ACTA ARITHMETICA
XXXVII (1980)

# Über einige Reihen, welche mit den Vielfachen von Irrationalzahlen zusammenhängen

von

EDMUND HLAWKA (Wien)

*Dem Andenken von Paul Turán gewidmet*

1. Es sei $\alpha$ eine Irrationalzahl vom Typus $\leqslant \mu$, so daß für alle $\varepsilon > 0$ und alle ganzen $k$ und $h \neq 0$

$$|h\alpha + k| \geqslant C|h|^{-(\mu+\varepsilon)} \tag{1}$$

bei passendem $C > 0$ ist. Es sei weiter $P_r(x)$ die $r$-te Bernoullische Funktion ($r \geqslant 2$), deren Fourierreihe

$$\sum_{|h|\neq 0} |h|^{-r} e(hx) \tag{2}$$

ist, wo $e(\alpha) = e^{2\pi i \alpha}$ und $r$ gerade ist.

(Diese Definition weicht von der üblichen nur um einen konstanten Faktor ab.) Ist $r$ ungerade, dann werde $P_r$ durch

$$\sum_{|h|\neq 0} \varepsilon(h)|h|^{-r} e(hx) \tag{2'}$$

definiert, wo $\varepsilon(h) = 1$, wenn $h > 0$ und $\varepsilon(h) = -1$, wenn $h < 0$ ist. Es sei weiter für $\mathrm{Re}(j) > 1$

$$S(w, j, \alpha, r) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{j-1} e^{-lw} P_r(l\alpha). \tag{3}$$

Dabei sei $w > 0$. Die Reihe in (4) ist absolut konvergent. Weiter sei

$$T(w, j, \alpha, r) = \sum_{h\neq 0} \sum_{k} \varepsilon(h)|h|^{-r} \big(w + 2\pi i(h\alpha + k)\big)^{-j}. \tag{4}$$

Dabei bedeute stets mit $w_1 = w + 2\pi i(h\alpha + k)$

$$w_1^j = |w_1|^j e(j \operatorname{arc} w_1) \quad \text{mit} \quad |\operatorname{arc} w_1| \leqslant \pi/2.$$

Wir werden zeigen, daß die Reihe in (4) für

$$1 < \mathrm{Re}(j) < r/\mu \tag{5}$$

und in $0 \leqslant w \leqslant 1$ absolut und gleichmäßig konvergiert. Weiters werden wir zeigen, daß die Transformationsformel

$$S(w, j, \alpha, r) = \Gamma(j)\, T(w, j, \alpha, r) \tag{6}$$

gilt. Diese Formel ist ein Gegenstück zur bekannten Formel von Lipschitz (vgl. z.B. Rademacher, *Topics in Analytic Number Theory*, S. 77). Für die Anwendungen in § 4 ist die Bedingung in (5) $\mathrm{Re}(j) > 1$ zu eng. Es gilt nun unter der Voraussetzung

$$0 < \mathrm{Re}(j) < r/\mu$$

für $0 \leqslant w \leqslant 1$, $0 \leqslant w_1 \leqslant 1$ die Formel

$$S(w, w_1, j, \alpha, r) = \Gamma(j)\, T(w, w_1, j, \alpha, r). \tag{7}$$

Dabei ist

$$S = \sum_{l=0}^{\infty} l^{j-1}(e^{-lw} - e^{-lw_1}) P_r(l\alpha) \tag{8}$$

wobei

$$\varphi(l, w, w_1, j) = l^{j-1}(e^{-lw} - e^{-lw_1}) \tag{8'}$$

für $l = 0$ gleich Null sein soll. Es ist natürlich

$$S(w, w_1, j, \alpha, r) = S(w, j, \alpha, r) - S(w_1, j, \alpha, r). \tag{8''}$$

Weiter ist

$$T(w, w_1, j, \alpha) = \sum_{h \neq 0, k} \varepsilon(h)|h|^{-r} \Delta(w, w_1) \tag{9}$$

wo

$$\Delta(w, w_1) = \big(w + 2\pi i(h\alpha + k)\big)^{-j} - \big(w_1 + 2\pi i(h\alpha + k)\big)^{-j} \tag{10}$$

ist.

Wir werden noch andere Formeln von der gleichen Art (6) aufstellen, nämlich die Formel

$$\sum_{|l| \leqslant w} (w^2 - l^2)^{\lambda - 1/2} P_r(l\alpha) = T_2(w, \alpha), \tag{11}$$

wo

$$T_2 = \Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(\lambda + \tfrac{1}{2}) 2^{\lambda - 1/2} T_3 \tag{12}$$

mit

$$T_3 = \sum_{h \neq 0, k} \varepsilon(h)|h|^{-r} \Delta_2(w, h, k) \tag{13}$$

ist, und

$$\Delta_2 = \mathfrak{J}_\lambda\big((\alpha h + k)w\big)(\alpha h + k)^{-\lambda} \tag{13'}$$

ist.



Es ist $\mathfrak{J}_\lambda$ die Besselfunktion von der Ordnung $\lambda$. Diese Formel (11) gilt für

$$\tfrac{1}{2} < \mathrm{Re}(\lambda) < r/\mu. \tag{14}$$

Ersetzt man in (3) im Exponenten der Exponentialfunktion $l$ durch $l^2$, dann erhält man die Formel

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^{j-1} e^{-l^2 w} P_r(l\alpha) = T_3(w, j, \alpha, r), \tag{15}$$

wo

$$T_3 = \Gamma(j)(\sqrt{2w})^{-j} \sum_{h \neq 0, k} \varepsilon(h)|h|^{-r} \Delta_3 \tag{15'}$$

ist mit

$$\Delta_3 = e^{-2(\pi\gamma)^2} D_{-j}(\sqrt{2\pi} i \gamma) \tag{15''}$$

und

$$\gamma = (h\alpha + k)/\sqrt{w}$$

ist. (Zur Definition von $D_\gamma$ vgl. man z.B. Magnus–Oberhettinger, *Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der math. Physik*, S. 91.) Eine andere Formel ist

$$\sum_{|l| \leqslant w} (w - |l|) P_r(l\alpha) = \sum_{h \neq 0, k} \frac{\varepsilon(h)}{|h|^r \pi w} \left(\frac{\sin \pi w \varrho}{\varrho}\right)^2$$

mit $\varrho = h\alpha + k$.

Wir wollen nun in allen diesen Formeln $\alpha$ durch ein $n$-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ersetzen. Wir sagen $\alpha$ ist von einem Typus $\leqslant \mu$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$, für alle Gitterpunkte $h = (h_1, \ldots, h_n) \neq 0$ und alle ganzen Zahlen $k$

$$|h|_n^{\mu+\varepsilon} |\langle h\alpha \rangle + k| \geqslant C \tag{1'}$$

gilt. Dabei sei $\langle h\alpha \rangle = h_1\alpha_1 + \ldots + h_n\alpha_n$ und

$$|h|_n = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{Max}(|h_j|, 1). \tag{16}$$

(Üblicherweise wird statt $|h|_n$ auch $R(h)$ geschrieben. Diese Schreibweise werden wir auch in § 2 benützen. Wenn keine Verwechslung möglich ist, schreiben wir nur $|h|$.)

Wir definieren die $r$-te Bernoullische Funktion $P_r$ für $r \geqslant 2$, wenn $r$ gerade ist, durch

$$P_r(x) = \sum_{h \neq 0} |h|_n^{-r} e(\langle hx \rangle) \tag{17}$$

(dabei ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$). Ist $r$ ungerade, dann sei

$$P_r(x) = \sum_{h \neq 0} \varepsilon(h)|h|_n^{-1} e(\langle hx \rangle). \tag{17'}$$

Dabei ist $\varepsilon(h) = \varepsilon(h_1) \ldots \varepsilon(h_n)$, wobei $\varepsilon(h_j) = 1$ wenn $h_j \geqslant 0$ und $\varepsilon(h_j) = -1$, wenn $h_j < 0$ ist. Es läßt sich $P_r$ als Produkt der klassischen Bernoullischen Funktion darstellen (abgesehen von einem konstanten Faktor). Ersetzt man nun in (4) und (8) einfach $|h|$ durch $|h|_n$, ebenso $h\alpha$ durch $\langle h\alpha \rangle$ so ist damit $T(w, j, \alpha, r)$ auch für das $n$-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definiert. Wir werden zeigen, daß auch diese Reihe für die gleichen Werte wie in (5) konvergiert. Der Beweis für diesen Sachverhalt werden wir in § 2 führen und wird eine Verallgemeinerung eines Satzes von Hardy-Littlewood enthalten. (Vgl. *Collected Papers* of G. H. Hardy, Vol. I, S. 163 (Lemma 3).) Verallgemeinern wir auch die Reihen $S$ wie wir dies bei $T$ getan haben, so gelten dann wieder (4), (8) und alle weiteren Formeln.

Wir wollen nun in dieser Arbeit in § 4 einige Anwendungen geben. Wir studieren die Zetafunktion

$$Z(r, s, \alpha) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{P_r(l\alpha)}{l^s}. \tag{18}$$

Diese Funktionen wurden im eindimensionalen Fall ($n = 1$) von E. Hecke, H. Behnke und Hardy–Littlewood betrachtet. (Vergleiche Koksma, *Diophantische Approximationen*, Kap. 9, § 2). Es wurde von H. Behnke durch Übertragung der zweiten Methode von Riemann (Verwendung der Transformationsformel der Thetafunktion) gezeigt, daß sich die Reihe (18) bis zur Geraden $\sigma = 1 - r/\mu$ analytisch fortsetzen läßt. Das Gleiche zeigten Hardy–Littlewood durch Benützung von Schleifenintegrale und darüber hinaus, daß diese Gerade natürliche Grenze ist, wenn $\alpha$ vom Typus $\mu$ ist, d.h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $h$ mit

$$\|h\alpha\| \, |h|^{\mu - \varepsilon} \leqslant c_1 \tag{19}$$

ist. Dabei ist

$$\|h\alpha\| = \mathrm{Min}\, |h\alpha + k|$$

(das Minimum erstreckt sich über alle ganzen $k$). H. Behnke hatte schon vorher gezeigt, daß $s = 1 - r/\mu$ eine singuläre Stelle ist.

Unsere Methode, welche (8) benützt, ist das Gegenstück zur Methode, die analytische Fortsetzung der Zetafunktion mittels der Lipschitzformel zu zeigen (vgl. z.B. Rademacher loc. cit., S. 86).(1)

Die Methode überträgt sich ohne jede Schwierigkeit auf den Fall $n > 1$ und es gilt dann das Gleiche wie im Fall $n = 1$. Es gilt Satz 3: Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ linear unabhängige Zahlen vom Typus $\leqslant \mu$, dann läßt sich (18) bis zur Geraden $\sigma = 1 - r/\mu$ analytisch fortsetzen.

(1) Vgl. C.L. Siegel, *Gessammelte Abhandlungen*, Bd. 1, 1966, Abhandlung 7, S. 113 ff.



Für fast alle (im Lebesgueschen Sinne) $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ist $\mu = 1$. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sogar algebraische Zahlen, dann ist nach W. Schmidt auch hier $\mu = 1$ und die Fortsetzung gelingt also bis $\sigma = 1 - r$. Man kann auch für $\alpha = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ den Begriff des Typus $\mu$ einführen, indem man in (19) wieder $h$ durch $|h|_n$ und $h\alpha$ durch $\langle h\alpha \rangle$ ersetzt. Wie sich dann $Z$ auf der Geraden $\sigma = 1 - r/\mu$ verhält, ist bei dieser Methode nicht leicht zu sehen. Der Verfasser hofft, darauf in einer späteren Arbeit zurückzukommen. Dabei werden die Betrachtungen in § 2 zu verwenden sein.

Zum Abschluß zeigen wir in § 4 noch Integralgleichungen für $S$ und $T$, welche vielleicht nicht uninteressant sind.

Wir beginnen jetzt zunächst mit der Untersuchung der Konvergenz der Reihe in (8), die dann im § 2 und § 3 zu Ende geführt wird.

Es sei $\gamma(h) = -((h\alpha))$, wo $((h\alpha))$ die nächste ganze Zahl an $h\alpha$ ist; dann betrachten wir zuerst

$$\sum_{k \neq \gamma} \Delta(w, w_1, k, h). \tag{20}$$

Es ist

$$\Delta(w, w_1, k, h) = \frac{(-1)}{j} \int_{w}^{w_1} d\xi \left(\xi + 2\pi i (h\alpha + k)\right)^{-j-1}.$$

Es ist für $|l| \geqslant 1$, wenn $\varrho = \mathrm{Re}(j)$

$$\Delta(w, w_1 + \gamma + l, h) \leqslant |w - w_1| \, |l - \|h\alpha\||^{-(\varrho+1)} \frac{1}{\varrho} (2\pi)^{-\varrho-1}.$$

Es ist nämlich $|h\alpha + \gamma + l| \geqslant |l| - \|h\alpha\|$, da ja $|h\alpha + \gamma| = \|h\alpha\| < \frac{1}{2}$. Es ist also für alle $\xi$

$$\left|\left(\xi + 2\pi i (h\alpha + \gamma + l)\right)\right| \geqslant (|l| - \tfrac{1}{2})(2\pi)^{-\varrho-1}. \tag{21}$$

Wir haben also

$$\sum_{k > \gamma} |\Delta(w, w_1, k, h)| \leqslant |w - w_1| \sum_{|l|=1}^{\infty} (|l| - \tfrac{1}{2})^{-(\varrho+1)} \frac{1}{\varrho} (2\pi)^{-\varrho-1}.$$

Es ist also

$$\sum_{k \neq \gamma} |\Delta(w, w_1, k, h)| \leqslant |w - w_1| 2K_2(\varrho) \pi^{-\varrho-1} \frac{1}{\varrho}, \tag{21'}$$

wo $K_2(\varrho) = \sum_{l=1}^{\infty} l^{-(\varrho+1)}$ ist, welche für $\varrho > 0$ konvergent ist. Es ist also in

$$0 \leqslant w \leqslant 1, \quad 0 \leqslant w_1 \leqslant 1,$$

$$\sum_{h} |h|^{-r} \sum_{k \neq \gamma} |\Delta(w, w_1, k, h)| \leqslant 2K_1(r) K_2(\varrho) \pi^{-1-\varrho} \frac{1}{\varrho} \tag{20'}$$

wo

$$K_1(r) = \sum_h |h|^{-r}$$

ist.

Liegt der $n$-dimensionale Fall vor, so braucht man nur $|h|$ durch $|h|_n$ zu ersetzen.

Es ist in (9) nun das Glied mit $k = \gamma$, also die Reihe

$$\sum_h |h|^{-r} \|h\alpha\|^{-\varrho} \tag{22}$$

zu betrachten, wobei im mehrdimensionalen Fall $|h|$ durch $|h|_n$ zu ersetzen ist.

Der folgende Satz wird zeigen, daß (21) für $\varrho < r/\mu$ konvergent ist.

**2.** Wir wollen folgenden Satz beweisen:

*Es sei $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ ein s-Tripel reeller Zahlen. Es existiere ein positives $\mu_1$ und ein positives $C_1$, so daß für alle Gitterpunkte $h = (h_1, \ldots \ldots, h_s) \neq (0, 0, \ldots, 0)$*

$$R(h)^{\mu_1} \|\langle h\alpha \rangle\| \geqslant C_1 \tag{1}$$

*ist. Dabei sei* $\langle h\alpha \rangle = h_1\alpha_1 + \ldots + h_s\alpha_s$, $\|\xi\| = \operatorname{Min}_k |\xi - k|$ $(k \in Z)$

$$R(h) = \prod_{r=1}^{s} \operatorname{Max}(|h_r|, 1).$$

Dann ist für jede Zahl $\sigma \geqslant 2$ und jede positive Zahl $j$ mit

$$\beta = j\mu_1 < \sigma \tag{2}$$

die Reihe (erstreckt über alle $h \neq 0$)

$$\sum_h (R(h)^\sigma |\langle h\alpha \rangle|^j)^{-1} \tag{3}$$

konvergent. Ist aber $\beta = \sigma$, dann ist für $M \geqslant 1$

$$\sum_{0 < \|h\| \leqslant M} (R(h)^\sigma |\langle h\alpha \rangle|^j)^{-1} \leqslant K_1 (1 + \log M)^{2s}. \tag{3'}$$

Dabei bedeutet $\|h\| = \operatorname{Max}(|h_1|, \ldots, |h_s|)$ und $K_1$ ist eine Konstante, welche nur von $s$, $\mu_1$ und $C_1$ abhängt. Man könnte (3) aus (3′) durch partielle Summation herleiten. Es ist aber bequemer die beiden Resultate gleichzeitig herzuleiten. Der Fall (3′) wurde für $s = 1$ schon von Hardy und Littlewood behandelt (vgl. G. H. Hardy loc. cit.). Wir werden ihrer Methode folgen. Der Fall $s > 1$ verlangt allerdings eine Modifikation. Wir benützen dabei eine Methode, welche (allerdings sozusagen in kontinuierlicher Form) in der von Minkowski begründeten Geometrie der



Zahlen verwendet wird (man vergleiche die Entwicklungen ab Formel (23)).

Wir gehen nun zum Beweis von (3) bzw. (3′) über. Aus (1) folgt

$$R(h)^\beta \|\langle h\alpha \rangle\|^j \geqslant C_1^j = C. \tag{4}$$

Wir setzen im folgenden stets $\beta \leqslant \sigma$ voraus.

Gilt nun statt (4) schärfer

$$R(h)^\beta \|\langle h\alpha \rangle\|^j \geqslant CR(h) \tag{4'}$$

dann ist für jedes $M \geqslant 1$

$$\sum_{\|h\| \leqslant M} R(h)^{-1} \leqslant 2^s (1 + \log M)^s \tag{5}$$

und es ist also

$$\sum_{\|h\| \leqslant M} (R(h)^\sigma \|\langle h\alpha \rangle\|^j)^{-1} \leqslant \frac{2^s}{C} (1 + \log M)^s \tag{6}$$

also ist (3′) richtig und (3) ist trivial. Wir setzen daher jetzt

$$R(h)^\beta \|\langle h\alpha \rangle\|^j \leqslant CR(h) \tag{7}$$

voraus. Weiter setzen wir

$$\beta \geqslant 1 \tag{8'}$$

voraus. Von (8′) werden wir uns ganz zum Schluß befreien.

Wir betrachten unter diesen Voraussetzungen

$$S(M) = \sum_{\|h\| \leqslant M} (R(h)^\sigma \|\langle h\alpha \rangle\|^j)^{-1}. \tag{9}$$

Wir zerlegen $S(M)$ in $([\log M])^s$ Teilsummen

$$S_1(L) = \sum\nolimits^* (R(h)^\sigma \|\langle h\alpha \rangle\|^j)^{-1} \tag{10}$$

wo in (10) $h$ alle Gitterpunkte $(h_1, \ldots, h_s)$ mit (für $r = 1, 2, \ldots, s$)

$$e(L_r) \leqslant \operatorname{Max}(|h_r|, 1) \leqslant e(L_r + 1) \tag{11}$$

durchläuft. Dabei bedeute im weiteren stets $e(k) = 2^k$ (abweichend vom üblichen Gebrauch $e(k) = e^k$).

Wir erhalten $S(M)$, wenn $L = (L_1, \ldots, L_s)$ alle Gitterpunkte mit

$$0 \leqslant L_r \leqslant [\log_2 M] - 1 \tag{12}$$

für $r = 1, 2, \ldots, s$ durchläuft und log zur Basis 2 genommen wird.

Um nun $S_1(L)$ weiter zu behandeln, teilen wir sie in $L_1 \ldots L_s$ Teilsummen $S_2(L, k)$. Dabei ist nun (7) wichtig. Wir verlangen von den $h$ in $S_2(L, k)$

nicht nur (11), sondern noch

$$(13)\quad C\prod_{r=1}^{s}\max(1,\,|h_r|)^{(k_r-1)/L_r}\leqslant R(h)^{\beta}\|\langle h\alpha\rangle\|^{j}\leqslant C\prod_{r=1}^{s}\max(1,\,|h_r|)^{k_r/L_r}.$$

Dabei sind $k_r$ $(r=1,2,\ldots,s)$ natürliche Zahlen mit

$$(14)\qquad 1\leqslant k_r\leqslant L_r.$$

Ist aber $L_r=0$, dann sei $k_r=0$. In diesem Fall bedeutet $k_r/L_r=1$ und $(k_r-1)/L_r=0$.

Die Menge der Gitterpunkte $h=(h_1,\ldots,h_s)$, welche (13) und natürlich (11) erfüllen, bezeichnen wir mit $K(L,k)$ mit $k=(k_1,\ldots,k_s)$, ihre Anzahl mit $|K(L,k)|$. Diese Anzahl wollen wir nun nach oben abschätzen.

Wir werden zunächst folgendes zeigen: Liegen die Gitterpunkte $h=(h_1,\ldots,h_s)$ und $h'=(h_1',\ldots,h_s')$ in der gleichen Menge $K$ und ist $h\neq h'$, dann kann nicht für alle $r$ $(r=1,2,\ldots,s)$ gelten

$$(15)\qquad |h_r-h_r'|<e(-1/\mu_1)m_r$$

mit

$$(15')\qquad m_r=e\left(L_r-\frac{1}{\beta}k_r\right).$$

Dies zeigen wir so: Wir nehmen an, daß (15) für alle $r$ gilt und leiten daraus einen Widerspruch her.

Da $h\neq h'$, so muß für mindestens ein $r$

$$(16)\qquad 1\leqslant|h_r-h_r'|<e(-1/\mu_1)m_r$$

gelten. Wir setzen $n_r=h_r-h_r'$ $(r=1,\ldots,s)$ und $n=(n_1,\ldots,n_s)$. Nach (1) gilt dann

$$(17)\qquad R(n)^{\mu_1}|\langle n\alpha\rangle|\geqslant C_1.$$

Nun ist $R(n)=\prod_{r=1}^{s}\mathrm{Max}(|n_r|,1)$. Es ist nach (16)

$$(18)\qquad R(n)<\prod\nolimits^{*}m_re(-1/\mu_1)$$

wobei der Stern in (18) andeutet, daß sich das Produkt über alle $r$, für die (16) gilt, erstreckt. Für die anderen $r$ ist $\mathrm{Max}(|n_r|,1)=1$. Die Anzahl der $r$ mit (16) sei $v$, dann ist nach (18)

$$(19)\qquad R(n)<e(-v/\mu_1)\prod\nolimits^{*}m_r\leqslant e(-1/\mu_1)\prod_{r=1}^{s}m_r.$$

Dabei haben wir benützt, daß nach (8′) und (14) $\beta^{-1}k_r\leqslant k_r\leqslant L_r$, also stets $m_r\geqslant1$ und $v\geqslant1$ nach Annahme $h\neq h'$ ist. Aus (19) folgt

$$R(n)^{\mu_1}<\tfrac{1}{2}\prod_{r=1}^{s}m_r^{\mu_1}.$$



Es ist also nach (17)

$$(20)\qquad |\langle n\alpha\rangle|>2C_2,$$

wo wir

$$C_1\prod_{r=1}^{s}m_r^{-\mu_1}=C_2$$

gesetzt haben. Es gehören nun andererseits $h$ und $h'$ zur gleichen Menge $K(L,k)$. Es ist also nach (13), wobei wir benützen, daß

$$R(h)=\prod_{r=1}^{s}|h_r|$$

ist (wenn alle $h_r\neq0$ sind).

$$\|\langle h\alpha\rangle\|^{j}\leqslant C\prod_{r}|h_r|^{(k_r/L_r)-\beta}.$$

Wir haben also, da ja $C=C_1^j$

$$(21)\qquad \|\langle h\alpha\rangle\|\leqslant C_1\prod_{r}|h_r|^{-j^{-1}(\beta-k_r/L_r)}.$$

Nun ist $k_r/L_r\leqslant1\leqslant\beta$, also ist $\beta-k_r/L_r\geqslant0$.

Dann ist nach (11), (15′) und (21)

$$\|\langle h\alpha\rangle\|\leqslant C_1\prod_{r}e\left(-\frac{1}{j}(\beta L_r-k_r)\right)=C_2.$$

Analog haben wir

$$\|\langle h'\alpha\rangle\|\leqslant C_2.$$

Dann ist aber

$$\|\langle n\alpha\rangle\|=|\langle(h-h')\alpha\rangle|\leqslant 2C_2$$

in Widerspruch zu (20). Damit ist also gezeigt, daß für zwei verschiedene Gitterpunkte $h$, $h'$ (16) nicht für alle $r$ gelten kann.

Wir setzen nun für jedes $r$

$$(22)\qquad \bar{n}_r=e(-2/\mu_1)m_r.$$

Wir betrachten die Menge aller Gitterpunkte der Gestalt

$$(23)\qquad g=h+t$$

wo die $h$ aus der Menge $K(L,k)$ sind und $t=(t_1,\ldots,t_s)$ Gitterpunkte mit

$$(24)\qquad |t_r|\leqslant\tfrac{1}{2}\bar{n}_r$$

für $r=1,2,\ldots,s$ sind. Setzen wir $g=(g_1,g_2,\ldots,g_s)$, so gilt also nach

(11) für alle $r$

(25) $$e(L_r)-\tfrac{1}{2}\bar{n}_r \leqslant g_r \leqslant e(L_r+1)+\tfrac{1}{2}n_r.$$

Ist $h_r = 0$, so ist $L_r = 0 = k_r$ und daher $g_r = 0$.

Für ihre Anzahl $B$ gilt also

(26) $$B \leqslant \prod_r \left(e(L_r)+\bar{n}_r\right).$$

Nach (22) und (15′) ist $\bar{n}_r < e(L_r)$, wir haben also

(26′) $$B \leqslant 3^s \prod_r e(L_r).$$

Ist $h$ fest, so gehören zu ihm $A(h)$ Gitterpunkte $g$, wo

$$A(h) = \prod_{r=1}^{s} ([\bar{n}_r]+1)$$

ist. Es ist also

(26″) $$A(h) \geqslant \prod_{r=1}^{s} \bar{n}_r.$$

Die Gitterpunkte (23) sind alle voneinander verschieden, denn wäre $g = h+t = g' = h'+t'$, so wäre auch $t-t' = h'-h$. Es wäre also, wenn wir zu den Komponenten übergehen, für jedes $r$

$$t_r - t_r' = h_r' - h_r.$$

Es wäre also

$$|h_r' - h_r| = |t_r - t_r'| \leqslant \bar{n}_r < m_r e(-1/\mu_1),$$

d.h. es würde (15) gelten. Dann kann aber nicht $h \neq h'$ sein. Ist aber $h = h'$, so folgt $t = t'$, also $g = g'$.

Es ist also, da $A(h)$ von $h$ unabhängig ist und die Anzahl der $h$ ja $|K(L,k)|$ ist

$$A \cdot K = B.$$

Wir erhalten nach (26′), (26″), (22), (15′)

$$e\left(\frac{-2s}{\mu_1}\right) K \prod_{r=1}^{s} e\left(L_r - \frac{1}{\beta} k_r\right) \leqslant 3^s \prod_{r=1}^{s} e(L_r).$$

Damit erhalten wir

(27) $$K(L,k) \leqslant e\left(2s\left(1+\frac{1}{\mu_1}\right)\right) \prod_{r=1}^{s} e(\beta^{-1} k_r).$$

Wir schätzen nun eine Summe $S_2(L,k)$ ab, also eine Summe

(28) $$S_2(L,k) = \sum_{h \in K} \left(R(h)^\sigma \|\langle h\alpha\rangle\|^j\right)^{-1}.$$



Es ist nach (13),

$$S_2(L,k) \leqslant C^{-1} \sum_{h \in K} \left(\prod_{r=1}^{s} \max(1, |h_r|)^{\gamma_r}\right)^{-1}$$

wo

$$\gamma_r = \sigma - \beta + (k_r - 1)/L_r$$

ist. Nun berücksichtigen wir, daß $\sigma \geqslant \beta$ ist und beachten (11), dann erhalten wir

(29) $$S_2(L,k) \leqslant C \prod_r e(-\delta_r) \sum_{h \in K} 1$$

wo

$$\delta_r = L_r(\sigma-\beta) + k_r - 1$$

ist. Nun ist ja $\sum_{h \in K} 1$ gerade $K$. Wir erhalten also nach (27), da ja $\beta \geqslant 1$ ist

(30) $$S_2(L,k) \leqslant e\left(3s\left(1+\frac{1}{\mu_1}\right)\right) \prod_r e\left(-L_r(\sigma-\beta)\right).$$

(Es „kürzen" sich die $k_r$ gerade weg.)

Nun ist

$$S_1(L) = \sum\nolimits^* S_2(L,k)$$

wo sich die Summation über alle $K(L,k)$ bei festem $L$ erstreckt. Ihre Anzahl ist $R(L)$.

Es ist also nach (30)

(31) $$S_1(L) \leqslant e\left(3s(1+\mu_1^{-1})\right) C \prod_r L_r^* e\left(-L_r(\sigma-\beta)\right)$$

wo $L_r^* = \operatorname{Max}(L_r, 1)$.

Dann ist nach (9)

(32) $$S'(M) \leqslant C_3 U^s$$

wo

(32′) $$U = \sum_{L=0}^{a} (1+L) e\left(-L(\sigma-\beta)\right)$$

mit $a = [\log M]-1$ ist. Dabei ist $S'(M)$ jener Teil von $S(M)$, welcher alle $h$ enthält, für welche alle Komponenten $h_r \neq 0$ sind und das gleiche Vorzeichen haben. Dabei haben wir noch in (32)

(33) $$C_3 = e\left(3s(1+\mu_1^{-1})\right) C_1^{-j}$$

gesetzt. Es ist nun, wenn $\sigma = \beta$,

(34) $$U \leqslant a^2 \leqslant ([\log M]+1)^2.$$

Wenn aber $\gamma = \sigma - \beta > 0$, dann ist

$$U \leqslant \sum_{L=0}^{\infty} (1+L) 2^{-L\gamma} = C_4(\gamma). \tag{34'}$$

Es ist $C_4(\gamma) > \big(1 - e(-\gamma)\big)^{-1} > 1$.

Wir erhalten also, wenn $\gamma = \sigma - \beta > 0$

$$S'(M) \leqslant C_3 C_4^s(\gamma). \tag{35}$$

Für jede dieser $S'(M)$ gilt sicher (35), da $C_4 > 1$ und stets nur der Betrag der $h_r$ eingegangen ist. Wir erhalten also mit $\gamma = \sigma - \beta$

$$S(M) \leqslant 4^s C_3 C_4^s(\gamma). \tag{36}$$

Damit ist (3) bewiesen, wenn (8') gilt.

Wenn $\sigma = \beta$ erhalten wir nach der gleichen Überlegung

$$S(M) \leqslant K_1 \log^{2s} M$$

wo $K_1 = 4^s C_3$ ist. Damit ist also (3') bewiesen.

Nehmen wir nun zum Schluß an, daß (8') nicht gilt, also $\beta < 1$ ist. Nach (4) ist doch

$$|\langle h\alpha\rangle|^{\beta} \geqslant C R(h)^{-\beta}$$

also, wenn wieder $\gamma = \sigma - \beta$

$$\sum_{\|h\| \leqslant M} \big(R(h)^{\sigma} \|\langle h\alpha\rangle\|^{j}\big)^{-1} \leqslant C^{-1} \sum_{\|h\| \leqslant M} R(h)^{-\gamma}. \tag{37}$$

Da $\sigma \geqslant 2$ vorausgesetzt ist, so ist $\gamma > 1$, also ist die Reihe in (37) konvergent.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß für alle $h$ entweder (4') oder (7) gilt.

Gibt es aber sowohl $h$ für welche (4') gilt, aber auch solche für welche (7) gilt, so behandelt man diese beiden Fälle getrennt und wendet (6) und (35) bzw. (37) an und addiert die erhaltenen Abschätzungen. Damit ist dann (3) vollkommen bewiesen.

Es erhebt sich nun die Frage, wie gut die erhaltenen Abschätzungen eigentlich sind. Zunächst zeigen wir einmal folgendes, wobei wir eine schöne Methode von S. Haber und C. F. Osgood (Pacific J. Math. 31 (1969), pp. 383–394) benutzen:

Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ linear unabhängig über $Z$. Weiter seien $M_1, \ldots, M_s$ positive Zahlen und es sei $t$ die natürliche Zahl mit

$$2^{t+1} \leqslant M_1 \ldots M_s < 2^{t+2}.$$

(Wir setzen dabei $M_1 \ldots M_s \geqslant 4$ voraus.) Es sei $g$ eine beliebige natürliche Zahl $\leqslant t$.



Dann gilt mit $L = 2^g$

$$\sum{}^{*} \|h\alpha\|^{-j} \geqslant 2^{j+t-3} L^{j-1} \sum_{f=1}^{g} 2^{-f(j-1)}. \tag{38}$$

Dabei erstreckt sich die Summation links in (38) über alle $h = (h_1 \ldots h_s) \neq 0$ mit

$$|h_1| \leqslant M_1, \;\ldots,\; 0 \leqslant |h_s| \leqslant M_s. \tag{39}$$

Bei dem Beweis von (38) werden wir in der Menge $S$ aller Gitterpunkte $h$, welche (39) erfüllen, deren Kardinalzahl $|S| \geqslant 2^{t+1} = K$ ist, Mengen $S_0, S_1, \ldots, S_g$ so herausgreifen, daß

$$|S_0| = \frac{\overline{K}}{\overline{L}} - 1, \qquad |S_i| = 2^{f-1} \frac{\overline{K}}{\overline{L}} - 1 \qquad (1 \leqslant f \leqslant g) \tag{40}$$

ist. Weiters ist stets für jedes $f \leqslant g-1$

$$[S_0 \cup \ldots \cup S_f \cap S_{f+1} = \emptyset. \tag{41}$$

Es sind die $S_f$ also alle zueinander disjunkt.

Weiters gilt für jedes $h \in S_0$

$$\|\langle h\alpha\rangle\| < L^{-1} \tag{42}$$

und für jedes $h \in S_f$ $(f \geqslant 1)$

$$\|\langle h\alpha\rangle\| < 2^f / L. \tag{42'}$$

Wir führen den Beweis zunächst für $f = 0$. Für jedes $h \in S$ mit $h_1 \geqslant 0, \ldots, h_s \geqslant 0$ sei

$$\delta(h) = \langle h\alpha\rangle - [\langle h\alpha\rangle].$$

Es liegt $\delta(h)$ im Intervall $E = [0, 1[$. Wir teilen nun $E$ in die $L$ Teilintervalle $I(a)$

$$a/L \leqslant \xi < (a+1)/L$$

$(a = 0, 1, 2, \ldots, L-1)$. Es muß ein Intervall $I(a)$ geben, welches mindestens $A = \overline{K}/\overline{L}$ Punkte $\delta(h)$ enthält. Es seien dies die Gitterpunkte $h(1), h(2), \ldots, h(A)$.

Wir setzen nun

$$\bar{h}(j) = h(j) - h(A)$$

für $j = 1, \ldots, A-1$. Es sind alle diese $\bar{h}(j) \neq 0$ und es gilt für die $k$-te Komponente von $\bar{h}(j)$

$$|\bar{h}_k(j)| \leqslant M_k.$$

Es liegen also alle $\bar{h}(j)$ in $S$ und es ist

$$\|\langle \bar{h}(j)\alpha\rangle\| < 1/L.$$

Wir können also als $S_0$ die Menge $\{\bar{h}(1), \ldots, \bar{h}(A-1)\}$ nehmen. Jetzt können wir mit vollständiger Induktion nach $f$ vorgehen. Nehmen wir an $S_0, S_1, \ldots, S_L$ wären bereits konstruiert. Wir betrachten wie vorher für jedes $h \in S$ mit $h_1 \geqslant 0, \ldots, h_s \geqslant 0$

$$\delta(h) = \langle h\alpha\rangle - [\langle h\alpha\rangle].$$

Jetzt teilen wir aber $E$ in die $L/2^{k+1}$ Teilintervalle

$$\frac{2^{k+1}a}{L} \leqslant \xi < \frac{2^{k+1}(a+1)}{L}$$

$(a = 0, \ldots, L/2^{f+1})$. Es muß ein Intervall $I(a)$ geben, welches mindestens $A_f = 2^{f+1}\dfrac{\bar{K}}{\bar{L}}$ Punkte $\delta(h)$ enthält und wir können also schließen, daß es eine Menge $S'_{f+1}$ von Gitterpunkten $h \neq 0$ in $S$ gibt, so daß

$$\|\langle h\alpha\rangle\| < \frac{2^{f+1}}{L}$$

ist. Es ist die Kardinalzahl $|S'_{f+1}| = 2^{f+1}\dfrac{\bar{K}}{\bar{L}}$. Wir betrachten nun die Menge

$$S''_{f+1} = S'_{f+1} - (S_0 \cup S_1 \cup \ldots \cup S_f).$$

Es erfüllt $S_{f+1}$ die Bedingung (41) und es ist

$$|S''_{f+1}| \geqslant \frac{\bar{K}}{\bar{L}}\left(2^{f+1} - (1+1+\ldots+2^f)\right) - 1.$$

Es gibt also eine Teilmenge $S_{f+1}$, welche (40) erfüllt. Es ist nun

$$\sum\nolimits^* \|\langle h\alpha\rangle\|^{-j} \geqslant \sum_{f=1}^{g} \sum_{h\in S_f} \|\langle h\alpha\rangle\|^{-j}.$$

Nun ist nach (42')

$$\sum_{h\in S_f} \|\langle h\alpha\rangle\|^{-j} \geqslant \left(\frac{L}{2^f}\right)^j \sum_{h\in S_f} 1.$$

Es ist also nach (40)

$$\sum\nolimits^* \|\langle h\alpha\rangle\|^{-j} \geqslant \left(\frac{L}{2^f}\right)^j (2^{f+i-g} - 1)$$

und daraus folgt sofort (38).

Wir machen nun folgendes. Es sei $\alpha$ vom Typus $\mu$, wie dies in § 1 (19) definiert wurde. Es gibt also Gitterpunkte $\bar{h} = (\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_s) \neq 0$ so daß

(43) $$\|\bar{h}\alpha\| < R(h)^{-\mu_1}$$



ist, wo $\mu_1 \geqslant 1$. Wir haben dabei $c_1 = 1$ der Einfachheit halber angenommen. Wir nehmen nun

$$U = [2^{\frac{s}{s+1}} R(\bar{h})^{\frac{\mu_1 - 1}{s+1}}] + 1.$$

Wir wollen um die Diskussion zu vereinfachen auch noch annehmen, daß alle Komponenten von $\bar{h}$ ungleich Null sind. Dann definieren wir

(44) $$M_j = U|\bar{h}_j|.$$

Es ist

(45) $$M_1 \ldots M_s = U^s R(\bar{h}).$$

Weiters sei

$$g = [\log_2(R(\bar{h})^{\mu_1}/U)]$$

und

(45') $$L = 2^g.$$

Es sei nun für jedes $h$ aus $S_f$

(46) $$h'(h) = h + 2U\bar{h}.$$

Für die $k$-te Komponente gilt dann

$$h'_k = h_k + 2U\bar{h}_k$$

und es ist

(47) $$U|\bar{h}_k| \leqslant |h'_k| \leqslant 3U|\bar{h}_k|.$$

Es ist weiter

$$\|h'\alpha\| \leqslant \|h\alpha\| + 2U\|\bar{h}\alpha\|$$

also nach (42') und (43)

$$\|h'\alpha\| < 2^f/L + 2UR(h)^{-\mu_1}.$$

Nun ist nach (45')

$$U/R(h)^{\mu_1} \leqslant 1/L$$

es ist also

$$\|h'\alpha\| < 2^{f+1}/L.$$

Für verschiedene $h$ aus $S_f$ sind auch die $h'$ verschieden, so daß wir erhalten

$$\sum_{h\in S_f} \|h'\alpha\|^{-j} \geqslant \left(\frac{L}{2^{f+1}}\right)^j |S_f|.$$

Damit erhalten wir: Es ist

(48) $$\sum_{h'}\nolimits^* \|h\alpha\|^{-j} \geqslant 2^{-j}V$$

wo $V$ durch die rechte Seite von (38) mittels (44) und (45′) definiert sei. Die Summation in (48) erstreckt sich über alle Gitterpunkte $h' \neq 0$, welche (47) erfüllen.

Es ist daher nach (47)

$$\sum\nolimits^{*} R(h')^{-\sigma}\|h'\alpha\|^{-j} \geq \big(U^n R(\bar{h})\big)^{-\sigma} 2^{-j} V = V_1.$$

Damit erhalten wir sofort

$$\sum\nolimits' R(h)^{-r}\|h\alpha\|^{-j} \geq V_1. \tag{49}$$

Dabei erstreckt sich in (49) die Summation über alle Gitterpunkte, $h = (h_1, \ldots, h_s) \neq 0$ mit

$$|h_1| \leq 3U|\bar{h}_1|, \ldots, |h_s| \leq 3U|\bar{h}_n|. \tag{50}$$

Setzt man alles ein, so erhält man aus (49)

$$\sum\nolimits' R(h)^{-\sigma}\|h\alpha\|^{-j} \geq C_2 \big(U^s R(\bar{h})\big)^{\sigma-j} \sum_{f=1}^{g} \frac{1}{2^{f(j-1)}} \tag{51}$$

wo $g = O(\log L)$ ist.

Diese Abschätzung ist mit der oberen Abschätzung in (36) gut vergleichbar, wenn $\mu_1 = 1$ ist. Dann liefert (51) als untere Schranke $cR(\bar{h})^{j-\sigma}$ also von der gleichen Größenordnung $R(\bar{h})^{j-\sigma}$ wie in (36).

**3.** Wir wollen nun den Beweis von § 1 (6), (7), (11) und (15) zu Ende führen. Wir betrachten die Funktion

$$F(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f\big(l + (x); j\big) \tag{1}$$

wo

$$f(y) = y^{j-1} e^{-yw} P_r(y\alpha) \tag{2}$$

für $\mathrm{Re}(j) > 1$. Dabei ist $(x) = x - [x]$. Gilt nur $\mathrm{Re}(j) > 0$, dann sei

$$f(y) = y^{j-1}(e^{-yw} - e^{-yw_1}) P_r(y\alpha). \tag{3}$$

Es ist $F$ eine periodische Funktion in $x$ mit der Periode 1.

Es ist $F(0) = S(w, j, \alpha)$ im Falle (2) und es ist $F(0) = S(w, w_1, j, \alpha)$ im Falle (3).

Es ist $F$ stetig in $x$ nicht nur für $0 < x < 1$, sondern auch für $x = 0$ und damit für alle ganzen Zahlen. Es ist nämlich die Reihe absolut und gleichmäßig konvergent in $x$.

Es existieren also $\lim\limits_{x \to +0} F(x) = F(+0)$ und $\lim\limits_{x \to -0} F(0) = F(-0)$; Betrachten wir zuerst den Fall (2). Es ist für $-1 < x < 0$ ja $[x] = -1$, also ist

$$F(-0) = \sum_{l=0}^{\infty} (l+1)^{j-1} e^{-(l+1)w} P_r\big((l+1)\alpha\big).$$



Wenn $0 < x < 1$, so ist $[x] = 0$, also

$$F(+0) = \sum_{l=0}^{\infty} l^{j-1} e^{-lw} P_r(l\alpha).$$

Da $\mathrm{Re}(j) > 1$, so ist $L^{j-1}$ für $L = 0$ gleich Null, also ist $F(-0) = F(+0) = F(0)$. Das Gleiche gilt nun auch im Falle (3), denn hier ist die Funktion $\varphi$ (man vgl. die Definition in (8′)) stetig an der Stelle $L = 0$ und besitzt dort den Wert 0.

Wir entwickeln nun $F$ in eine Fourierreihe

$$\sum_{k \in Z} a_k e(kx) \tag{4}$$

wobei

$$a_k = \int_0^1 F(x) e(-kx)\, dx$$

ist. Es ist also, wenn wir nur den Fall (2) betrachten (der Fall (3) geht genau so)

$$a_k = \int_0^1 \sum_{L=0}^{\infty} f\big(L + (x)\big) e(-kx)\, dx = \int_0^{\infty} f(y) e(-ky)\, dy.$$

Es ist die Reihe für $P_r$ absolut und gleichmäßig konvergent und wir erhalten, wenn wir das Integral mit der Reihe vertauschen

$$a_k = \sum_{h \neq 0} c(h) \int_0^{\infty} e^{-yw} y^{j-1} e\big(y(h\alpha - k)\big)\, dy,$$

wo

$$c(h) = \varepsilon(h)|h|^{-r} \tag{5}$$

ist.

Es ist nun bekanntlich

$$\int_0^{\infty} y^{j-1} \exp\big(-y(w + 2\pi i\gamma)\big)\, dy$$

($\exp(u) = e^u$) gleich

$$\Gamma(j)(w + 2\pi i\gamma)^{-j}.$$

Wir erhalten also

$$a_k = \Gamma(j) \sum_{h \neq 0} c_h \big(w + 2\pi i(h\alpha + k)\big)^{-j}. \tag{6}$$

Damit ist also $F$ die Fourierreihe

$$\sum a_k e(kx) = \Gamma(j) \sum_{k, h \neq 0} c(h) e(-xk) \Delta(k, h) \tag{7}$$

wo

$$\Delta(k, h) = \big(w+2\pi i(ha+k)\big)^{-j}$$

ist, zugeordnet. Nun haben wir gezeigt, daß die Reihe rechts in (7) absolut und gleichmäßig konvergent ist, also ist für $\mathrm{Re}(j) > 1$.

$$F(x) = \Gamma(j) \sum_{k,h\neq 0} c(h) e(-kx) \Delta(k, h). \tag{8}$$

Setzen wir in (8) $x = 0$, so erhalten wir gerade § 1 (6). Wir haben gleichzeitig eine Verallgemeinerung von § 1 (6) gefunden. Wir sehen auch gleich, daß die genaue Gestalt von $c(h)$ keine Rolle spielt; es genügt, daß

$$|c(h)| \leqslant 1/|h|^r \tag{5'}$$

ist.

Führt man die gleiche Überlegung im Falle (3) durch, so erhält man analog

$$F(x) = \Gamma(j) \sum_{k,h\neq 0} c(h) e(-kx) \Delta(w, w_1, h, k) \tag{9}$$

welche für $R(j) > 0$ gilt. Für $x = 0$ erhält man § 1 (7). Wir wollen nun (11) beweisen.

Wir nehmen für $f$ eine Funktion $f_1$, welche so definiert ist: Ist $|y| \leqslant w$, dann ist

$$f_1(y) = (w^2-y^2)^{\lambda-1/2} P_r(y\alpha). \tag{10}$$

Ist aber $|y| > w$, dann ist $f_1(y) = 0$.

Dabei ändern wir auch (1) ab, indem wir definieren

$$F(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_1\big(l+(x)\big). \tag{1'}$$

Es ist jetzt

$$a_k = \sum_{h\neq 0} c(h) \int_{-w}^{w} (w^2-y^2)^{\lambda-1/2} e\big(y(ha-k)\big)\, dy.$$

Nun ist bekanntlich (vgl. z.B. Courant–Hilbert, *Methoden der Mathematischen Physik I*, Kapitel 7, Formel (19))

$$\mathfrak{I}_\lambda(z) = \big(\Gamma(\tfrac12)\big)\big(\Gamma(\lambda+\tfrac12)\big)\left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\lambda-1/2} e(uz)\, du.$$

Es ist also (vgl. § 1 (13'))

$$a_k = 2^\lambda \Gamma(\lambda+\tfrac12)\Gamma(\tfrac12)\Delta_2(h, k).$$

Es ist nun stets

$$|\mathfrak{I}_\lambda(z)| \leqslant c|z|^{-1/2}$$



also haben wir für die Reihe

$$\sum_{k,h\neq 0} |h|^{-r} \Delta_2(h, k)$$

die Majorante

$$\sum_{k,h\neq 0} |h|^{-r} |ha-k|^{-(\lambda+1/2)}$$

welche für $\lambda+\frac12 < r/\mu$ konvergent ist.

Weiter ist $F$ stetig auch in $x = 0$. Damit erhalten wir

$$F(x) = 2^\lambda \Gamma(\lambda+\tfrac12)\Gamma(\tfrac12) \sum_{h,k} c(h) e(-kx) \Delta_2(h, k). \tag{11}$$

Wir betrachten zum Schluß noch in (1) die Funktion $f_2$ definiert durch

$$f_2(y) = e^{-y^2 w} y^{j-1} P_r(y\alpha) \tag{12}$$

dann haben wir

$$a_k = \sum c(h) \int_0^\infty dy\, e^{-wy^2} y^{j-1} e\big(y(ha-k)\big).$$

Es ist nun

$$\int_0^\infty e^{-u^2} u^{j-1} e^{-2\pi i u\gamma} du = \Gamma(j) 2^{-j/2} D_j^*(\gamma),$$

wo

$$D_j^*(\gamma) = e^{-2(\pi\gamma)^2} D_{-j}(\sqrt{2}\pi i\gamma)$$

ist (vgl. Magnus–Oberhettinger, loc. cit., S. 93).

Es ist also

$$a_k = \Gamma(j)(\sqrt{2w})^{-j} \sum_h D_j^*\left(\frac{ha-k}{\sqrt{w}}\right).$$

Es ist nun (man vgl. Magnus–Oberhettinger, loc. cit., S. 92)

$$\left|D_j^*\left(\frac{ha+k}{\sqrt{w}}\right)\right| \leqslant C\left(\frac{\sqrt{w}}{|ha+k|}\right)^j.$$

Wir erhalten also

$$F(x) = \Gamma(j)(\sqrt{2w})^{-j} \sum_{k,h\neq 0} c(h) e(-kx) \Delta_2(h, k) \tag{13}$$

(man vgl. § 1 (13'')).

Dabei muß die Bedingung § 1 (5) gelten. Damit ist auch § 1 (15) bewiesen.

**4.** Wir wollen nun die Formel § 1 (7) auf die in § 1 (18) eingeführte Zetafunktion anwenden.

Es sei $j > 0$, dann ist für $\mathrm{Re}(s) > 1$ mit $\delta = s+j-1$ nach Definition der Gammafunktion

$$\Gamma(\delta) = l^{\delta}\int_0^{\infty} e^{-lx}\psi(x, \delta)\,dx$$

wo

$$\psi(x, \delta) = x^{\delta-1}$$

gesetzt wurde. Es ist also

$$\Gamma(\delta)l^{-s} = l^{j-1}\int_0^{\infty} e^{-lx}\psi(x, \delta)\,dx. \tag{1}$$

Damit erhalten wir für $Z(r, s, a) = Z(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ die Darstellung

$$\Gamma(\delta)Z(s) = \int_0^{\infty} \psi(x, \delta)S(x)\,dx \tag{2}$$

wo wir statt $S(x, j, a, r)$ (vgl. § 1 (3)) nur $S(x)$ geschrieben haben. Wir setzen nun

$$Z = Z_1+Z_2 \tag{3}$$

wo

$$\Gamma(\delta)Z_1 = \int_0^{1} \psi(x, \delta)S(x)\,dx \tag{4}$$

und

$$\Gamma(\delta)Z_2 = \int_1^{\infty} \psi(x, \delta)S(x)\,dx \tag{5}$$

ist.

Es sei nun $\sigma_0 = 1-r/\mu$. Es ist nun für $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0+2\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ und $j_0 = r/\mu-\varepsilon$, $\mathrm{Re}(\delta) = \mathrm{Re}(s+j_0-1) \geqslant \varepsilon$. Weiter ist die Reihe § 1 (3) für $x \geqslant 1$ gleichmäßig konvergent und beschränkt.

Es ist also $Z_2$ für $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0+2\varepsilon$ und damit in $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$ analytisch. Es ist also nur mehr $Z_1$ zu betrachten. Zu diesem Zweck wählen wir ein $x_0$ mit $0 < x_0 < 1$, dann ist

$$\Gamma(\delta)Z_1(s) = Z_3(s)+Z_4(s) \tag{6}$$

wo

$$Z_3(s) = \int_0^{1} \varphi(x, \delta)S(x, x_0)\,dx \tag{7}$$

und

$$Z_4(s) = \int_0^{1} \varphi(x, \delta)S(x_0)\,dx \tag{8}$$

ist. Wir haben in (6) natürlich § 1 (8″) benützt.



Es ist für $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0+2\varepsilon$ und $j = j_0$ wieder $\mathrm{Re}(\delta) \geqslant \varepsilon$, also ist

$$\int_0^{1} \varphi(x, \delta)\,dx = 1/\delta. \tag{9}$$

Es ist also $Z_4$ analytisch für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$. Wir wenden nun auf $Z_3$ die Transformationsformel (7) an und erhalten

$$Z_3(s) = \Gamma(\delta)\int_0^{1} \varphi(x, \delta)T(x, x_0)\,dx. \tag{10}$$

Es ist nach (20) und § 2 (36) die Reihe für $T$ in $0 \leqslant x \leqslant 1$ gleichmäßig konvergent und beschränkt, d.h. es existiert ein $K$, so daß für alle $x$ mit $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$|T(x, x_0)| \leqslant K. \tag{11}$$

Es gilt dann also wieder für $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0+2\varepsilon$

$$\|x^{\delta}T\| \leqslant Kx^{-1+\varepsilon}.$$

Da das Integral $\int_0^1 x^{-1+\varepsilon}dx$ konvergiert, so ist $Z_3$ analytisch in $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0+2\varepsilon$. Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also ist $Z_3$ analytisch für $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$. Damit ist die Behauptung bewiesen:

Wenn $r/\mu > 1$ ist, dann vereinfacht sich der Beweis. Wir brauchen dann nur (5) auf $Z_1$ anzuwenden und erhalten

$$\Gamma(\delta)Z_1(s) = \Gamma(j)\int_0^{1} \psi(x, \delta)T(x)\,dx$$

und wir schließen wie vorher.

Zum Schluß bemerken wir, daß folgende Formel gilt:
Ist $1 < j < r/\mu$, $0 \leqslant \varrho \leqslant w$, dann ist

$$T(w, \varrho) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} C(j, t)T(\varrho, t)\,dt$$

wo

$$C(j, t, \varrho) = (w-\varrho)^{t-j}\Gamma(j-t)\Gamma(t)/\Gamma(j)$$

und $1 < \sigma < j$ ist. Dabei bedeutet

$$\int_{(\sigma)} = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}.$$

Ist $0 < j < r/\mu$, dann gilt

$$T(w, w_1, j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} C(j, t)T(\varrho, \varrho_1, t)\,dt \tag{12}$$

wo

$$\varrho_1 = \varrho + w + w_1 \tag{13}$$

ist.

Zum Beweis benützen wir das Additionstheorem der Gammafunktion (vgl. Rademacher, loc. cit., S. 55 (28 61))

$$\frac{\Gamma(j)}{(1+u)^j} = \int_{(\sigma)} \Gamma(j-t)\Gamma(t)u^{-t}dt \tag{14}$$

wobei $|\operatorname{arc} u| < \pi$ sei. Wir nehmen, wenn $j > 1$, $u = (\varrho + i(h\alpha + k))/(w-\varrho)$, dann erhalten wir da § 1 (5) auch für $\sigma < 1$ gilt sofort (9), da alle auftretenden Reihen absolut und gleichmäßig konvergieren. Im Falle $0 < j < r/\mu$ nehmen wir außer dem oben definierten $u$ noch

$$u_1 = (\varrho_1 + i(h\alpha + k))/(w_1 - \varrho)$$

und wieder $\sigma < j$ und erhalten (12).

Es ist ja z.B. wenn man in (14) einsetzt

$$(w + i(h\alpha + k))^{-j} = \int_{(\sigma)} C(j, t)\big((\varrho + i(h\alpha + k))^{-t}\big)dt.$$

*Eingegangen am 27. 12. 1977* (1012)

ACTA ARITHMETICA
XXXVII (1980)

# A new form of the error term in the linear sieve

by

HENRYK IWANIEC (Warszawa)

*To the memory of Professor P. Turán*

**1. Introduction.** Let $\mathscr{A}$ be a finite sequence of integers and let $\mathscr{P}$ be a set of primes. One of the fundamental problems in sieve theory is to estimate from above and from below the so-called sifting function $S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z)$ which represents the number of elements in $\mathscr{A}$ that have no prime factors $p < z$ in $\mathscr{P}$. Letting

$$P(z) = \prod_{p<z,\, p\in\mathscr{P}} p$$

one can write

$$S(\mathscr{A}, \mathscr{P}, z) = \big|\{a \in \mathscr{A};\ (a, P(z)) = 1\}\big|.$$

In general theory the sequence $\mathscr{A}$ can be almost arbitrary. The relevant information that we need about $\mathscr{A}$ is a good approximation formula (in an average sense) for the quantity

$$|\mathscr{A}_d| = |\{a \in \mathscr{A};\ a \equiv 0 \pmod d\}|$$

which represents the number of elements in $\mathscr{A}$ that are divisible by a squarefree number $d|P(z)$. It is supposed, what frequently turns out to take place in practice, that every $|\mathscr{A}_d|$ may be written in the form

$$|\mathscr{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d}X + r(\mathscr{A}, d)$$

where $\omega(d)$ is multiplicative and $0 \leqslant \omega(p) < p$ for $p \in \mathscr{P}$, $X$ is some positive number independent of $d$ and $r(\mathscr{A}, d)$ is considered as an error term, small on average (so $X$ approximates to $|\mathscr{A}|$).

If $\omega(p)$ is bounded on average, say by $\varkappa$, we then deal with $\varkappa$ dimensional sieve. In literature there are multitude of ways in which this fact