ACTA ARITHMETICA
XXXVII (1980)

Метод сглаживания в задачах варинговского типа

Б. М. Бредихин, Т. И. Гришина (Куйбышев)

Введение. В работах [1]–[5] показано, что решение аддитивных задач типа тернарной проблемы Гольдбаха может быть осуществлено с помощью метода сглаживания, который применяется непосредственно к исследуемому уравнению, минуя интегралы и тригонометрические суммы. Этот метод базируется на двух фундаментальных идеях: на идее И. М. Виноградова по сглаживанию сумм и на идее Ю. В. Линника по составлению дисперсии для уравнений.

В работе [6] рассмотрено применение метода сглаживания к нелинейным аддитивным задачам смешанного типа, среди которых, находится известная задача о представлении натуральных чисел суммою двух простых и фиксированной степени натурального числа. Решение задач смешанного типа основано на эвристическом принципе и соединении метода сглаживания с элементарной модификацией метода линеаризации Г. Вейля.

Применение метода сглаживания в нелинейных аддитивных задачах типа классической проблемы Варинга представляет особый интерес, так как при решении этих проблем в ряде случаев удается полная элементаризация доказательств. На этом пути авторы разработали (см. [7] и [8]) элементарный метод доказательства классической теоремы И. М. Виноградова об оценке $\mathscr{G}(n)$ в проблеме Варинга.

В проблеме Варинга речь идет о разрешимости уравнения

$$x_1^n+x_2^n+\ldots+x_k^n = N \tag{0.1}$$

в целых положительных числах x_i для любого заданного натурального числа N при фиксированных натуральных числах n и $k = k(n)$, $n \geqslant 3$.

В настоящей работе метод сглаживания распространяется на уравнения варинговского типа

$$a_1x_1^n+a_2x_2^n+\ldots+a_rx_r^n = N, \tag{0.2}$$

где N — заданное достаточно большое натуральное число, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — заданные попарно взаимно-простые натуральные числа, x_i — целые положительные числа.

Пусть $\mathscr{G}_2(n)$ — наименьшее значение k, при котором уравнение (0.2) разрешимо при всех $N \geqslant N_0$, где $N_0 = N_0(n)$. Аналогично определяется $\mathscr{G}_1(n)$ для уравнения (0.1).

Рассмотрим сравнение

$$a_1x_1^n + a_2x_2^n + \ldots + a_kx_k^n \equiv N \pmod{p^m}. \tag{0.3}$$

Пусть $\Gamma_0(n)$ — наименьшее значение k такое, что сравнение (0.3) при любом простом p и натуральном m примитивно разрешимо для всякого натурального N. Примитивность решения $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0)$ означает, что не все компоненты решения делятся на p.

Имеют место следующие оценки:

Теорема A.

$$\mathscr{G}_2(n) = O\big(\Gamma_2(n) + n\ln n\big). \tag{0.4}$$

Теорема B (И. М. Виноградов [9] и [10]).

$$\mathscr{G}_1(n) = O(n\ln n). \tag{0.5}$$

Теорема B является прямым следствием теоремы A при $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$, так как $\Gamma_2(n)$ в этом случае будет величиной порядка $O(n)$.

Целью этой работы является элементарное доказательство теоремы A с помощью метода сглаживания. Оно вполне аналогично элементарному доказательству теоремы B, сообщение о котором имеется в работах [7] и [8].

1. Обозначения и леммы. Можем считать, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k$. Следуя сначала схеме И. М. Виноградова [9], обозначим через $Q(N)$ число решений уравнения

$$a_1x_1^n + a_2x_2^n + \ldots + a_rx_r^n + D_1' + D_2' + \nu^n D_3' = N, \tag{1.1}$$

где $r = \max\{4n, \Gamma_2(n)\}$, x_i — натуральные, D_1', D_2' и D_3' — числа Харди–Литлвуда. Последние числа строятся известным элементарным способом (см. [11]): $D_1' = a_{r+1}y_1^n + \ldots + a_{r+r_1}y_{r_1}^n$, $D_1' \leqslant N_1$, натуральные числа $y_1, \ldots, y_{r_1}$ изменяются в таких непересекающихся интервалах из сегмента $[1, N_1^{1/n}]$, что числа D_1' не повторяются и количество чисел D_1' в сегменте $[1, N_1]$, будет $\geqslant c_1N_1^{1-(1-1/n)^{r_1}}$, где константа c_1 может зависеть только от $r, n, a_{r+1}, \ldots, a_{r+r_1}$.

При $r_1 = [2n\ln n + c_2n]$ это количество будет $\geqslant c_1N^{1-1/c_3n^2}$, где $c_2 > 0$ и $c_3 = c_3(c_2) > 0$ — большие константы.

Аналогично определяются числа

$$D_2' = a_{r+r_1+1}z_1^n + \ldots + a_{r+r_1+r_2}z_{r_2}^n, \qquad D_2' \leqslant N_2,$$
$$D_3' = a_{r+r_1+r_2+1}u_1^n + \ldots + a_{r+r_1+r_2+r_3}u_{r_3}^n, \qquad D_3' \leqslant N_3.$$

За $N_1 = N_2$ выберем $[\frac{1}{4}N]$, за N_3 принимаем $[\frac{1}{4}N^{1-\varepsilon_1}]$, $6/c_3n^2 < \varepsilon_1 < 1$.

Переменная ν пробегает натуральные значения, удовлетворяющие условию: $\nu^n \leqslant N^{\varepsilon_1}$. Следовательно, $\nu^n D_3' \leqslant \frac{1}{4}N$.

Обозначим через $Q_0(N)$, число решений уравнения

$$a_1x_1^n + a_2x_2^n + \ldots + a_rx_r^n + D_1' + D_2' + \nu^n D_3' + \frac{q}{d}\,t = N, \tag{1.2}$$

где выполняются все условия из (1.1) и накладывается дополнительное условие на переменное t, принимающее натуральные значения: $\frac{q}{d}t \leqslant N_0 = N^{1-\varepsilon_2}$, $0 < \varepsilon_2 < 1$. Числа q и d — пока фиксированные натуральные числа, $d|q$. Положим $q_0 = [N^{\varepsilon_1}]$. Выбор чисел ε_1 и ε_2 будет уточнен позднее.

Пусть

$$Q_1(N) = \frac{1}{N_0}\sum_{q=1}^{q_0}\sum_{d|q}\mu(d)\frac{q}{d}Q_0(N). \tag{1.3}$$

Положим

$$V = Q(N) - Q_1(N). \tag{1.4}$$

Введем в рассмотрение конечную сумму

$$\sum_{q=1}^{q_0}\Phi(q), \tag{1.5}$$

где

$$\Phi(q) = \sum_{d|q}\mu(d)\left(\frac{q}{d}\right)^{-(r-1)} \sum_{a_1x_1^n + a_2x_2^n + \cdots + a_rx_r^n \equiv N \left(\mathrm{mod}\,\frac{q}{d}\right)} 1,$$

переменные x_i пробегают полные системы вычетов по $\mathrm{mod}\,(q/d)$, $\mu(d)$ — функция Мёбиуса.

Сумма (1.5) является отрезком особого ряда, появляющегося при решении уравнения (0.2) с помощью кругового метода. Применительно к уравнению (0.1) сумма (1.5) будет отрезком особого ряда Харди–Литлвуда, исследованного ими и другими авторами.

Сформулируем леммы, составляющие основное содержание метода данной работы.

Лемма 1.

$$\sum_{d|m}\mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad m = 1, \\ 0, & \text{если} \quad m \neq 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

Лемма 2. *Пусть $K_r(N)$ — число решений неравенства*

$$a_1x_1^n + a_2x_2^n + \ldots + a_rx_r^n \leqslant N, \tag{1.7}$$

где $x_i > 0$ — целые числа.

Тогда

$$K_r(N) = T_r(n)N^{r/n} + O(N^{r/n-1/n}), \tag{1.8}$$

где константа $T_r(n)$ и константа в символе O зависят только от r, n, $a_1, \ldots, a_r$.

Леммы 1 и 2 общеизвестны.

Лемма 3. *Имеют место оценки:*

$$\Phi(q) = O(q^{-\frac{r}{n}+1+\frac{1}{n}}), \tag{1.9}$$

$$\sum_{q=1}^{a_0} \Phi(q) > c(r, n) > 0. \tag{1.10}$$

Доказательство леммы 3 может быть проведено по схеме из работы [11] с помощью элементарных рациональных тригонометрических сумм. Однако, как мы покажем в дальнейшем, применение тригонометрических сумм не обязательно.

Лемма 4. *При $N \to \infty$*

$$Q_1(N) \geqslant c_0(r, n)N^{\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}-\frac{3}{c_3n^2}}, \tag{1.11}$$

где $c_0(r, n) > 0$.

Лемма 5. *При $N \to \infty$*

$$V = O(N^{\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{2n}}). \tag{1.12}$$

Теорема А немедленно следует из (1.4), (1.11) и (1.12). Нужно только уравнение (0.2) заменить уравнением (1.1) с $k = r+3[2n\ln n + c_2n]$. При этом осуществляется соответствующая группировка слагаемых и вводятся дополнительные условия на область значений переменных, начиная со второй группы слагаемых.

Леммы 4 и 5 представляются нам наиболее интересными, так как они составляют арифметический эквивалент кругового метода: лемма 4 заменяет исследования по „большим дугам", а лемма 5 — исследования по „малым дугам".

2. Исследование особой суммы. При доказательстве леммы 3 будем следовать схеме исследования особого ряда проблемы Варинга, изложенной в монографии [11]. При этом нам надлежит избегать употребления каких либо тригонометрических сумм.

Сначала выведем оценку (1.9).

Из (1.5) следует, что $\Phi(q)$ — мультипликативная функция. Поэтому оценку (1.9) достаточно получить для $q = p^\alpha$, где p — простые, $\alpha > 0$ — целое. Из (1.5) находим, что

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-\alpha(r-1)}M(p^\alpha) - p^{-(\alpha-1)(r-1)}M(p^{\alpha-1}), \tag{2.1}$$

где $M(p^\alpha)$ — число решений сравнения

$$a_1x_1^n + a_2x_2^n + \ldots + a_rx_r^n \equiv N \pmod{p^\alpha}, \quad 1 \leqslant x_i \leqslant p^\alpha. \tag{2.2}$$

Аналогично определяется $M(p^{\alpha-1})$.

Случай $\alpha = 1$ — основной. Имеем в этом случае

$$\Phi(p) = p^{-(r-1)}M(p) - 1.$$

Рассмотрим (2.2) при $\alpha = 1$ и $N \not\equiv 0 \pmod p$. Пусть ни одно из чисел a_i не делится на p.

Сопоставим (2.2) со сравнениями вида

$$a_1x_1^n + a_2x_2^n + \ldots + a_rx_r^n \equiv l \pmod p, \tag{2.3}$$

где $1 \leqslant x_i \leqslant p$, l — фиксированное целое число, $1 \leqslant l \leqslant p-1$.

Пусть $M_l(p)$ — число решений сравнения (2.3). Положим

$$V_l = M(p) - M_l(p). \tag{2.4}$$

Нетрудно видеть, что

$$V_l = \frac{1}{(p-1)^r}\sum_{b_1=1}^{p-1} \ldots \sum_{b_r=1}^{p-1}\Big(\sum_{a_1b_1^nx_1^n+\ldots+a_rb_r^nx_r^n \equiv N \,(\mathrm{mod}\, p)} 1 - \sum_{a_1b_1^nx_1^n+\ldots+a_rb_r^nx_r^n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, p)} 1\Big). \tag{2.5}$$

Воспользуемся тем, хорошо известным фактом, что сравнение n-ой степени по простому модулю не может иметь решений больше, чем степень сравнения.

Полагая $a_ib_i^n \equiv \lambda_i \pmod p$, $1 \leqslant \lambda_i \leqslant p-1$, выполним сглаживание по переменным λ_i. Применяя при этом к (2.5) неравенство Коши–Буняковского, получим

$$V_l^2 \leqslant \frac{n^{2r}}{(p-1)^r}\sum_{\lambda_1=0}^{p-1} \ldots \sum_{\lambda_r=0}^{p-1}\Big(\sum_{\lambda_1x_1^n+\ldots+\lambda_rx_r^n \equiv N \,(\mathrm{mod}\, p)} 1 - \sum_{\lambda_1x_1^n+\ldots+\lambda_rx_r^n \equiv l \,(\mathrm{mod}\, p)} 1\Big)^2.$$

Отсюда

$$V_l^2 \leqslant \frac{n^{2r}}{(p-1)^r}(\Sigma_1 - 2\Sigma_2 + \Sigma_3), \tag{2.6}$$

где Σ_j — число решений системы сравнений

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1^n + \ldots + \lambda_r x_r^n &\equiv s, \\ \lambda_1 y_1^n + \ldots + \lambda_r y_r^n &\equiv s', \end{aligned} \pmod p \tag{2.7}$$

λ_i, x_i, y_i пробегают полные системы вычетов по модулю p, (s, s') одна из пар (N, N), (N, l), (l, l).

Система (2.7) линейна относительно $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$.

При решении этой системы возможны два случая:

1. Все миноры второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1^n & x_2^n & \ldots & x_r^n \\ y_1^n & y_2^n & \ldots & y_r^n \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

будут $\equiv 0 \pmod p$.

Тогда для разрешимости (2.7) необходимо выполнение сравнений

$$s y_i^n \equiv s' x_i^n \pmod p, \quad i = 1, 2, \ldots, r.$$

Поэтому вклад в оценку Σ_j в этом случае будет величиной порядка $p^r \cdot p^{r-1}$.

2. Хотя бы один минор второго порядка матрицы (2.8) будет $\not\equiv 0 \pmod p$. Пусть, например, $x_1^n y_2^n - x_2^n y_1^n \not\equiv 0 \pmod p$.

Для любой такой четверки x_1, x_2, y_1 и y_2 и любых $x_3, \ldots, x_r, y_3, \ldots$ $\ldots, y_r$ мы найдем решение (2.7) с соответствующей парой (λ_1, λ_2). Таким образом вклад в оценку Σ_j во втором случае не будет зависеть от номера j. Следовательно, Σ_1, Σ_2 и Σ_3 будут совпадать с точностью до величины порядка $p^r \cdot p^{r-1}$.

Из (2.6) находим, что

$$V_l = O(p^{(r-1)/2}).$$

Просуммировав (2.4) по $l = 1, 2, \ldots, p-1$, получим

$$M(p) = \frac{1}{p-1}\sum_{l=1}^{p-1} M_l(p) + O(p^{(r-1)/2}).$$

Отсюда с помощью метода математической индукции (по переменной r) выводим оценку

$$M(p) = p^{r-1} + O(p^{(r-1)/2}). \tag{2.9}$$

Если $N \equiv 0 \pmod p$, то с помощью (2.9) получаем для $M(p)$ несколько худшую оценку: $M(p) = p^{r-1} + O(p^{r/2})$.

Условие $a_i \not\equiv 0 \pmod p$ может быть нарушено только для одного значения i, так как $(a_i, a_k) = 1$ для $i \neq k$.

Пусть $a_r \equiv 0 \pmod p$. Тогда

$$M(p) = p \sum_{a_1 x_1^n + \cdots + a_{r-1} x_{r-1}^n \equiv N \pmod p} 1,$$

где ни одно из чисел a_i не делится на p.

Из предыдущих рассуждений следует, что

$$M(p) = p[p^{r-2} + O(p^{(r-1)/2})] = p^{r-1} + O(p^{(r+1)/2}).$$

В результате имеем

$$\Phi(p) = O(p^{-\frac{r}{n}+1+\frac{1}{n}}).$$

Тем самым оценка (1.9) доказана при $q = p^\alpha$, $\alpha = 1$.

Рассмотрим (2.2) при $\alpha > 1$ и $(p, n) = 1$. Пусть опять ни одно из чисел a_i не делится на p.

Положим $\Phi(p^\alpha) = \Phi_1(p^\alpha) + \Phi_2(p^\alpha)$, где $\Phi_i(p^\alpha)$ $(i = 1, 2)$ определяется из (2.1) соответственно тому, будут ли в (2.2) все $x_i \equiv 0 \pmod p$ или нет. С помощью подстановки в (2.2) $x_i = z_i + p^{\alpha-1} y_i$, где $1 \leqslant y_i \leqslant p$ и $1 \leqslant z_i \leqslant p^{\alpha-1}$, нетрудно показать, что $\Phi_2(p^\alpha) = 0$.

Рассматривая $\Phi_1(p^\alpha)$, где должно выполняться условие $N \equiv 0 \pmod p$, мы будем осуществлять последовательные сокращения на p^n. Сумма типа Φ_1 расщепляется каждый раз на сумму такого же вида и на сумму типа Φ_2. В конце концов мы придем к сумме $\Phi_1(p^{\alpha'})$ с $\alpha' \leqslant n$. Эта сумма оценивается без труда.

В рассматриваемом случае приходим к неравенству

$$\Phi(p^\alpha) = O(p^{-\alpha(\frac{r}{n}-1)}).$$

Если же $a_i \equiv 0 \pmod p$ для одного из значений i (пусть для $i = r$), то (2.1) преобразуется к виду

$$\Phi(p^\alpha) = p^{-\alpha(r-2)} M(p^\alpha) - p^{-(\alpha-1)(r-2)} M(p^{\alpha-1}),$$

где $M(p^\alpha)$ — число решений сравнения $a_1 x_1^n + \ldots + a_{r-1} x_{r-1}^n \equiv N \pmod{p^\alpha}$, $1 \leqslant x_i \leqslant p^\alpha$, и ни одно из чисел a_i не делится на p.

Из предыдущих рассуждений следует, что в данном случае будет выполнятся неравенство

$$\Phi(p^\alpha) = O(p^{-\alpha(\frac{r}{n}-1-\frac{1}{n})}).$$

Случай $a > n, (p, n) = n$ требует небольшого уточнения предыдущих рассуждений. Случай $a \leqslant n, (p, n) = p$ тривиален. Собирая полученные оценки, находим, что

$$\Phi(p^a) = O\left(p^{a\left(-\frac{r}{n}+1+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

для любого простого p и целого $a > 0$.

Тем самым оценка (1.9) доказана в силу ранее сделанного замечания относительно мультипликативности функции $\Phi(q)$.

Оценка (1.10) выводится теперь с помощью (1.9) и элементарных рассуждений (без использования тригонометрических сумм). Эти рассуждения аналогичны тем, которые проводятся при оценке снизу особого ряда в классической проблеме Варинга (см. [11], стр. 170–173). В случае любых попарно взаимно-простых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$ мы найдем при этом, что $\Gamma_2(n) = O(n^2)$. Если же $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 1$, то $\Gamma_2(n) = O(n)$ (см. [8]). Лемма 1 доказана.

Метод элементарного сглаживания, примененный нами при доказательстве этой леммы, может представлять самостоятельный интерес в связи с теорией уравнений над конечными полями, элементарные методы решения которых разработаны в недавнее время С. А. Степановым [12].

Наш метод может быть применен, в частности, при исследовании вопроса о нетривиальной разрешимости уравнения вида

$$a_1 x_1^n + \ldots + a_k x_k^n = 0.$$

Следует заметить также, что условие попарной взаимной простоты чисел $a_1, \ldots, a_r$ в (1.5) можно ослабить за счет технического усложнения рассуждений.

3. Оценка $Q_1(N)$ снизу. Преобразуем сумму $Q_1(N)$, полагая в (1.2) $x_i = (q/d)u_i + v_i$, где $0 \leqslant v_i \leqslant q/d - 1$, $u_i \geqslant 0$ — целые, $i = 1, 2, \ldots, r$. Условие $0 < (q/d)t \leqslant N_0$ заменим на эквивалентное:

$$N - (D_1' + D_2' + \nu^n D_3') - N_0 \leqslant a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + \ldots + a_r x_r^n \leqslant$$
$$\leqslant N - (D_1' + D_2' + \nu^n D_3'),$$

где, в силу обозначений § 1, выполняется неравенство:

$$N - (D_1' + D_2' + \nu^n D_3') \geqslant \tfrac{1}{4} N.$$

Используя оценку (1.8), выводим из (1.2) и (1.3) равенство

$$Q_1(N) = Q_2'(N) + Q_2''(N). \tag{3.1}$$

В (3.1)

$$Q_2'(N) = (r/n) T_r(n) \sum_{D_1' \leqslant \frac{1}{4}N} \sum_{D_2' \leqslant \frac{1}{4}N} \sum_{\nu^n \leqslant N^{\varepsilon_1}} \times$$
$$\times \sum_{D_3' \leqslant \frac{1}{4}N^{1-\varepsilon_1}} (N - D_1' - D_2' - \nu^n D_3')^{r/n-1} \sum_{q=1}^{a_0} \Phi(q),$$

где $\Phi(q)$ определено в (1.5) (надо только заменить в (1.5) N на $N - D_1' - D_2' - \nu^n D_3'$ и x_i на v_i);

$$Q_2''(N) = O\left(N^{\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}+\varepsilon_1+\varepsilon_2-\frac{1}{n}}\right) \tag{3.2}$$

с $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{c_3 n^2}$.

Из обозначений § 1 и леммы 3 следует, что

$$Q_2'(N) \geqslant c_0'(r, n) N^{\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}-\frac{3}{c_3 n^2}}. \tag{3.3}$$

В итоге из (3.1)–(3.3) выводим оценку (1.11).

Лемма 4 доказана.

4. Доказательство леммы 5. Доказательство леммы 5 — центральное звено нашего метода.

Представим разность V из (1.4) в виде

$$V = \sum_{D_2' \leqslant \frac{1}{4}N} \sum_{D_3' \leqslant \frac{1}{4}N^{1-\varepsilon_1}} \Bigg(\sum_{(1)} 1 - \frac{1}{N_0} \sum_{q=1}^{a_0} \sum_{d \mid q} \mu(d) \frac{q}{d} \sum_{(2)} 1 \Bigg), \tag{4.1}$$

где (1) означает суммирование по всем решениям уравнения (1.1), а (2) — суммирование по решениям уравнения (1.2) при фиксированных D_2', D_3', q и d.

Осуществим сглаживание в (4.1) по переменным D_2' и D_3'. Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$V^2 \leqslant \frac{1}{16} N^{2-\varepsilon_1} V', \tag{4.2}$$

где

$$V' = \sum_{D_2' \leqslant \frac{1}{4}N} \sum_{D_3' \leqslant \frac{1}{4}N^{1-\varepsilon_1}} \Bigg(\sum_{(1)} 1 - \frac{1}{N_0} \sum_{q=1}^{a_0} \sum_{d \mid q} \mu(d) \frac{q}{d} \sum_{(2)} 1 \Bigg)^2$$

— дисперсия числа решений уравнения (1.1), зависящего от параметров D_2' и D_3'.

Переходя в дисперсии от переменных D_2' и D_3' к переменным D_2 и D_3, пробегающим сплошные интервалы натуральных значений, мы именно здесь реализуем идею Виноградова по сглаживанию арифметических сумм. Дисперсия при этом может только увеличиться.

Получим

$$V' \leqslant \Sigma_1 - 2\Sigma_2 + \Sigma_3, \tag{4.3}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{D_2\leqslant \frac14 N}\ \sum_{D_3\leqslant \frac14 N^{1-\varepsilon_1}} \Big(\sum_{(1)} 1\Big)^2,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{D_2\leqslant \frac14 N}\ \sum_{D_3\leqslant \frac14 N^{1-\varepsilon_1}} \Big(\sum_{(1)} 1\Big) \frac{1}{N_0} \sum_{q=1}^{q_0} \sum_{d\mid q} \mu(d)\frac{q}{d}\Big(\sum_{(2)} 1\Big),$$

$$\Sigma_3 = \sum_{D_2\leqslant \frac14 N}\ \sum_{D_3\leqslant \frac14 N^{1-\varepsilon_1}} \Big(\frac{1}{N_0}\sum_{q=1}^{q_0}\sum_{d\mid q}\mu(d)\frac{q}{d}\sum_{(2)} 1\Big)^2.$$

Рассмотрим сумму

$$\Sigma_1 = \sum_{D_2\leqslant \frac14 N}\ \sum_{D_3\leqslant \frac14 N^{1-\varepsilon_1}}\ \sum_{X+D_2+\nu^n D_3=N} 1 \sum_{Y+D_2+\nu_1^n D_3 = N} 1, \tag{4.4}$$

где, ради краткости, введены обозначения

$$X = a_1x_1^n + a_2x_2^n + \ldots + a_rx_r^n + D_1',$$

$$Y = a_1y_1^n + a_2y_2^n + \ldots + a_ry_r^n + D_1''.$$

Переменные x_i и y_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, D_1' и D_1'', ν и ν_1 пробегают области значений, указанные в (1.1) соответственно для x_i, D_1' и ν.

Сумма Σ_1 выражает число решений системы линейных диофантовых уравнений относительно переменных D_2 и D_3.

Случай $\nu = \nu_1$ вносит в Σ_1 погрешность порядка

$$N^{2\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}}. \tag{4.5}$$

Пусть теперь $\nu \neq \nu_1$. Можем считать, для определенности, что $\nu_1 > \nu$. Исключая из указанной системы уравнений переменную D_2 и переходя затем к сравнению по $\operatorname{mod}(\nu_1^n - \nu^n)$, мы введем комплекс (D_3) условий, обеспечивающих равносильность сравнения с данной системой;

$$(D_3):\ \max\Big\{\frac{\frac34 N - Y}{\nu_1^n}, 0\Big\} \leqslant \frac{X-Y}{\nu_1^n-\nu^n} \leqslant \min\Big\{\frac{N-Y}{\nu_1^n}, \tfrac14 N^{1-\varepsilon_1}\Big\}.$$

В результате из (4.4) и (4.5) находим, что

$$\Sigma_1 = 2 \sum_{\nu<\nu_1\leqslant N^{\varepsilon_1/n}}\ \sum_{\substack{X\equiv Y \,(\operatorname{mod}\,(\nu_1^n-\nu^n))\\ (D_3)}} 1 + O\big(N^{2\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}}\big). \tag{4.6}$$

Рассмотрим сумму

$$\Sigma_2 = \sum_{D_2\leqslant \frac14 N}\ \sum_{D_3\leqslant \frac14 N^{1-\varepsilon_1}}\ \sum_{X+D_2+\nu^n D_3=N} 1 \times \frac{1}{N_0}\sum_{q=1}^{q_0}\sum_{d\mid q}\mu(d)\frac{q}{d} \sum_{Y+D_2+\nu_1^n D_3+\frac{q}{d}t=N} 1. \tag{4.7}$$

Случай $\nu_1 = \nu$ вносит в Σ_2 погрешность порядка, указанного в (4.5). Чтобы убедиться в этом, нужно перейти во внутренней сумме в (4.7) к сравнению по $\operatorname{mod}\frac{q}{d}$ и провести затем рассуждения, вполне аналогичные с теми, которые были проведены при доказательстве леммы 2. Здесь, как и там, существенную роль играет лемма 3.

Пусть теперь $\nu_1 \neq \nu$. Можем считать для определенности $\nu_1 > \nu$. Исключая из системы в Σ_2 переменную D_2 и переходя затем к сравнению по $\operatorname{mod}(\nu_1^n - \nu^n)$, мы должны ввести комплекс (D_3') условий, обеспечивающих равносильность сравнения с данной системой;

$$(D_3'):\ \max\Big\{\frac{\frac34 N - Y'}{\nu_1^n}, 0\Big\} \leqslant \frac{X-Y'}{\nu_1^n-\nu^n} \leqslant \min\Big\{\frac{N-Y'}{\nu_1^n}, \tfrac14 N^{1-\varepsilon_1}\Big\},$$

где $Y' = a_1y_1^n + a_2y_2^n + \ldots + a_ry_r^n + D_1'' + \frac{q}{d}t$.

При $\varepsilon_2 > 3\varepsilon_1$ слагаемое $\frac{q}{d}t$ можно считать относительно малым. Поэтому с допустимой погрешностью вида (4.5) в сумме Σ_2 при указанном переходе от системы к сравнению вместо комплекса (D_3') можно взять комплекс (D_3).

Поэтому из (4.7) получаем

$$\Sigma_2 = \frac{1}{N_0} 2 \sum_{\nu<\nu_1\leqslant N^{\varepsilon_1/n}}\ \sum_{q=1}^{q_0}\sum_{d\mid q}\mu(d)\frac{q}{d} \times \sum_{\substack{X\equiv Y+\frac{q}{d}t \,(\operatorname{mod}\,(\nu_1^n-\nu^n))\\ (D_3)}} 1 + O\big(N^{2\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}}\big). \tag{4.8}$$

Преобразуем сумму Σ_2. Для этого решим линейное сравнение относительно переменной t.

Положим $\delta = \left(\nu_1^n-\nu^n, \frac{q}{d}\right)$. Тогда $\left(\frac{q}{d\delta}, \frac{\nu_1^n-\nu^n}{\delta}\right) = 1$.

Для разрешимости сравнения в (4.8) необходимо и достаточно выполнения условия: $X \equiv Y \pmod{\delta}$. При выполнении этого условия сравнение будет иметь

$$\frac{N_0}{\frac{q}{d}\cdot\frac{\nu_1^n-\nu^n}{\delta}}+O(1)$$

решений.

Отсюда и из (1.6) имеем

$$\Sigma_2 = \Sigma_2'+\Sigma_2'', \tag{4.9}$$

где

$$\Sigma_2' = 2\sum_{\delta\leqslant q_0}\delta\sum_{\substack{\nu<\nu_1\leqslant N^{\varepsilon_1/n}\\ \nu_1^n\equiv\nu^n \pmod{\delta}}}\frac{1}{\nu_1^n-\nu^n}\times$$

$$\times\sum_{\substack{X\equiv Y \pmod{\delta}\\ (D_3)}}1\sum_{q=1}^{q_0}\sum_{d|q,\frac{q}{d}\equiv 0 \pmod{\delta}}\mu(d)\sum_{s|\frac{q}{d_\delta},\, s|\frac{\nu_1^n-\nu^n}{\delta}}\mu(s);$$

$$\Sigma_2'' = O\left(N^{\frac{2r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}}\right).$$

Преобразуем в Σ_2' сумму по q. Положим $q = sd\delta t$. Получим (на основании леммы 1)

$$\sum_{sd\delta t_1\leqslant q_0}\mu(d)\sum_{s|\frac{\nu_1^n-\nu^n}{\delta}}\mu(s) = \sum_{s\leqslant\frac{q_0}{\delta}}\sum_{s|\frac{\nu_1^n-\nu^n}{\delta}}\mu(s).$$

Из определения q_0, ν_1 и ν следует, что $\frac{\nu_1^n-\nu^n}{\delta}\leqslant\frac{q_0}{\delta}$. Применяя опять лемму 1, получим

$$\sum_{s|\frac{\nu_1^n-\nu^n}{\delta}}\mu(s) = \begin{cases}1, & \text{если } \nu_1^n-\nu^n = \delta,\\ 0, & \text{если } \nu_1^n-\nu^n \neq \delta.\end{cases}$$

Таким образом, из (4.9) находим, что

$$\Sigma_2 = 2\sum_{\nu<\nu_1\leqslant N^{\varepsilon_1/n}}\sum_{\substack{X\equiv Y \pmod{(\nu_1^n-\nu^n)}\\ (D_3)}}1+O\left(N^{2\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}}\right). \tag{4.10}$$

Рассмотрим сумму

$$\Sigma_3 = \sum_{D_2\leqslant\frac{1}{4}N}\sum_{D_3\leqslant\frac{1}{4}N^{1-\varepsilon_1}}\frac{1}{N_0}\sum_{q=1}^{q_0}\sum_{d|q}\mu(d)\frac{q}{d}\sum_{X+D_2+\nu^nD_3+\frac{q}{d}t=N}1\times \tag{4.11}$$

$$\times\frac{1}{N_0}\sum_{q_1=1}^{q_0}\sum_{d_1|q_1}\mu(d_1)\frac{q_1}{d_1}\sum_{Y+D_2+\nu_1^nD_3+\frac{q_1}{d_1}t_1=N}1.$$

Исследование суммы Σ_3 отличается только некоторыми чисто техническими усложнениями по сравнению с исследованием суммы Σ_2.

Не останавливаясь на деталях этого исследования, отметим только, что случай $\nu_1 = \nu$ вносит в Σ_3 погрешность порядка, указанного в (4.5).

Если же $\nu_1\neq\nu$ (пусть $\nu_1>\nu$), то появляется комплекс условий

$$(D_3''):\ \max\left\{\frac{\frac{3}{4}N-Y''}{\nu_1^n}, 0\right\}\leqslant\frac{X''-Y''}{\nu_1^n-\nu^n}\leqslant\min\left\{\frac{N-Y''}{\nu_1^n}, \frac{1}{4}N^{1-\varepsilon_1}\right\},$$

где

$$X'' = a_1x_1^n+a_2x_2^n+\ldots+a_rx_r^n+D_1'+\frac{q}{d}t,$$

$$Y'' = a_1y_1^n+a_2y_2^n+\ldots+a_ry_r^n+D_1''+\frac{q_1}{d_1}t_1.$$

В сумме Σ_3 с допустимой погрешностью вида (4.5) комплекс (D_3'') можно заменить комплексом (D_3).

В результате последующих преобразований суммы Σ_3 с помощью леммы 1 найдем, что

$$\Sigma_3 = 2\sum_{\nu<\nu_1\leqslant N^{\varepsilon_1/n}}\sum_{\substack{X\equiv Y \pmod{(\nu_1^n-\nu^n)}\\ (D_3)}}1+O\left(N^{2\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}}\right). \tag{4.12}$$

Из формул (4.6), (4.10) и (4.12) следует, что суммы Σ_1, Σ_2 и Σ_3 совпадают с точностью до величины порядка $O\left(N^{2\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}}\right)$. Поэтому нам нет необходимости вычислять главные члены этих сумм: в правой части неравенства (4.3) эти члены взаимно уничтожаются.

Таким образом, дисперсия

$$V' = O\left(N^{2\frac{r}{n}+2-\varepsilon_1+\frac{\varepsilon_1}{n}}\right).$$

В результате из неравенства (4.2) получаем оценку (1.12).

Тем самым лемма 5 доказана.

Первый автор выражает благодарность С. Б. Стечкину и А. А. Карацубе за ценные советы. Авторы признательны А. Шинцелю за внимание к работе.

Цитированная литература

[1] Б. М. Бредихин, Ю. В. Линник, *Новый метод в аналитической теории чисел*. В сб.: *Актуальные проблемы аналитической теории чисел*, Минск 1974, стр. 5–22.

[2] Б. М. Бредихин, *Усовершенствование нового метода в тернарных и полутернарных задачах с простыми числами*, Докл. АН СССР 217 (1) (1974), стр. 14–17.

[3] Б. М. Бредихин, Н. А. Яковлева, *Применение дисперсионного метода в проблеме Гольдбаха*, Acta Arith. 27 (1975), стр. 253–263.

[4] Б. М. Бредихин, *К тернарной проблеме Гольдбаха*. В. сб.: *Исследования по теории чисел*, Вып. 6, Саратов 1975, стр. 5–18.

[5] Б. М. Бредихин, Н. А. Яковлева, *Обоснование эвристического принципа в аддитивных задачах с простыми числами*, Матем. заметки, 17 (4) (1975), стр. 659–668.

[6] Б. М. Бредихин, *Метод сглаживания в нелинейных аддитивных задачах*, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР 142 (1976), стр. 88–100.

[7] — *Элементарная модификация метода И. М. Виноградова в аддитивной теории чисел*, В сб.: *Тезисы докладов и сообщений Всесоюзной школы по теории чисел*, Дюшанбе 1977, стр. 21–22.

[8] Т. И. Гришина, *Метод сглаживания в нелинейных аддитивных задачах: исследование особых сумм в проблеме Варинга*, ibid., стр. 34.

[9] И. М. Виноградов, *О верхней границе $\mathcal{G}(n)$ в проблеме Варинга*, Изв. АН СССР, Сер. физ.-матем. 10 (1934), стр. 1455–1469.

[10] — *Избранные труды*, Изд-во АН СССР, Москва 1952.

[11] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Изд-во „Наука", Москва 1975.

[12] С. А. Степанов, *Уравнения над конечными полями*, Матем. заметки, 21 (2) (1977), стр. 271–279.

Поступило 15. 3. 1978 (1053)

ACTA ARITHMETICA
XXXVII (1980)

Об арифметических свойствах многочленов от значений E-функций, связанных алгебраическими уравнениями в поле рациональных функций

А. Б. Шидловский (Москва)

§ 1. Обозначения и определения. В работе устанавливаются общие теоремы об оценках снизу модулей многочленов с целыми рациональными или целыми алгебраическими коэффициентами от значений в алгебраических точках подсовокупности E-функций в случае, когда основная рассматриваемая совокупность E-функций, составляющая решение системы линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами из $C(z)$, алгебраически зависима над $C(z)$.

С подробной историей вопроса можно ознакомиться в работах [1], [2].

Пусть в дальнейшем A обозначает поле всех алгебраических чисел над Q, K — алгебраическое поле над Q, $h = [K:Q]$, I — некоторое мнимое квадратичное поле.

Если $\xi \in K$, то $\overline{|\xi|} = \max_{1\leqslant i\leqslant h} |\xi_i|$, где $\xi_1, \ldots, \xi_h$ — числа сопряженные с ξ в K.

Мерой взаимной трансцендентности чисел $a_1, \ldots, a_m$ называют функцию

$$\Phi(a_1, \ldots, a_m; n; H) = \min|P(a_1, \ldots, a_m)|, \tag{1}$$
$$P = P(z_1, \ldots, z_m) \in Z[z_1, \ldots, z_m], \quad P \not\equiv 0, \quad H_P \leqslant H,$$

где H_P — высота P (максимум модулей всех коэффициентов P), $n = \deg_z P$, а минимум берется по всем многочленам, удовлетворяющим этим условиям.

При $m = 1$ функцию

$$\Phi(a; n; H) = \min|P(a)|, \tag{2}$$

называют *мерой трансцендентности* числа a.

При $n = 1$ (в однородном случае) функцию

$$L(a_1, \ldots, a_m; H) = \min|a_1 a_1 + \ldots + a_m a_m|, \tag{3}$$
$$a_k \in Z, \quad |a_k| \leqslant H, \quad k = 1, \ldots, m, \quad a_1^2 + \ldots + a_m^2 > 0,$$