[3] J. E. Littlewood, *Some problems in real and complex analysis*, Heath (Lexington), 1968.

[4] W. Rudin, *Some theorems on Fourier coefficients*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), pp. 855–859.

[5] H. S. Shapiro, Masters thesis, MIT, 1957.

[6] A. Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Actualités Math. et Sci., No. 1041 (1945).

[7] — *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), pp. 497–508.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
Ann Arbor, Michigan, U.S.A.

*Received on 18. 2. 1978* (1046)

ACTA ARITHMETICA
XXXVII (1980)

# Об интегралах, содержащих остаточный член проблемы делителей

А. Ф. Лаврик, М. И. Исраилов, Ж. Ёдгоров (Ташкент)

*Памяти П. Турана посвящается*

Пусть $\tau_k(n)$ обозначает число решений уравнения $n = m_1 \ldots m_k$ в целых положительных числах $m_1, \ldots, m_k$. Положим

$$\sum_{n\leqslant x} \tau_k(n) = xP_k(\log x) + \Delta_k(x), \tag{1}$$

где $xP_k(\log x)$ — главный член роста суммы (вычет в точке $s = 1$ функции $\zeta^k(s)x^s/s$, $\zeta$ — дзета-функция Римана).

В работе [1] были выписаны коэффициенты $a_j^{(k)}$ полинома:

$$P_k(\log x) = a_{k-1}^{(k)}\log^{k-1}x + \ldots + a_1^{(k)}\log x + a_0^{(k)}, \tag{2}$$

которые выражаются через $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ определяемые соотношением:

$$\gamma_n = \frac{(-1)^n}{n!} \lim_{M\to\infty} \Big[ \sum_{1\leqslant m\leqslant M} \frac{\log^n m}{m} - \frac{\log^{n+1} M}{n+1} \Big]. \tag{3}$$

Опираясь на этот результат здесь в отношении остаточного члена $\Delta_k(x)$ доказывается следующая

Теорема. *Для любого целого числа $k \geqslant 1$ имеем*

$$\int_1^\infty \frac{\Delta_k(u)}{u^2}\, du = a_0^{(k+1)} - \sum_{m=0}^{k-1} m!\,\gamma_m a_m^{(k)}. \tag{4}$$

Вывод теоремы основывается на двух леммах.

Лемма 1. *Для любого целого $n \geqslant 0$ и любого вещественного $x \geqslant 1$ имеют место следующие равенства*

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant x} \frac{\log^n m}{m} = \frac{\log^{n+1} x}{n+1} + (-1)^n n!\,\gamma_n + O\Big(\frac{\log^n x}{x}\Big), \tag{5}$$

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant x} \frac{\log^n (x/m)}{m} = \frac{\log^{n+1} x}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} k!\,C_n^k \gamma_k \log^{n-k} x + O\Big(\frac{\log^n x}{x}\Big). \tag{6}$$

Доказательство. Сначала заметим, что для $n \geqslant 0$

(7) $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{k+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Для доказательства достаточно интегрировать в пределах от 0 до 1 тождество

$$(1-u)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k u^k.$$

В силу (3) главный член суммы $\sum_{m \leqslant x} \frac{\log^n m}{m}$ есть

$$\frac{\log^{n+1} x}{n+1} + (-1)^n n! \gamma_n$$

и остается показать, что остаточный член здесь имеет вид $O\left(\frac{\log^n x}{x}\right)$.

Известно, что

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant x} \frac{1}{m} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Отсюда следует (5) при $n = 0$. Теперь предполагая справедливость (5) при $n \leqslant k$, докажем его при $n = k+1$. Для этого в формуле частичного суммирования

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant x} a_m g(m) = A(x) g(x) - \int_1^x A(\xi) g'(\xi)\, d\xi,$$

где

$$A(x) = \sum_{1 \leqslant m \leqslant x} a_m,$$

выбираем

$$g(m) = \log m, \quad a_m = \frac{\log^k m}{m}.$$

Тогда

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant x} \frac{\log^{k+1} m}{m} = \log x \sum_{1 \leqslant m \leqslant x} \frac{\log^k m}{m} - \int_1^x \left(\sum_{1 \leqslant m \leqslant \xi} \frac{\log^k m}{m}\right) \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \log x \left[\frac{\log^{k+1} x}{k+1} + (-1)^k k! \gamma_k + O\left(\frac{\log^k x}{x}\right)\right] -$$

$$- \int_1^x \left[\frac{\log^{k+1} \xi}{k+1} + (-1)^k k! \gamma_k + O\left(\frac{\log^k \xi}{\xi}\right)\right] \frac{d\xi}{\xi} =$$



$$= \frac{\log^{k+2} x}{k+2} + O\left(\int_1^\infty \frac{\log^k \xi}{\xi^2}\, d\xi\right) + O\left(\frac{\log^{k+1} x}{x}\right) =$$

$$= \frac{\log^{k+2} x}{k+2} + (-1)^{k+1} (k+1)! \gamma_{k+1} + O\left(\frac{\log^{k+1} x}{x}\right).$$

Теперь используя (5) и (7), получим (6):

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant x} \frac{\log^n (x/m)}{m} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \log^{n-k} x \sum_{1 \leqslant m \leqslant x} \frac{\log^k m}{m} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \log^{n-k} x \left[\frac{\log^{k+1} x}{k+1} + (-1)^k k! \gamma_k + O\left(\frac{\log^n x}{x}\right)\right] =$$

$$= \frac{\log^{n+1} x}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} k! C_n^k \gamma_k \log^{n-k} x + O\left(\frac{\log^n x}{x}\right).$$

Лемма доказана полностью.

Далее, используя (2) и лемму 1, имеем

(8) $$\sum_{1 \leqslant m \leqslant x} \frac{P_k(\log(x/m))}{m} = \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu^{(k)} \sum_{1 \leqslant m \leqslant x} \frac{\log^\nu (x/m)}{m} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu^{(k)} \left(\frac{\log^{\nu+1} x}{\nu+1} + \sum_{\mu=0}^{\nu} \mu! C_\nu^\mu \gamma_\mu \log^{\nu-\mu} x\right) +$$

$$+ O\left(\sum_{\nu=0}^{k-1} |a_\nu^{(k)}| \frac{\log^\nu x}{x}\right) = Q_k(\log x) + \alpha_k(x),$$

где

(9) $$Q_k(\log x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu^{(k)} \left(\frac{\log^{\nu+1} x}{\nu+1} + \sum_{\mu=0}^{\nu} \mu! C_\nu^\mu \gamma_\mu \log^{\nu-\mu} x\right),$$

(10) $$\alpha_k(x) = O\left(\frac{\log^{k-1} x}{x}\right).$$

Лемма 2. *Для любого целого $k \geqslant 1$ справедливо равенство*

(11) $$P_{k+1}(\log x) = Q_k(\log x) + \int_1^\infty \frac{\Delta_k(u)}{u^2}\, du.$$

Доказательство. Имеем

$$(12)\quad \sum_{n\leqslant x}\tau_k(n) = \sum_{mn\leqslant x}\tau_{k-1}(n) = \Big(\sum_{m\leqslant x^{1/a}} + \sum_{x^{1/a}<m\leqslant x}\Big)\sum_{n\leqslant x/m}\tau_{k-1}(n) =$$
$$= \sum_{m\leqslant x^{1/a}}\sum_{n\leqslant x/m}\tau_{k-1}(n) + \sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\tau_{k-1}(n)\sum_{x^{1/a}<m\leqslant x/n} 1 =$$
$$= \sum_{m\leqslant x^{1/a}}\sum_{n\leqslant x/m}\tau_{k-1}(n) + \sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\tau_{k-1}(n)\left(\frac{x}{n} - \left\{\frac{x}{n}\right\} - x^{1/a} + \{x^{1/a}\}\right),$$

где $\{u\}$ — дробная часть числа $u$. Но

$$(13)\quad \sum_{n\leqslant N}\frac{\tau_{k-1}(n)}{n} = \int_1^N \sum_{n\leqslant u}\tau_{k-1}(n)\frac{du}{u^2} + \frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\tau_{k-1}(n).$$

Беря в (13) $N = x^{1-1/a}$ и умножая на $x$, ввиду (12), получим

$$(14)\quad \sum_{n\leqslant x}\tau_k(n) = \sum_{m\leqslant x^{1/a}}\sum_{n\leqslant x/m}\tau_{k-1}(n) + x\int_1^{x^{1-1/a}}\sum_{n\leqslant u}\tau_{k-1}(n)\frac{du}{u^2} - \sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{n}\right\} - \{x^{1/a}\}\right)\tau_{k-1}(n).$$

В силу (1) и (14) будем иметь

$$(15)\quad xP_k(\log x) + \Delta_k(x) = x\sum_{m\leqslant x^{1/a}}\frac{P_{k-1}(\log(x/m))}{m} + x\int_1^{x^{1-1/a}}\frac{P_{k-1}(\log u)}{u}du +$$
$$+ \sum_{m\leqslant x^{1/a}}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{m}\right) + x\int_1^{x^{1-1/a}}\frac{\Delta_{k-1}(u)}{u^2}du - \sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{n}\right\} - \{x^{1/a}\}\right)\tau_{k-1}(n).$$

Очевидно, что

$$\int_{x^{1-1/a}}^x \frac{\Delta_{k-1}(u)}{u^2}du = \frac{1}{x}\int_1^{x^{1/a}}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{u}\right)du.$$

Поэтому из (15) при любом $a \geqslant 1$ имеем

$$(16)\quad xP_k(\log x) + \Delta_k(x) =$$
$$= x\sum_{m\leqslant x^{1/a}}\frac{P_{k-1}(\log(x/m))}{m} + x\int_1^{x^{1-1/a}}\frac{P_{k-1}(\log u)}{u}du +$$

$$+ x\int_1^\infty \frac{\Delta_{k-1}(u)}{u^2}du - x\int_x^\infty \frac{\Delta_{k-1}(u)}{u^2}du + \sum_{m\leqslant x^{1/a}}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{m}\right) -$$
$$- \int_1^{x^{1/a}}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{u}\right)du - \sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{n}\right\} - \{x^{1/a}\}\right)\tau_{k-1}(n).$$



Беря здесь $a = 1$ и вычитая из полученного выражения выражение (15) при $a \geqslant 1$ находим, что

$$(17)\quad \sum_{x^{1/a}<m\leqslant x}\Delta_{k-1}(m) - \int_{x^{1/a}}^x \Delta_{k-1}\left(\frac{x}{u}\right)du = x\int_x^{x^{1-1/a}}\frac{P_{k-1}(\log u)}{u}du -$$
$$- x\sum_{x^{1/a}<m\leqslant x}\frac{P_{k-1}(\log(x/m))}{m} - \sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{n}\right\} - \{x^{1/a}\}\right)\tau_{k-1}(n).$$

Далее,

$$(18)\quad x\int_1^{x^{1-1/a}}\frac{P_{k-1}(\log u)}{u}du = x\int_{x^{1/a}}^x\frac{P_{k-1}(\log(x/u))}{u}du$$

и, воспользовавшись формулой

$$\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n) = \int_a^b\varphi(x)dx + \int_a^b\left(\{x\} - \tfrac12\right)\varphi'(x)dx + \left(\{a\} - \tfrac12\right)\varphi(a) - \left(\{b\} - \tfrac12\right)\varphi(b),$$

расписываем последний интеграл в виде

$$(19)\quad x\int_{x^{1/a}}^x\frac{P_{k-1}(\log(x/u))}{u}du = x\sum_{x^{1/a}<m\leqslant x}\frac{P_{k-1}(\log(x/m))}{m} +$$
$$+ x\int_{x^{1/a}}^x\frac{(\{u\} - \frac12)\left[P_{k-1}(\log(x/u)) + P'_{k-1}(\log(x/u))\right]}{u^2}du -$$
$$- \left(\{x^{1/a}\} - \tfrac12\right)x^{1-1/a}P_{k-1}(\log x^{1-1/a}) + \left(\{x\} - \tfrac12\right)P_{k-1}(\log 1).$$

Соединяя (17), (18) и (19) будем иметь

$$(20)\quad \sum_{x^{1/a}<m\leqslant x}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{m}\right) - \int_{x^{1/a}}^x\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{u}\right)du =$$
$$= x\int_{x^{1/a}}^x\frac{(\{u\} - \frac12)\left[P_{k-1}(\log(x/u)) + P'_{k-1}(\log(x/u))\right]}{u^2}du -$$
$$- \left(\{x^{1/a}\} - \tfrac12\right)P_{k-1}(\log x^{1-1/a}) + \left(\{x\} - \tfrac12\right)P_{k-1}(0) -$$
$$- \sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{n}\right\} - \{x^{1/a}\}\right)\tau_{k-1}(n).$$

Для целого $t \geqslant 0$ рассмотрим интеграл

$$(21)\qquad xI_a(x,t) = x\int_{x^{1/a}}^{x} \frac{(\{u\}-\frac{1}{2})\log^t(x/u)}{u^2}\,du =$$

$$= -x\int_{x^{1/a}}^{x} \frac{\log^t(x/u)}{u^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nu}{\pi n}\,du =$$

$$= -\frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{x^{1/a}}^{x}\frac{\sin 2\pi nu\cdot\log^t(x/u)}{u^2}\,du.$$

Положим

$$u^* = \frac{\log^t(x/u)}{u^2}, \qquad dv = \sin 2\pi nu\,du \qquad (t\geqslant 1),$$

$$du^* = -\frac{2\log^t(x/u)+t\log^{t-1}(x/u)}{u^3}\,du, \qquad v = -\frac{\cos 2\pi nu}{2\pi n}.$$

Таким образом

$$(22)\qquad \int_{x^{1/a}}^{x}\frac{\sin 2\pi nu}{u^2}\log^t\frac{x}{u}\,du = \frac{\cos 2\pi nx^{1/a}\log^t x^{1-1/a}}{2\pi nx^{2/a}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi n}\int_{x^{1/a}}^{x}\frac{\cos 2\pi nu\left(2\log^t(x/u)+t\log^{t-1}(x/u)\right)}{u^3}\,du.$$

Так как функция $f(u) = u^{-3}\left[2\log^t\frac{x}{u}+t\log^{t-1}\frac{x}{u}\right]$ монотонно убывающая, то применяя вторую теорему о среднем к последнему интегралу, убеждаемся, что

$$(23)\qquad \frac{1}{2\pi n}\int_{x^{1/a}}^{x}\frac{\cos 2nu}{u^3}\left[2\log^t\frac{x}{u}+t\log^{t-1}\frac{x}{u}\right]du =$$

$$= \frac{2\theta}{(2\pi n)^2}\cdot\frac{2\log^t x^{1-1/a}+t\log^{t-1}x^{1-1/a}}{x^{3/a}} \qquad (|\theta|\leqslant 1).$$

Из (21)–(23) имеем

$$xI_a(x,t) = -\frac{1}{2\pi^2}x^{1-2/a}\log^t x^{1-1/a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx^{1/a}}{n^2}+O(x^{1-3/a}\log^t x^{1-1/a}).$$

Следовательно

$$(24)\qquad x\int_{x^{1/a}}^{x}\frac{(\{u\}-\frac{1}{2})\left[P_{k-1}(\log(x/u))+P'_{k-1}(\log(x/u))\right]}{u^2}\,du \ll$$

$$\ll x^{1-2/a}\left[P_{k-1}(\log x^{1-1/a})+P'_{k-1}\left(\log\frac{x}{u}\right)\right].$$



Кроме того

$$(25)\qquad (\{x^{1/a}\}-\tfrac{1}{2})x^{1-1/a}P_{k-1}(\log x^{1-1/a}) =$$

$$= (\{x^{1/a}\}-\tfrac{1}{2})\sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\tau_{k-1}(n)+(\tfrac{1}{2}-\{x^{1/a}\})\,\Delta_{k-1}(x^{1-1/a}).$$

Соединяя (2), (20) и (24)–(25), получим

$$(26)\qquad \sum_{x^{1/a}<m\leqslant x}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{m}\right)-\int_{x^{1/a}}^{x}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{u}\right)du =$$

$$= -\sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{n}\right\}-\tfrac{1}{2}\right)\tau_{k-1}(n)+O\left(x^{1-2/a}\log^{k-2}x+|\Delta_{k-1}(x^{1-1/a})|\right).$$

Если же соединить формулы (16), (18), (19) и (25), то будем иметь так же, что

$$(27)\qquad xP_k(\log x)+\Delta_k(x) = x\left[\sum_{m\leqslant x}\frac{P_{k-1}(\log(x/m))}{m}-a_k(x)\right]+$$

$$+xa_k(x)+x\int_{1}^{\infty}\frac{\Delta_{k-1}(u)}{u^2}\,du+\sum_{m\leqslant x^{1/a}}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{m}\right)-$$

$$-\int_{1}^{x^{1/a}}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{u}\right)du-x\int_{x}^{\infty}\frac{\Delta_{k-1}(u)}{u^2}\,du-\sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{n}\right\}-\frac{1}{2}\right)\tau_{k-1}(n)-$$

$$-(\tfrac{1}{2}-\{x^a\})\,\Delta_{k-1}(x^{1-1/a})+(\{x\}-\tfrac{1}{2})P_{k-1}(0)+$$

$$+x\int_{x^{1/a}}^{x}\frac{(\{u\}-\frac{1}{2})\left[P_{k-1}(\log(x/u))+P'_{k-1}(\log(x/u))\right]}{u^2}\,du.$$

Отсюда

$$(28)\qquad P_k(\log x) = \sum_{m\leqslant x}\frac{P_{k-1}(\log(x/m))}{m}-a_{k-1}(x)+\int_{1}^{\infty}\frac{\Delta_{k-1}(u)}{u^2}\,du$$

и кроме того, по-видимому, стоит отметить еще, что при любом $a\geqslant 1$, справедливо тождество

$$\Delta_k(x) = \sum_{m\leqslant x^{1/a}}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{m}\right)-\int_{1}^{x^{1/a}}\Delta_{k-1}\left(\frac{x}{u}\right)du-x\int_{x}^{\infty}\frac{\Delta_{k-1}(u)}{u^2}\,du-$$

$$-\sum_{n\leqslant x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{n}\right\}-\frac{1}{2}\right)\tau_{k-1}(n)-(\tfrac{1}{2}-\{x^{1/a}\})\,\Delta_{k-1}(x^{1-1/a})-$$

$$-\int_{1}^{x^{1-1/a}}\left(\left\{\frac{x}{u}\right\}-\frac{1}{2}\right)\left[P_{k-1}(\log u)+P'_{k-1}(\log u)\right]du+(\{x\}-\tfrac{1}{2})P_{k-1}(0)+a_k(x).$$

Заменяя в (28) $k$ на $k+1$ и, имея в виду (8)–(9), получим утверждение леммы 2.

Теперь в (11) приравнивая свободные члены получим утверждение теоремы.

Кроме того, приравнивая в (11) коэффициенты при одинаковых степенях $\log x$, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$a_k^{(k+1)} = \frac{a_{k-1}^{(k)}}{k},$$

$$a_{k-\nu}^{(k+1)} = \frac{a_{k-\nu-1}^{(k)}}{k-\nu} + \sum_{\mu=0}^{\nu} a_{k-\mu}^{(k)}(\nu-\mu)!\,C_{k-\mu}^{\nu-\mu}\gamma_{\nu-\mu}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Эти формулы дают возможность выразить коэффициенты $a_1^{(k+1)}, \ldots$ $\ldots, a_k^{(k+1)}$ полинома $P_{k+1}(\log x)$ через коэффициенты $a_0^{(k)}, \ldots, a_{k-1}^{(k)}$ полинома $P_k(\log x)$. Но $a_0^{(k+1)}$ отсюда получить нельзя, однако, его можно найти по формуле, предложенной в [1].

В заключение приведем в явном виде несколько частных случаев указанных выше результатов, полагая $\gamma = \gamma_0$.

(а) Коэффициенты полиномов $P_2(\log x), \ldots, P_6(\log x)$:

1) $a_1^{(2)} = 1,\ a_0^{(2)} = -1+2\gamma;$

2) $a_2^{(3)} = \frac{1}{2},\ a_1^{(3)} = -1+3\gamma,\ a_0^{(3)} = 1-3(\gamma-\gamma_1)+3\gamma^2;$

3) $$\begin{cases} a_3^{(4)} = \frac{1}{6},\ a_2^{(3)} = \frac{1}{2}(-1+4\gamma),\ a_1^{(4)} = 1-4(\gamma-\gamma_1)+6\gamma^2, \\ a_0^{(4)} = -1+4(\gamma-\gamma_1+\gamma_2)-6\gamma^2+4\gamma^3+12\gamma\gamma_{\mathrm{r}}; \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} a_4^{(5)} = \frac{1}{24},\ a_3^{(5)} = \frac{1}{6}(-1+5\gamma),\ a_2^{(5)} = \frac{1}{2}[1-5(\gamma-\gamma_1)+10\gamma^2], \\ a_1^{(5)} = -1+5(\gamma-\gamma_1+\gamma_2)-10\gamma^2+20\gamma\gamma_1+10\gamma^3, \\ a_0^{(5)} = 1-5(\gamma-\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3)+5\gamma^2(2-2\gamma+\gamma^2)- \\ \qquad -10\gamma(2\gamma_1-2\gamma_2-3\gamma\gamma_1); \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} a_5^{(6)} = \frac{1}{120},\ a_4^{(6)} = \frac{1}{24}1(-+6\gamma),\ a_3^{(6)} = \frac{1}{6}(1-6\gamma+6\gamma_1+15\gamma^2), \\ a_2^{(6)} = \frac{1}{2}[-1+6(\gamma-\gamma_1+\gamma_2)-15\gamma^2+30\gamma\gamma_1+20\gamma^3], \\ a_1^{(6)} = 1-6(\gamma-\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3)+15(\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma^4)-30(\gamma\gamma_1-\gamma\gamma_2)- \\ \qquad -20\gamma^3+60\gamma^2\gamma_1, \\ a_0^{(6)} = -1+6(\gamma-\gamma_1+\gamma_2-\gamma_3+\gamma_4)-15(\gamma^2+\gamma_1^2+\gamma^4)+30(\gamma\gamma_1- \\ \qquad -\gamma\gamma_2+\gamma\gamma_3+\gamma_1\gamma_2)-60(\gamma^2\gamma_1-\gamma^2\gamma_2-\gamma\gamma_1^2-\gamma^3\gamma_1)+20\gamma^3+6\gamma^5. \end{cases}$$

(б) значения интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{\Delta_k(u)}{u^2}\,du$ для $k = 1, 2, 3, 4, 5$:

$$\int\limits_1^\infty \frac{\Delta_1(u)}{u^2}\,du = \gamma-1,$$



$$\int\limits_1^\infty \frac{\Delta_2(u)}{u^2}\,du = (\gamma-1)^2+2\gamma_1,$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{\Delta_3(u)}{u^2}\,du = (\gamma-1)^3-3(\gamma_1-\gamma_2)+6\gamma\gamma_1,$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{\Delta_4(u)}{u^2}\,du = (\gamma-1)^4+4(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3)-12\gamma(\gamma_1-\gamma_2-\gamma\gamma_1)-4\gamma_1^2,$$

$$\int\limits_1^\infty \frac{\Delta_5(u)}{u^2}\,du = (\gamma-1)^5-5(\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3-\gamma_4)+20(\gamma\gamma_1-\gamma\gamma_2+$$
$$+\gamma\gamma_3+\gamma_1\gamma_2+\gamma^3\gamma_1)-10\gamma_1^2-30\gamma^2\gamma_1+30\gamma^2\gamma_2+40\gamma\gamma_1^2.$$

**Литература**

[1] А. Ф. Лаврик, *О главном члене проблемы делителей и степенном ряде дзета-функции Римана в окрестности ее полюса*, Труды математического института им. В. А. Стеклова АН СССР, 142 (1976), стр. 165–173.

*Поступило 13. 3. 1978* (1051)