}$$

в теореме 2 и ряде следующих теорем в нашем распоряжении.

Для доказательства этой теоремы приведем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1 (см. [6]). *Пусть совокупность $\boldsymbol{K}E$-функций (5) составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (6). Тогда совокупность $\mu_{n,m} = \dfrac{(n+m)!}{n!\,m!}$ произведений степеней этих функций*

$$f_1^{k_1}(z)\ldots f_m^{k_m}(z), \quad 0 \leqslant k_1 + \ldots + k_m \leqslant n, \quad k_i \geqslant 0,\ k_i \in \boldsymbol{Z}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad n \in \boldsymbol{N}, \tag{25}$$

является решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений вида (7), в которой число m заменено на $\mu_{n,m}$. Коэффициенты этой системы являются функциями из $\boldsymbol{K}(z)$ и не могут иметь полюсов, отличных от полюсов функций $Q_{k,i}$ в системе (6).

Аналогичное утверждение выполняется для совокупности $\varrho_{n,m} = \dfrac{(n+m-1)!}{n!\,(m-1)!}$ однородных произведений степеней $\boldsymbol{K}E$-функций (5)

$$f_1^{k_1}(z)\ldots f_m^{k_m}(z), \quad k_1 + \ldots + k_m = n, \quad k_i \geqslant 0,\ k_i \in \boldsymbol{Z}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad n \in \boldsymbol{N}, \tag{26}$$

удовлетворяющих однородной системе (7).

Лемма 2. *Пусть совокупность $\boldsymbol{K}E$-функций (5) является решением системы линейных однородных дифференциальных уравнений (7) и имеет ранг l (максимальное число линейно независимых) относительно поля $\boldsymbol{C}(z)$, а $\xi \in \boldsymbol{K}$, $\xi T^0(\xi) \neq 0$. Тогда ранг r относительно поля $\boldsymbol{K}$ m чисел (8) удовлетворяет неравенству $r \geqslant l/h$, а если $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$, то $r = l$.*

Лемма доказывается дословно аналогично лемме 2 работы [7], с использованием леммы 9 работы [8] вместо леммы 9 статьи [6].

Лемма 3 (см. [15]). *Пусть Γ есть произвольное поле, Ω — коммутативное кольцо, $\Gamma \subset \Omega$. Элементы $u_i \in \Omega$, $i = 1, \ldots, m$, $m \geqslant 1$, а степень трансцендентности множества этих элементов относительно Γ равна l, $0 \leqslant l \leqslant m$. Далее, $r_{N,l}$ обозначает ранг векторного пространства над Γ, порожденного произведениями степеней*

$$u_1^{k_1}\ldots u_m^{k_m}, \quad 0 \leqslant k_1 + \ldots + k_m \leqslant N, \quad k_i \geqslant 0,\ k_i \in \boldsymbol{Z}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad N \in \boldsymbol{N}.$$

Тогда существует $N_0 \in \boldsymbol{N}$ такое, что при любом $N \geqslant N_0$

$$r_{N,l} = a_l N^l + a_{l-1} N^{l-1} + \ldots + a_0, \quad a_l > 0,$$

где $a_0, \ldots, a_l \in \boldsymbol{R}$ и зависят только от элементов $u_1, \ldots, u_m$ и поля Γ и не зависят от N.

Следствие. *Если при условиях леммы 4 обозначить через $r^0_{N,l}$ ранг векторного пространства над Γ порожденного элементами*

$$u_1^{k_1} \ldots u_m^{k_m}, \quad k_1 + \ldots + k_m = N,$$

то $r^0_{N,l} = r_{N,l-1}$.

Лемма 4 (см. [7]). *Пусть совокупность аналитических функций составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (7) и имеет ранг l относительно $\boldsymbol{C}(z)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, а ξ — фиксированное комплексное число $\xi T_0(\xi) \neq 0$. Тогда быть может меняя нумерацию этих функций, можно выбрать l функций (24) линейно независимых над $\boldsymbol{C}(z)$ так, что в равенствах*

$$f_s(z) = D_{1,s} f_1(z), \ldots, D_{l,s} f_l(z), \quad s = l+1, \ldots, m,$$

где все $D_{k,s} \in \boldsymbol{C}(z)$, ни одна из функций $D_{k,s}$ не может иметь полюс в точке ξ.

Лемма 5 (см. [6], лемма 10). *Пусть $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ — степенные ряды по степеням z с коэффициентами из $\boldsymbol{K}$ связаны алгебраическим уравнением*

$$P\big(z, f_1(z), \ldots, f_s(z)\big) = 0,$$

$$P = P(z, z_1, \ldots, z_s) \in \boldsymbol{C}[z, z_1, \ldots, z_s], \quad P \not\equiv 0.$$

Тогда числовые коэффициенты многочлена P могут быть выбраны из $\boldsymbol{Z_K}$.

Доказательство теоремы 2. При $l = m$ утверждения теоремы следуют из теоремы 1, если заменить в ней число m на число $\varrho_{n,m} = \dfrac{(n+m-1)!}{n!(n-1)!}$, а функции (5) на совокупность произведений степеней (26) и воспользоватся леммой 1.

Пусть теперь $m > 2$ и $l < m$. По условию числа (21) однородно алгебраически независимы над $\boldsymbol{I}$. Поэтому $\varrho_{n,l}$ чисел

$$f_1^{k_1}(\xi) \ldots f_l^{k_l}(\xi), \quad k_1 + \ldots + k_l = n, \tag{27}$$

линейно независимы над $\boldsymbol{I}$. Произвольно перенумеруем их и обозначим $\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_{\varrho_{n,l}}(\xi)$.

Пусть ранг $\varrho_{n,m}$ чисел

$$f_1^{k_1}(\xi) \ldots f_m^{k_m}(\xi), \quad k_1 + \ldots + k_m = n, \tag{28}$$

относительно поля $\boldsymbol{I}$ равен $r^0_{n,l}$. Выберем среди этих чисел $r^0_{n,l} - \varrho_{n,l}$

чисел, отличных от чисел (27) и линейно независимых вместе с ними в поле $\boldsymbol{I}$, и обозначим их $\varphi_{\varrho_{n,l}+1}(\xi), \ldots, \varphi_{r^0_{n,l}}(\xi)$. Если $r^0_{n,l} < \varrho_{n,m}$, то обозначим также $\varphi_{r^0_{n,l+1}}(\xi), \ldots, \varphi_{\varrho_{n,m}}(\xi)$ числа множества (31), не вошедшие в совокупность чисел

$$\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_{r^0_{n,l}}(\xi). \tag{29}$$

Пусть $\varphi_s(z)$ — функция множества (26), соответствующая числу $\varphi_s(\xi)$, при $s = 1, \ldots, \varrho_{n,m}$.

Тогда применяя леммы 1, 2 и 5 к совокупности функций (26), получим, что функции

$$\varphi_1(z), \ldots, \varphi_{r^0_{n,l}}(z) \tag{30}$$

составляют базис линейного пространства L, порожденного функциями (26) над $\boldsymbol{I}(z)$. Поэтому при $r^0_{n,l} < \varrho_{n,m}$ имеет место равенство

$$\varphi_s(z) = D_{1,s}\varphi_1(z) + \ldots + D_{r^0_{n,l},s}\varphi_{r^0_{n,l}}(z), \quad s = r^0_{n,l}+1, \ldots, \varrho_{n,m}, \tag{31}$$

где все функции $D_{k,s} \in \boldsymbol{I}(z)$.

Ни одна из функций $D_{k,s}$ не может иметь полюс в точке $z = \xi$. Действительно, в противном случае, умножая обе части соответствующего равенства на многочлен, являющийся общим наименьшим знаменателем функций $D_{1,s}, \ldots, D_{r^0_{n,l},s}$ и полагая $z = \xi$, мы придем к противоречию с линейной независимостью чисел (27) в поле $\boldsymbol{I}$.

При $r^0_{n,l} < \varrho_{n,m}$ выберем из системы дифференциальных уравнений, которой по лемме 1 удовлетворяет совокупность функций (25), те, левые части которых являются производными функций (30) и подставим в их правые части вместо функций $\varphi_{r^0_{n,l}+1}(z), \ldots, \varphi_{\varrho_{n,m}}(z)$ правые части соответствующих равенств (31). Тогда при $r^0_{n,l} \leqslant \varrho_{n,m}$ совокупность функций (30) составит решение системы однородных дифференциальных уравнений вида (7), в которой число m заменено на $r^0_{n,l}$ и для которой точка $z = \xi$ не является особой.

Следовательно, совокупность функций (30) и число ξ удовлетворяют всем условиям теоремы 1, с заменой в ней m на $r^0_{n,l}$, по которой выполняется неравенство

$$L_{\boldsymbol{I}}\big(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_{r^0_{n,l}}(\xi); H\big) > bH^{1-r^0_{n,l}-\varepsilon},$$

где, по следствию из леммы 4, при $n \geqslant N_0$

$$r^0_{n,l} = \gamma_{l-1} n^{l-1} + \ldots + \gamma_1 n + \gamma_0, \quad \gamma_{l-1} > 0, \tag{32}$$

а при $n < N_0$, очевидно, что

$$r^0_{n,l} < \gamma_0 n^{m-1} \leqslant \gamma n^{l-1}. \tag{33}$$

Тогда тем более выполняется неравенство

$$L_I(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_{e_{n,l}}(\xi); H) > bH^{1-r^0_{n,l}-\varepsilon}. \tag{34}$$

Но

$$\Phi^0_I(f_1(\xi), \ldots, f_l(\xi); n; H) = L_I(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_{e_{n,l}}(\xi); H). \tag{35}$$

Фиксируя число ε, из неравенства (35) получаем неравенство (22). Неравенство (23) есть очевидное следствие неравенства (22).

Теорема 3. *Пусть совокупность $I\!E$-функций* (5), $m \geqslant 1$, *составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений* (6). *Степень трансцендентности множества этих функций над* $C(z)$ *равна* l, $1 \leqslant l \leqslant m$, $\xi \in I$, $\xi T(\xi) \neq 0$, *а в случае* $m > 1$ *и* $l < m$ *числа* (21) *алгебраически независимы. Тогда*

$$\Phi_I(f_1(\xi), \ldots, f_l(\xi); n; H) > CH^{-\gamma n^l}. \tag{36}$$

Теорема 3 следует из теоремы 2, если в последней заменить число m на $m+1$ и положить $f_{m+1}(z) = 1$.

Ввиду основных теорем работы [6], из теорем 2 и 3 следует, что при их условиях в случае $l = m$, соответствующие неравенства выполняются в любой точке $\xi \in I$, $\xi T^0(\xi) \neq 0$, или $\xi T(\xi) \neq 0$. В случае $l < m$ этого утверждать нельзя. В таком случае могут появится еще дополнительные исключительные точки, в которых указанные неравенства могут не выполнятся.

Будем говорить, что некоторое утверждение выполняется для почти всех чисел из множества M, если оно выполняется для всех чисел из M, за исключением конечного числа чисел.

В работе [7] доказано, что если степень трансцендентности над $C(z)$ множества функций (5), удовлетворяющих системе (6), равна l, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, и функции (24) алгебраически независимы над $C(z)$, то почти для всех чисел $\xi \in A$ числа (21) алгебраически независимы.

Аналогично из теорем этой работы следует, что если максимальное число функций, однородно алгебраически независимых над $C(z)$, среди функций (5), удовлетворяющих системе (7), равно l, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, а функции (24) однородно алгебраически независимы над $C(z)$, то почти для всех $\xi \in A$ числа (21) однородно алгебраически независимы.

Поэтому, замечая, что степени трансцендентности над $C(z)$ множества функций (5), удовлетворяющих системе (6), и всех h множеств сопряженных с ними функций равны, и что аналогичное утверждение имеет место для максимального числа функций, однородно алгебраически независимых над $C(z)$, среди функций (5), удовлетворяющих системе (7), с помощью теорем 2 и 3 получаем следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть совокупность $I\!E$-функций* (5) *удовлетворяет условиям теоремы 2, или теоремы 3,* $l < m$, *а функции* (24) *однородно алгебраически независимы над* $C(z)$, *соответственно алгебраически независимы над* $C(z)$. *Тогда почти для всех чисел* ξ *поля* I, *выполняются утверждения теоремы 2, или теоремы 3.*

§ 4. Оценки мер значений E-функций, связанных над $C(z)$ алгебраическими уравнениями специального вида.

Теорема 5. *Пусть совокупность $K\!E$-функций* (5), $m \geqslant 3$, *составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений* (7). *Функции* $f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z)$ *однородно алгебраически независимы над* $C(z)$, *а вместе с функцией* $f_m(z)$ *связаны алгебраическим уравнением*

$$\begin{gathered} P(z, f_1(z), \ldots, f_m(z)) = 0, \\ P = P(z, z_1, \ldots, z_m) \in C[z, z_1, \ldots, z_m], \\ P \not\equiv 0, \quad \deg_{z_1,\ldots,z_m} P = k, \end{gathered} \tag{37}$$

где P — *однородный неприводимый многочлен, а* $A(z)$ — *многочлен, являющийся коэффициентом при старшем члене многочлена* P *в лексикографическом расположении членов* P *по степеням* $f_m(z), \ldots, f_1(z)$. *Далее,* $\xi \in K$, $\xi T^0(\xi) A(\xi) \neq 0$. *Тогда выполняются неравенства*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant h} |g^0_{K_i}(f_{1,i}(\xi_i), \ldots, f_{m-1,i}(\xi_i))| > CH^{-k(m-1)(n+1)^{m-2}}, \tag{38}$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant h} \left| g^0_{K_i}\left(\frac{f_{1,i}(\xi_i)}{f_{m-1,i}(\xi_i)}, \ldots, \frac{f_{m-2,i}(\xi_i)}{f_{m-1,i}(\xi_i)}\right)\right| > C_0 H^{-k(m-1)(n+1)^{m-2}}, \tag{39}$$

а если $K = I$, *то неравенства*

$$\Phi^0_I(f_1(\xi), \ldots, f_{m-1}(\xi); n; H) > CH^{-k(m-1)(n+1)^{m-2}}, \tag{40}$$

$$\Phi_I\left(\frac{f_1(\xi)}{f_{m-1}(\xi)}, \ldots, \frac{f_{m-2}(\xi)}{f_{m-1}(\xi)}; n; H\right) > CH^{-k(m-1)(n+1)^{m-2}}. \tag{41}$$

Замечание. В неравенствах (38)–(41) показатель при H можно заменить на $-M$, где

$$M = \begin{cases} \dfrac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!} - \dfrac{(n-k+m-1)!}{(n-k)!(m-1)!}, & \text{если } n \geqslant k, \\ \dfrac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}, & \text{если } n < k. \end{cases} \tag{42}$$

Доказательство теоремы 5. Пусть

$$A(z) f_m^{\bar{k}_m}(z) \ldots f_1^{\bar{k}_1}(z), \quad \bar{k}_m \geqslant 1,$$

старший член многочлена P. Рассмотрим подмножество B произведений степеней (26), у которых показатель k_s хотя бы при одном значении s, $1 \leqslant s \leqslant m$, удовлетворяет неравенству $k_s < \bar{k}_s$. С помощью уравнения (37) легко убеждаемся, что элементы множеств B образуют базис линейного пространства L над $\boldsymbol{C}(z)$, порожденного функциями (26).

С помощью уравнения (37) и леммы 6 также находим, что при $n \geqslant k$ каждая из функций (26), не вошедшая во множество B, линейно выражается через элементы множества B с коэффициентами из $\boldsymbol{K}$, полюса которых могут быть только нулями $A(z)$. А тогда с помощью леммы 1 получаем, что все M функции множества B, где M определено равенством (42), составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений вида (7), в которой число m заменено числом M, а коэффициенты принадлежат $\boldsymbol{K}(z)$, и которая не имеет особых точек, отличных от полюсов коэффициентов исходной системы (7) и нулей $A(z)$.

Тогда утверждения теоремы 5 следуют из теоремы 1, в которой число m заменено числом M, а число ε фиксировано, так как среди элементов B содержатся все произведения степеней (26), показатели которых удовлетворяют условию $k_1 + \ldots + k_{m-1} = n$, $k_m = 0$. При этом надо только заметить, что при $n \geqslant k$

$$M = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{n}{m-1}+1\right)\left[1-\left(1-\frac{k}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k}{n+m-1}\right)\right] <$$

$$< (n+1)^{m-1} k\left(\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{n+m-1}\right) < k(m-1)(n+1)^{m-2},$$

а при $n < k$

$$M < (n+1)^{m-1} \leqslant k(n+1)^{m-2}.$$

Теорема 6. *Пусть совокупность KE-функций (5), $m \geqslant 2$, составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (6). Функции $f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z)$ алгебраически независимы над $\boldsymbol{C}(z)$, а вместе с функцией $f_m(z)$ связаны алгебраическим уравнением (37), где P — неприводимый многочлен, а число ξ и многочлен $A(z)$ для однородных членов P старшей степени имеют тот же смысл, что и в теореме 5. Тогда выполняется неравенство*

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant h} \left|g_{\boldsymbol{K}_i}\big(f_{1,i}(\xi_i), \ldots, f_{m-1,i}(\xi_i)\big)\right| > CH^{-km(n+1)^{m-1}}, \tag{43}$$

а если $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$, то неравенство

$$\Phi_{\boldsymbol{I}}\big(f_1(\xi), \ldots, f_{m-1}(\xi); n; H\big) > CH^{-km(n+1)^{m-1}}. \tag{44}$$

Замечание. В неравенствах (43) и (44) показатель при H можно заменить на $-M$, где M определено равенством

$$M = \begin{cases} \dfrac{(n+m)!}{n!\,m!} - \dfrac{(n-k+m)!}{(n-k)!\,m!}, & \text{если } n \geqslant k, \\ \dfrac{(n+m)!}{n!\,m!}, & \text{если } n < k. \end{cases}$$

Теорема 6 следует из теоремы 5.

Замечание. Из теорем 5 и 6 получаем, что значения рассматриваемых в них IE-функций, стоящих под знаком соответствующих мер, однородно алгебраически независимы и, соответственно, алгебраически независимы.

Теорема 7. *Пусть совокупность KE-функций (5), $m \geqslant 2$, составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (7), функции (24), $2 \leqslant l < m-1$, однородно алгебраически независимы над $\boldsymbol{C}(z)$, а функции*

$$f_{l+1}(z), \ldots, f_m(z) \tag{45}$$

связаны с функциями (24) однородными алгебраическими уравнениями

$$\begin{gathered} P_\nu\big(f_1(z), \ldots, f_\nu(z)\big) = 0, \\ P_\nu = P_\nu(z_1, \ldots, z_\nu) \in \boldsymbol{C}[z_1, \ldots, z_\nu], \quad P \not\equiv 0, \quad \nu = l+1, \ldots, m, \end{gathered} \tag{46}$$

где P_ν — однородный неприводимый многочлен, содержащий $f_\nu(z)$. Далее, $\xi \in \boldsymbol{K}$, $\xi T^0(\xi) \neq 0$. Тогда выполняются неравенства

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant h} \left|g^0_{\boldsymbol{K}_i}\big(f_{1,i}(\xi_i), \ldots, f_{l,i}(\xi_i)\big)\right| > CH^{-\gamma n^{l-1}}, \tag{47}$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant h} \left|g^0_{\boldsymbol{K}_i}\left(\frac{f_{1,i}(\xi_i)}{f_{l,i}(\xi_i)}, \ldots, \frac{f_{l-1,i}(\xi_i)}{f_{l,i}(\xi_i)}\right)\right| > C_0 H^{-\gamma n^{l-1}}, \tag{48}$$

а в случае $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$ неравенства (22) и (23).

Доказательство. Если сформулировать однородный аналог теоремы 2 работы [7], то он доказывается дословно аналогично доказательству этой теоремы. Поэтому числа (21) однородно алгебраически независимы над $\boldsymbol{K}$. Значит в случае $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$ по теореме 2 выполняются неравенства (22) и (23).

В случае произвольного поля $\boldsymbol{K}$ неравенства (47) и (48) доказываются рассуждениями, аналогичными тем, которыми была доказана теорема 2, с использованием теоремы 1. При этом надо только заметить, что при условиях теоремы 7 максимальное число однородно алгебраически независимых функций среди функций (5), как относительно поля $\boldsymbol{C}(z)$, так и относительно поля $\boldsymbol{C}$ равно l и поэтому ранги линейных векторных пространств, порожденных множеством функций (26) относительно полей $C(z)$ и C, также равны. Это легко доказывается с помощью свойств алгебраической независимости. Поэтому в правых частях равенств (31) $D_{i,j}$ будут постоянными, а по лемме 5 числами из поля K.

Теорема 8. *Пусть совокупность KE-функций* (5), $m\geqslant 2$, *составлят решение системы линейных дифференциальных уравнений* (6), *функции* (24), $1\leqslant l\leqslant m-1$, *алгебраически независимы над* $C(z)$, *а функции* (45) *связаны с функциями* (24) *алгебраическими уравнениями* (46), *где* P_ν — *неприводимый многочлен, содержащий* $f_\nu(z)$. *Далее,* $\xi\in K$, $\xi T(\xi)\neq 0$. *Тогда выполняется неравенство*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant h}|g_{K_i}(f_{1,i}(\xi_i),\ldots,f_{l,i}(\xi_i))|>CH^{-\gamma n^l}, \tag{49}$$

а в случае $K=I$ *неравенство* (36).

Теорема 8 следует из теоремы 7.

Теорема 9. *Пусть IE-функции* (5), $m\geqslant 3$, *составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений* (7), *функции* (24), $2\leqslant l\leqslant m-1$, *однородно алгебраически независимы над* $C(z)$, *а функции* (45) *связаны с функциями* (24) *однородными алгебраическими уравнениями*

$$P_\nu(z,f_1(z),\ldots,f_\nu(z))=0, \tag{50}$$

$$P_\nu=P_\nu(z,z_1,\ldots,z_\nu)\in C[z,z_1,\ldots,z_\nu],\quad P\not\equiv 0,\quad \nu=l+1,\ldots,m,$$

где P_ν — *однородный неприводимый многочлен,* $\deg P_\nu=s_\nu$ *по* $z_1,\ldots,z_\nu$, *такой, что он содержит член*

$$A_\nu(z)z_\nu^{s_\nu},\quad A_\nu(z)\in C[z],\quad A_\nu(z)\not\equiv 0,\quad \nu=l+1,\ldots,m. \tag{51}$$

Далее, $\xi\in K$, $\xi T^0(\xi)A_{l+1}(\xi)\ldots A_m(\xi)\neq 0$. *Тогда выполняются неравенства* (22) *и* (23).

Утверждение теоремы 9 следует из теоремы 2, если воспользоваться однородным аналогом теоремы 1 работы [7].

Теорема 10. *Пусть IE-функции* (5), $m\geqslant 2$, *составляют решение системы линейных дифференциальных уравнений* (6), *функции* (24), $1\leqslant l\leqslant m-1$, *алгебраически независимы над* $C(z)$, *а функции* (45) *связаны с функциями* (24) *алгебраическими уравнениями* (50), *где* P_ν — *неприводимый многочлен,* $\deg P=s_\nu$ *по* $z_1,\ldots,z_\nu$, *такой, что среди его однородных членов старшей степени* s_ν *содержится член* (51). *Далее,* $\xi\in K$, *а* $\xi T(\xi)A_{l+1}(\xi)\ldots A_m(\xi)\neq 0$. *Тогда выполняется неравенство* (36).

Теорема 10 следует из теоремы 9, или доказывается аналогично теореме 9 с помощью теоремы 1 работы [7] и теоремы 3.

§ 5. Оценки мер значений E-функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $C(z)$. Рассмотрим KE-функции (5) и произвольное множество D, являющееся подмножеством множества всевозможных произведений степеней

$$f_m^{k_m}(z)\ldots f_1^{k_1}(z),\quad k_i\geqslant 0,\quad k_i\in Z,\quad i=1,\ldots,m, \tag{52}$$

которое упорядочим следующим образом. Старшими по порядку будем считать члены, у которых сумма $k_1+\ldots+k_m$ больше, а каждую совокупность однородных членов одной и той же степени упорядочим в порядке лексикографического расположения по степеням $f_m(z),\ldots,f_1(z)$.

Условимся также всякое алгебраическое уравнение между функциями (5) над $C(z)$ записывать в порядке принятого упорядочения с коэффициентами из $C(z)$, взаимно простыми в совокупности.

Определение. Элемент

$$f_m^{\bar k_m}(z)\ldots f_1^{\bar k_1}(z) \tag{53}$$

множества D назовем *минимальным*, если для любого другого элемента (52) из D существует i, $1\leqslant i\leqslant m$, такое, что выполняется неравенство $\bar k_i<k_i$.

В работе В. А. Олейникова [15] при несколько более общих предположениях относительно множества D доказано:

1°. Во всяком множестве D множество D_1 его минимальных элементов не пусто и конечно.

2°. Для любого элемента (52) множества D в его подмножестве D_1 найдется элемент (53) такой, что выполняется неравенство $\bar k_i\leqslant k_i$, $i=1,\ldots,m$.

Предположим, что функции (5) однородно алгебраически зависимы над $C(z)$. Рассмотрим совокупность всевозможных однородных алгебраических уравнений между этими функциями над $C(z)$. Пусть множество D есть множество различных произведений степеней функций (5), входящих в старшие члены этих уравнений.

По 1° во множестве D содержится конечное подмножество D_1 его минимальных элементов

$$f_m^{\bar k_{m,1}}(z)\ldots f_1^{\bar k_{1,1}}(z),\ \ldots,\ f_m^{\bar k_{m,s}}(z)\ldots f_1^{\bar k_{1,s}}(z). \tag{54}$$

По 2° любой элемент (52) из D удовлетворяет при некотором j, $1\leqslant j\leqslant s$, неравенствам

$$k_m\geqslant \bar k_{m,j},\ \ldots,\ k_1\geqslant \bar k_{1,j}. \tag{55}$$

Обозначим через L множество элементов (26), а через B множество элементов из L, не удовлетворяющих неравенствам (55) ни при каком

j, $1 \leqslant j \leqslant s$, т.е. таких, что для любого элемента (52) из B при каждом j, $j = 1, \ldots, s$, найдется индекс i такой, что $k_i < \bar{k}_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

В работе [15], в неоднородном случае, доказано, что множество B есть базис векторного пространства L, порожденного функциями (26) над $\boldsymbol{C}(z)$. В однородном случае доказательство дословно аналогично.

Если обозначить через $r^0_{n,l}$ число элементов базиса B, то по лемме 3 при $n \geqslant N_0$ имеет место равенство (32).

Однородные алгебраические уравнения между функциями (5) над $\boldsymbol{C}(z)$, старшие члены которых являются минимальными элементами (54) с коэффициентами из $\boldsymbol{C}[z]$ будем называть минимальными однородными уравнениями для функций (5) над $\boldsymbol{C}(z)$.

Аналогично, если рассмотреть множество всех алгебраических уравнений (не только однородных), связывающих функции (5) над $\boldsymbol{C}(z)$, мы получим конечную совокупность минимальных уравнений для функций (5) над $\boldsymbol{C}(z)$ с такими же свойствами, как и для однородных минимальных уравнений. С помощью минимальных уравнений для векторного пространства, порожденного произведениями степеней (25), выделяется базис B, состоящий при $n \geqslant N_0$ из $r_{n,l}$ элементов, $r_{n,l} = \gamma_l n^l + \ldots + \gamma_1 n + \gamma_0$, $\gamma_l > 0$.

Теорема 11. *Пусть совокупность KE-функций (5), $m \geqslant 3$, составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (7). Среди этих функций максимальное число не связанных однородным алгебраическим уравнением над $\boldsymbol{C}(z)$ равно l, $2 \leqslant l \leqslant m-1$, а функции (24) не связаны таким уравнением. Далее*

$$A_1(z) f_m^{\bar{k}_{m,1}}(z) \ldots f_1^{\bar{k}_{1,1}}(z), \; \ldots, \; A_s f_m^{\bar{k}_{m,s}}(z) \ldots f_1^{\bar{k}_{1,s}}(z), \tag{56}$$

совокупность старших членов минимальных однородных уравнений функций (5) над $\boldsymbol{C}(z)$, а $\xi \in \boldsymbol{K}$, $\xi T^0(\xi) A_1(\xi) \ldots A_s(\xi) \neq 0$. Тогда выполняются неравенства (47) и (48), а в случае $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$ неравенства (22) и (23).

Доказательство. Рассмотрим множество L (26) произведений степеней функций (5) и совокупность минимальных однородных уравнений функций (5) над $\boldsymbol{C}(z)$. Пусть множество B есть базис L, рассмотренный выше, а $r^0_{n,l}$ — число его элементов. Если $r^0_{n,l} < \varrho_{n,m}$, то ввиду леммы 5, каждый элемент L, не вошедший в B, с помощью одного из соответствующих ему минимальных уравнений можно представить в виде линейной комбинации элементов L низшего порядка с коэффициентами из $\boldsymbol{K}(z)$, полюса которых могут быть только нулями многочленов $A_1(z), \ldots, A_s(z)$ — коэффициентов старших членов минимальных однородных уравнений (56).

Отсюда легко следует, что каждый элемент L, не вошедший в B, представляется в виде линейной комбинации элементов базиса B с коэффициентами из $\boldsymbol{K}(z)$, полюса которых могут быть только нулями многочленов $A_1(z), \ldots, A_s(z)$ в (56).

Тогда выбирая из системы линейных однородных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяет совокупность функций (26) те, левые части которых являются производными элементов базиса B, и заменяя в их правых частях функции из L, не вошедшие в B, на соответствующие им выше линейные комбинации элементов множества B, получим, что $r^0_{n,l}$ функций множества B удовлетворяют системе линейных однородных дифференциальных уравнений вида (7), в которой число m заменено на $r^0_{n,l}$. Коэффициенты этой системы принадлежат $\boldsymbol{K}(z)$ и не имеют полюсов, отличных от полюсов системы (7), которой удовлетворяют функции (5), и нулей всех многочленов $A_1(z), \ldots, A_s(z)$ в (56).

Тогда по теореме 1, примененной к совокупности функций (26), выполняются все утверждения теоремы 11, так как совокупность функций

$$f_1^{k_1}(z) \ldots f_l^{k_l}(z), \qquad k_1 + \ldots + k_l = n,$$

входит в состав базиса B.

Теорема 12. *Пусть совокупность KE-функций (5), $m \geqslant 2$, составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (6). Степень трансцендентности множества функций (5) относительно $\boldsymbol{C}(z)$ равна l, $1 \leqslant l \leqslant m-1$, а функции (24) алгебраически независимы над $\boldsymbol{C}(z)$. Далее, (56) — совокупность старших членов минимальных уравнений функций (5) над $\boldsymbol{C}(z)$, а $\xi \in \boldsymbol{K}$, $\xi T(\xi) A_1(\xi) \ldots A_s(\xi) \neq 0$. Тогда выполняется неравенство (49), а в случае $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{I}$ неравенство (36).*

Теорема 12 следует из теоремы 11.

Отметим, что результат об алгебраической независимости значений функций, стоящих под знаком меры в (36), в случае теоремы 12 был получен В. Г. Чирским [16].

Если в теоремах 11 и 12 менять нумерацию функций $f_{l+1}(z), \ldots, f_m(z)$, то старшие члены в минимальных уравнениях могут меняться и поэтому множество исключительных точек, в которых утверждения теорем не гарантируются, могут, вообще говоря, меняться. Если известны минимальные уравнения, то рассмотрев все возможные нумерации этих функций, можно, быть может, сократить число исключительных точек.

Заметим, что система дифференциальных уравнений (6) может быть и однородной, когда $Q_{k,0} = 0$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому в теоремах 3, 6, 8, 10, 12 рассматривается случай, когда совокупность функций (5) удовлетворяет как неоднородной, так и однородной системе дифференциальных уравнений.

Заметим также, что все теоремы 1–12 можно переформулировать на тот случай, когда вместо KE-функций (5) рассматриваются функции $f(z), f'(z), \ldots, f^{(m-1)}(z)$, где KE-функция $f(z)$ есть решение дифференциального уравнения

$$P_m y^{(m)} + \ldots + P_1 y' + P_0 y = Q, \quad Q, P_0, P_1, \ldots, P_m \in C(z),$$

или, соответственно, однородного уравнения

$$P_m y^{(m)} + \ldots + P_1 y' + P_0 y = 0.$$

§ 6. Некоторые примеры к доказанным теоремам. Рассмотрим E-функции

$$\operatorname{si} z = \int_0^z \frac{\sin t}{t}\, dt, \quad \operatorname{ci} z = \int_0^z \frac{1-\cos t}{t}\, dt.$$

В статье [17] доказано, что как функции $\operatorname{si} z$ и $\sin z$, так и функции $\operatorname{ci} z$ и $\cos z$, алгебраически независимы над $C(z)$. Поэтому рассматривая тройки функций

$$\operatorname{si} z, \sin z, \cos z, \quad \operatorname{ci} z, \cos z, \sin z,$$

каждая из которых связана уравнением $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ и удовлетворяет соответствующей системе дифференциальных уравнений

$$y_1' = y_2/z, \quad y_2' = y_3, \quad y_3' = -y_2.$$
$$y_1' = (1-y_2)/z, \quad y_2' = -y_3, \quad y_3' = y_2,$$

по теореме 6 получаем неравенства

$$\Phi_I(\operatorname{si}\xi, \sin\xi; n; H) > CH^{-(n+1)^2}, \quad \xi \in I, \ \xi \neq 0,$$
$$\Phi_I(\operatorname{ci}\xi, \cos\xi; n; H) > CH^{-(n+1)^2}, \quad \xi \in I, \ \xi \neq 0.$$

Аналогично, используя результаты статьи [17], получаем

$$\Phi_I\Big(\int_0^\xi \sin t^2\, dt, \sin\xi^2; n; H\Big) > CH^{-(n+1)^2}, \quad \xi \in I, \ \xi \neq 0,$$

$$\Phi_I\Big(\int_0^\xi \cos t^2\, dt, \cos\xi^2; n; H\Big) > CH^{-(n+1)^2}, \quad \xi \in I, \ \xi \neq 0.$$

Рассмотрим функции

$$\varphi_s(z) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!(2n)^s}, \quad s = 0, 1, \ldots, m,$$

где $\varphi_0(z) = \cos z$. В статье [17] доказано, что эти функции алгебраически независимы над $C(z)$, а с функцией $\sin z$ связаны уравнением

$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ и удовлетворяют системе из $m+2$ линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $C(z)$ с особой точкой $z = 0$. Поэтому по теореме 6 имеем

$$\Phi_I(\varphi_0(\xi), \varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_m(\xi); n; H) > CH^{-2(m+2)n^{m+1}}, \quad \xi \in I, \ \xi \neq 0.$$

Рассмотрим функции

$$K_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(\lambda+1)\ldots(\lambda+n)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}, \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots, \lambda \in Q.$$

Из результатов К. Зигеля [4] следует, что если $\lambda_1, \lambda_2 \in Q$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq -1, \pm 1/2, -2, \pm 3/2, \ldots$, и $\lambda_1 \pm \lambda_2 \notin Z$, то четыре числа $K_{\lambda_1}(\xi)$, $K'_{\lambda_1}(\xi)$, $K_{\lambda_2}(\xi)$, $K'_{\lambda_2}(\xi)$ алгебраически независимы при любом $\xi \in A$, $\xi \neq 0$.

Если рассмотреть функции $K_\lambda(z)$ и $K_{-\lambda}(z)$, $\lambda \in Q$, $\lambda \neq 0, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \ldots$, то оказывается, что четыре функции $K_\lambda(z)$, $K'_\lambda(z)$, $K_{-\lambda}(z)$, $K'_{-\lambda}(z)$ алгебраически зависимы над $C(z)$ и связаны уравнением

$$K_\lambda(z)K'_{-\lambda}(z) - K'_\lambda(z)K_{-\lambda}(z) + \frac{2\lambda}{z}K_\lambda(z)K_{-\lambda}(z) + \frac{2\lambda}{z} = 0,$$

(см. [7]). Но из работы К. Зигеля следует, что любые три из этих функций алгебраически независимы над $C(z)$.

Положим $y_1 = K_\lambda(z)$, $y_2 = K'_\lambda(z)$, $y_3 = K_{-\lambda}(z)$, $y_4 = K'_{-\lambda}(z)$. Эти функции удовлетворяют системе уравнений

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -\frac{2\lambda+1}{z} y_2 - y_1,$$

$$y_3' = y_4, \quad y_4' = -\frac{2\lambda-1}{z} y_4 - y_3.$$

Обозначим через $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \varphi_3(z)$ любые три из этих функций. Тогда по теореме 6 находим

$$\Phi_I(\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \varphi_3(\xi); n; H) > CH^{-(n+1)(n+2)(2n+3)/6}, \quad \xi \in I, \ \xi \neq 0.$$

Число приложений общих теорем настоящей работы к конкретным функциям можно значительно увеличить.

Замечание при корректуре. Оценивая M в теоремах 5 и 6 точнее, легко убедиться, что в неравенствах (40) и (41) в показателе $(n+1)^{m-2}$ можно заменить на n^{m-2}, а в неравенствах (43) и (44), аналогично, $(n+1)^{m-1}$ на n^{m-1}.

Литература

[1] Н. И. Фельдман, А. Б. Шидловский, *Развитие и современное состояние теории трансцендентных чисел*, Успехи матем. наук 22, 3 (1967), стр. 3–81.
[2] А. Б. Шидловский, *Об арифметических свойствах значений аналитических*

функций, Труды МИАН СССР им. В. А. Стеклова 132 (1973), стр. 169–202.

[3] — *Об оценке меры трансцендентности значений E-функций*, Матем. заметки 2, 1 (1967), стр. 33–44.

[4] C. L. Siegel, *Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen*, Abhand. preuß. Akad. Wiss., 1 (1929–1930), стр. 1–70.

[5] — *Transcendental numbers*, Princeton 1949.

[6] А. Б. Шидловский, *О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций*, Изв. АН СССР, серия матем., 23, 1 (1959), стр. 35–66.

[7] — *О трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций, связанных любым числом алгебраических уравнений в поле рациональных функций*, ibid. 26, 6 (1962), стр. 877–910.

[8] — *К общей теореме об алгебраической независимости значений E-функций*, ДАН СССР 171, 4 (1966), стр. 810–813.

[9] — *Трансцендентность значений E-функций*, Труды IV Всес. матем. съезда 2 (1964), стр. 147–158.

[10] S. Lang, *A transcendence measure for E-functions*, Mathematika 9 (1962), стр. 157–161.

[11] А. И. Галочкин, *Оценка меры взаимной трансцендентности значений E-функций*, Матем. заметки 3, 4 (1968), стр. 377–386.

[12] А. Б. Шидловский, *Об оценках меры трансцендентности значений E-функций*, Вестник МГУ, матем., механика, 6 (1977), стр. 3–10.

[13] Ю. В. Нестеренко, *Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложения в теории трансцендентных чисел*, Изв. АН СССР, серия матем., 41, 2 (1977), стр. 53–84.

[14] А. Б. Шидловский, *Об оценках меры трансцендентности значений E-функций*, Успехи матем. наук 22, 3 (1967), стр. 245–246.

[15] В. А. Олейников, *О некоторых свойствах алгебраически зависимых величин*, Вестник МГУ, матем., механика, 5 (1962), стр. 11–17.

[16] В. Г. Чирский, *Об арифметических свойствах значений аналитических функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций*, Матем. заметки 14, 1 (1973), стр. 83–94.

[17] А. Б. Шидловский, *О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций*, Вестник МГУ, матем. механика, 5 (1961), стр. 44–59.

Поступило 5. 7. 1978
в исправленной форме 14. 11. 1978 (1087)

Wacław Sierpiński

OEUVRES CHOISIES

Tome I: BIBLIOGRAPHIE, THÉORIE DES NOMBRES ET ANALYSE MATHÉMATIQUE

1974, 300 p.

Tome II: THÉORIE DES ENSEMBLES ET SES APPLICATIONS TRAVAUX DES ANNÉES 1908–1929

1975, 780 p.

Tome III: THÉORIE DES ENSEMBLES ET SES APPLICATIONS TRAVAUX DES ANNÉES 1930–1966

1976, 688 p.

Les oeuvres choisies de Wacław Sierpiński sont réunies en trois volumes dont le premier contient les travaux sur la Théorie des Nombres et l'Analyse Mathématique et les deux autres — ceux de la Théorie des Ensembles et ses applications.

La liste complète des travaux scientifiques de Wacław Sierpiński en comporte 724. Les travaux choisis pour être publiés se distinguent soit par leur actualité, soit par leur importance pour le développement des mathématiques, soit encore par la beauté intrinsèque des résultats obtenus et des méthodes employées.

Stefan Banach

OEUVRES

Volume II

TRAVAUX SUR L'ANALYSE FONCTIONNELLE

470 p., relié

Ce volume contient tous les travaux d'analyse fonctionnelle de Stefan Banach, ainsi que son fondamental traité „Théorie des opérations linéaires" et une bibliographie de ses écrits. Une ample étude de Aleksander Pełczyński présente une revue des recherches relatives aux parties de l'analyse fonctionnelle qui ont eu pour de point de départ le traité de Banach et les résultats qui y son exposés.

Juliusz Paweł Schauder

OEUVRES

487 p., relié

De 1918 á 1940 Juliusz Paweł Schauder appartenait aux remarquables représentants de l'école mathématique créée par Stefan Banach et Hugo Steinhaus. Son théorème sur le point fixe, les bases dans les espaces vectoriels normés, introduites par lui, ainsi que les résultats précurseurs de ses recherches dans le domaine des équations différentielles partielles élliptiques et hyperboliques, composant un fond durable à l'analyse mathématique.

Ce volume contient les ouvrages de Schauder. Les résultats sont publiés en allemand, français et anglais.

To be ordered at your bookseller or directly at ARS POLONA, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa (Poland)

Sprzedaż numerów bieżących i archiwalnych w księgarni Ośrodka Rozpowszechniania Wydawnictw Naukowych PAN, ORPAN, Pałac Kultury i Nauki, 00-901 Warszawa

ISBN 83-01-01332-X ISSN 0065-1036