ACTA ARITHMETICA
XXXVII (1980)

Über die Verteilung der Lösungen von Normformen Gleichungen, III

von

K. Győry und A. Pethő (Debrecen)

Dem Andenken von Professor Paul Turán gewidmet

1. Einleitung. Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $n \geqslant 2$; $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ ein Z-Modul in K mit über dem rationalen Zahlkörper Q linear unabhängigen Erzeugenden. Sei $a \neq 0$ eine rationale Zahl und bezeichne $P_{M,K,a}(N)$ oder kürzer $P_M(N)$ die Anzahl der Lösungen $(x_1, \ldots \ldots, x_k) \in Z^k$ der Eigenschaft $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} |x_i| \leqslant N$ der diophantischen Gleichung

$$\mathrm{Norm}_{K/Q}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k) = a. \tag{1}$$

Wenn M nicht ausgeartet ist, d.h. der durch ihn erzeugte Vektorraum L über Q keinen Teilraum L' besitzt für welchen $L = \alpha K'$ $(\alpha \in K)$, wobei K' ein von Q und von den imaginär-quadratischen Zahlkörpern verschiedener (nicht notwendig echter) Teilkörper von K ist, dann ist nach einem bekannten Satz von W. M. Schmidt [14] $P_M(N) = O(1)$ für beliebige $a \in Q$.

Ist dagegen M ausgeartet, dann existieren $a \in Q$ mit $P_M(N) \to \infty$ falls $N \to \infty$ (s. S. I. Borewicz und I. R. Šafarevič [3], S. 299). Als Anwendung eines Ergebnisses von W. M. Schmidt [15] haben wir im Teil II ([6], Satz 1) bewiesen, daß in diesem Fall

$$P_M(N) = c\log^r N + O(\log^{r-1} N) \tag{2}$$

gilt, wo r das Maximum der Einheitenränge (¹) der Teilkörper L von K bezeichnet, für die (1) eine unendliche (M, L) Lösungsfamilie besitzt, und $c > 0$ eine nur von a, K und M abhängende Konstante ist. Im Spezialfall, wenn M ein vollständiger Modul ist (d.h. $k = n$), ist c effektiv berechnenbar ([6], Satz 2).

In der vorliegenden Arbeit werden die in den Teilen I und II für vollständige Moduln gewonnenen Ergebnisse präzisiert. In Satz 1 werden c

(¹) Unter Einheitenrang von K wird wie üblich der Rang der Einheitengruppe im Ring der ganzen Elemente von K verstanden.

und auch die Konstante in O explizit angegeben. Als Folgerung wird für einen beliebigen vollständigen Modul M eine asymptotische Formel mit expliziten Konstanten für die Anzahl der Elemente $a \in M$ gegebener Norm und $h(a) \leqslant N$ angegeben. ($h(a)$ bezeichnet das Maximum der Absolutbeträge der Konjugierten von a.) Dies ist besonders interessant für den Fall, daß M eine Ordnung von K ist oder noch spezieller $M = Z_K$ gewählt wird wo Z_K der Ring der ganzen Elemente von K ist.

In Satz 2 wird $P_K(x; N)$ die Anzahl der Lösungen $(x_1, \ldots, x_n) \in Z^n$ der Ungleichung

$$0 < |\mathrm{Norm}_{K/Q}(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)| \leqslant x \tag{3}$$

mit $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant N$ im Hauptglied und auch in einem Teil des Restgliedes mit expliziten Konstanten bestimmt, falls $a_1, \ldots, a_n$ eine Ganzheitsbasis von K ist. Dazu wird ein früheres Ergebnis von E. Landau [7], [8] und Satz 1 benutzt. Als Folgerung von Satz 2 kann man eine asymptotische Formel für die Anzahl der ganzen Elemente des Zahlkörpers K herleiten, die den Bedingungen $h(a) \leqslant N$ und $|\mathrm{Norm}_{K/Q}(a)| \leqslant x$ genügen.

2. Die Sätze und ihre Folgerungen. Sei M ein vollständiger Modul von K. Die Gesamtheit der Elemente λ von K der Eigenschaft $\lambda M \subseteq M$ wird mit $\mathfrak{D}_M$ bezeichnet und Multiplikatorenring von M genannt. $\mathfrak{D}_M$ ist eine Ordnung in K (s. [3], S. 105). Für $a \in Q$ $(a \neq 0)$ bezeichne $\varkappa_{M,K,a}$ oder kurz $\varkappa_M$ die Maximalzahl der paarweise nicht assoziierten (2) Lösungen $\mu = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \in M$ von (1). Ist $\mathfrak{D}$ eine beliebige Ordnung in K, so werde mit $w_{\mathfrak{D}}$ die Einheitswurzelanzahl, mit $R_{\mathfrak{D}}$ der Regulator, schließlich mit $D_{\mathfrak{D}}$ der Absolutbetrag der Diskriminante von $\mathfrak{D}$ bezeichnet. Wir setzen $\tau_{\mathfrak{D}} = 2$ oder $\tau_{\mathfrak{D}} = 1$ je nachdem, ob in $\mathfrak{D}$ eine Einheit der Norm -1 existiert oder nicht. In den Spezialfällen $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_M$ bzw. $\mathfrak{D} = Z_K$ werden die entsprechenden Parameter mit $w_{\mathfrak{D}_M}$, $R_{\mathfrak{D}_M}$, $D_{\mathfrak{D}_M}$, $\tau_{\mathfrak{D}_M}$ bzw. mit w_K, R_K, D_K und τ_K bezeichnet.

SATZ 1. *Seien $M = \{a_1, \ldots, a_n\}$ ein vollständiger Z-Modul des algebraischen Zahlkörpers K vom Grad $n \geqslant 2$ und vom Einheitenrang $r \geqslant 1$ mit über Q linear unabhängigen Erzeugenden $a_1, \ldots, a_n$; D_M der Absolutbetrag der Diskriminante von M und $h(a_i) \leqslant \mathscr{H}$; $i = 1, \ldots, n$ $(\mathscr{H} \geqslant 1)$. Sei $a \neq 0$ eine rationale Zahl, wofür die diophantische Gleichung*

$$\mathrm{Norm}_{K/Q}(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) = a \tag{4}$$

eine Lösung $(x_1, \ldots, x_n) \in Z^n$ besitzt. Dann gilt

$$\left|P_M(N) - \frac{n^r w_{\mathfrak{D}_M}\varkappa_M}{r!\,R_{\mathfrak{D}_M}\tau_{\mathfrak{D}_M}}\log^r N\right| \leqslant \frac{4(4n)^r w_{\mathfrak{D}_M}\varkappa_M}{R_{\mathfrak{D}_M}}c_1\log^{r-1}N \tag{5}$$

mit den obigen Bezeichnungen, falls $\log N > 2c_1$, wo

$$c_1 = \frac{1}{n}\big|\log|a|\big| + |\log D_M| + n\log(n\mathscr{H}) + (8rn)^{2(r+1)}R_{\mathfrak{D}_M}.$$

S. Lang [10], [11] hat dies für reelle quadratische Zahlkörper (wenn $n = 2$ und $r = 1$ ist) bewiesen, ohne die im Restglied vorkommende Konstante anzugeben.

Aus unserem obigen Ergebnis folgen auch unsere in den Teilen I und II für vollständige Modulen gewonnenen Sätze.

Aus dem Beweis des Satzes 1 (s. (39)) ergibt sich auch daß die Lösungen von (4) gleichmäßig in den $\varkappa_M$ Lösungsfamilien verteilt sind.

Multiplizieren wir (4) mit der n-ten Potenz einer rationalen Zahl so erreichen, wir dort $M \subseteq Z_K$ und $a \in Z_K$. Damit können wir in (5) das Restglied vereinfachen. Tatsächlich, haben wir $r < n$, $w_{\mathfrak{D}_M} \leqslant w_K \leqslant n^2$, und aus einem bekannten Satz von R. Remak [12] folgt

$$w_K/R_K < \pi(r+2)^{r+3}.$$

Ferner gilt $|\log D_M| < n\log(n\mathscr{H})$ und

$$\frac{w_{\mathfrak{D}_M}}{R_{\mathfrak{D}_M}}\varkappa_M \leqslant \frac{w_K}{R_K}d^n(a) \leqslant \pi(r+2)^{r+3}d^n(a),$$

(s. [5]). In diesem Fall können wir als Koeffizient von $\log^{r-1}N$ auf der rechten Seite von (5) $(8rn)^{3(r+1)}[\varkappa_M + d^n(a)\log(a\mathscr{H})]$ nehmen, wo $\varkappa_M$ bekanntlich effektiv berechnenbar ist ([3], Kap. II., § 5), und eine nur von a, K und M abhängende obere Schranke besitzt.

Aus unserem Satz 1 von [6] folgt, daß für einen ausgearteten Modul M von K die Anzahl der Elemente $a \in M$ der Norm a und mit $h(a) \leqslant N$ entweder $O(1)$ oder $c\log^r N + O(\log^{r-1}N)$ ist mit den Konstanten $c > 0$ und r aus (2) (vgl. hierzu den Beweis der unterstehenden Folgerung 1). Wenn M ein vollständiger Modul ist, so können wir auch mehr sagen. Mit den obigen Bezeichnungen gilt.

FOLGERUNG 1. *Seien M ein vollständiger Modul von K, der Absolutbetrag seiner Diskriminante D_M und $d \neq 0$ eine rationale Zahl mit $dM \subseteq Z_K$. Sei $0 \neq a \in Q$ und bezeichne $\varkappa_M$ die Maximalzahl der paarweise, bezüglich $\mathfrak{D}_M$, nicht assoziierten Elemente der Norm a von M, sowie $P_M^*(N)$ die Anzahl der Elemente $a \in M$ der Norm a und mit $h(a) \leqslant N$. Dann gilt*

$$\left|P_M^*(N) - \frac{n^r w_{\mathfrak{D}_M}\varkappa_M}{r!\,R_{\mathfrak{D}_M}\tau_{\mathfrak{D}_M}}\log^r N\right| \leqslant \frac{4(8n)^r w_{\mathfrak{D}_M}\varkappa_M}{R_{\mathfrak{D}_M}}c_2\log^{r-1}N \tag{6}$$

falls

$$\log N > 2c_2 = 2\left[\frac{1}{n}\big|\log|a|\big| + n(|\log D_M| + n^2\log dD_K) + (8rn)^{2(r+1)}R_{\mathfrak{D}_M}\right].$$

(2) Die Lösungen $\mu = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ und $\mu' = a_1x_1' + \ldots + a_nx_n'$ von (1) heißen assoziiert, wenn sie sich nur um einen in $\mathfrak{D}_M$ liegenden Einheitenfaktor unterscheiden.

Es sei angemerkt daß im übrigen auch Folgerung 1 Satz 1 impliziert. (Selbstverständlich kommen wir von c_2 ausgehend zu einer anderen Konstante c_1.)

Die Folgerung 1 wird jetzt im Spezialfall $M = Z_K$ betrachtet, dann bezeichnet $P_K^*(N)$ also bei gegebenem $0 \neq a \in Z$ die Anzahl der Elemente $a \in Z_K$ der Norm a und mit $h(a) \leqslant N$.

Folgerung 2. *Seien $a \neq 0$ eine ganzrationale Zahl und $\varkappa = \varkappa_{Z_K}$. Bei den obigen Bezeichnungen gilt*

$$\left|P_K^*(N) - \frac{n^r w_K \varkappa}{r! R_K \tau_K}\log^r N\right| \leqslant \frac{4(8n)^r w_K \varkappa}{R_K} c_3 \log^{r-1} N$$

falls

$$\log N > 2c_3 = 2\left[\frac{1}{n}\log|a| + 2n^3 \log D_K + (8rn)^{2(r+1)} R_K\right].$$

Gemäß der Bemerkung nach Satz 1 kann man auf der rechten Seite anstatt c_3 auch $c_3^* = (6rn)^{4(r+1)} d^n(a) \log|aD_K|$ setzen.

Die Verteilung der Einheiten in einer beliebigen Ordnung $\mathscr{D}$ von K wird jetzt untersucht. $\mathscr{D}$ ist ein vollständiger Modul in K, und gleichzeitig sein eigener Multiplikatorenring. Deswegen erhalten wir aus Folgerung 1 unmittelbar.

Folgerung 3. *Sei $\mathscr{D}$ eine Ordnung in dem algebraischen Zahlkörper K und bezeichne $P_{\mathscr{D},\varepsilon}^*(N)$ die Anzahl der Einheiten $\varepsilon \in \mathscr{D}$, wofür $h(\varepsilon) \leqslant N$. Dann gilt bei den obigen Bezeichnungen*

$$\left|P_{\mathscr{D},\varepsilon}^*(N) - \frac{n^r w_{\mathscr{D}}}{r! R_{\mathscr{D}}}\log^r N\right| \leqslant \frac{8(8n)^r w_{\mathscr{D}}}{R_{\mathscr{D}}} c_4 \log^{r-1} N$$

falls

$$\log N > 2c_4 = 2[n\log D_{\mathscr{D}} + n^3 \log D_K + (8rn)^{2(r+1)} R_{\mathscr{D}}].$$

Ein wichtiger Spezialfall ist $\mathscr{D} = Z_K$. Bezeichne $P_{K,\varepsilon}^*(N)$ die Anzahl der Einheiten von K mit $h(\varepsilon) \leqslant N$, so erhalten wir unter Verwendung der nach Satz 1 erwähnten oberen Schranke für w_K/R_K

$$(7)\qquad \left|P_{K,\varepsilon}^*(N) - \frac{n^r w_K}{r! R_K}\log^r N\right|$$
$$\leqslant \frac{8(8n)^r w_K}{R_K}[2n^3 \log D_K + (8rn)^{2(r+1)} R_K]\log^{r-1} N < (8rn)^{3(r+1)} \log D_K \log^{r-1} N$$

falls $\log N > (8rn)^{3(r+1)} \log D_K$.

Wir wollen hier erwähnen daß S. Lang in [9] (S. 58) bemerkt, mit unserer Bezeichnung für die Anzahl der Einheiten ε von K mit $H(\varepsilon) \leqslant N$ sei die asymptotische Abschätzung $c_K(\log N)^r$ gültig, wo $c_K > 0$ eine

nur von K abhängige Konstante ist(³). Daraus folgt weder (7), noch eine asymptotische Abschätzung für $P_{K,\varepsilon}^*(N)$.

Jetz wird Satz 2 formuliert.

Satz 2. *Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ $(n \geqslant 2)$ eine Ganzheitsbasis von K, $h(\alpha_i) \leqslant \mathscr{H}$ $(i = 1, \ldots, n)$ und x eine reelle Zahl mit $x^{2/(n+1)} > \log x$. Dann gilt bei den obigen Bezeichnungen*

$$(8)\qquad \left|P_K(x; N) - \frac{\pi^t (2n)^r}{2r!\tau_K\sqrt{D_K}} x\log^r N\right| \leqslant c_5(n) D_K^{\frac{1}{n+1}} (\log D_K)^n x^{\frac{n-1}{n+1}} \log^r N +$$
$$+ \frac{8(8n)^r \pi^t}{n\sqrt{D_K}} x(\log x)\log^{r-1} N + c_6(n, \mathscr{H}) x \log^{r-1} N,$$

falls

$$\log N > 2\left[\frac{1}{n}\log x + \log D_K + n\log(n\mathscr{H}) + (8rn)^{2(r+1)} R_K\right] = c_7.$$

Aus Satz 2 ergibt sich unmittelbar, daß

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ N\to\infty\\ \log x/\log N\to 0}} \frac{P_K(x; N)}{x\log^r N} = \frac{\pi^t (2n)^r}{2r!\tau_K\sqrt{D_K}}.$$

Bezeichne $P_K^*(x; N)$ die Anzahl der ganzen Elemente von K der Norm $\leqslant x$ und $h(\alpha) \leqslant N$, dann folgt aus Satz 2, daß

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ N\to\infty\\ \log x/\log N\to 0}} \frac{P_K^*(x; N)}{x\log^r N} = \frac{\pi^t (2n)^r}{2r!\tau_K\sqrt{D_K}}.$$

3. Beweis von Satz 1 und seinen Folgerungen. Wir brauchen zum Beweis mehrere Lemmata.

Sei Λ ein vollständiges Gitter im r-dimensionalen reellen euklidischen Raum E^r. $d(\Lambda)$ bezeichne den Grundmascheninhalt und $\delta(\Lambda)$ das Minimum der Durchmesser der Grundmaschen von Λ. Das folgende Lemma (das wir schon in [6] benutzt haben) ist z. B. in der Arbeit [13] von W. M. Schmidt zu finden (s. Lemma 4, S. 524).

Lemma 1. *Sei Λ ein vollständiges Gitter und $\mathscr{K}$ eine Beschränkte Menge im r-dimensionalen reellen euklidischen Raum E^r. Bezeichne $\mathscr{K}(\delta)$ die Menge derjenigen Punkte des Raumes E^r, die höchstens den Abstand δ vom Rand von $\mathscr{K}$ haben, wobei $\delta = \delta(\Lambda)$. Sei das Lebesguesche Maß von $\mathscr{K}$ bzw. $\mathscr{K}(\delta)$*

(³) $H(\varepsilon)$ bezeichnet hier das Maximum der Absolutbeträge der Koeffizienten des Minimalpolynoms mit ganzen Koeffizienten von ε. Lang benutzt in [9] ein von diesem verschiedenen Höhenbegriff. Von dem einem zum anderen ist es aber leicht überzugehen.

gleich $V(\mathscr{K})$ *bzw.* $V(\mathscr{K}(\delta))$. *Dann gilt für die Anzahl* S *derjenigen Gitterpunkte des Gitters* Λ, *welche in* $\mathscr{K}$ *liegen*

$$|S - V(\mathscr{K})/d(\Lambda)| \leqslant V(\mathscr{K}(\delta))/d(\Lambda). \tag{9}$$

Seien $s, t \geqslant 0$, $s+t \geqslant 2$ ganzrationale Zahlen. Bezeichne H eine beliebige höchstens $r = s+t-1$-elementige (möglicherweise leere) Teilmenge der Menge $T = \{1, \ldots, s+t\}$. Bezeichne $i = i_H$ das größte Element von $T \setminus H$. Mit $c_H(s, t)$ bezeichnen wir das Lebesguesche Maß der r-dimensionalen Menge C_H die durch die Elemente $(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{s+t})$ von E^r bestimmt ist, deren Koordinaten das Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} & y_j < -e_j \qquad (j \in H), \\ & |y_j| \leqslant e_j \qquad (j \in T \setminus \{H, i\}), \\ & \Big|\sum_{j \in T \setminus \{i\}} y_j\Big| \leqslant e_i \end{aligned} \tag{10}$$

erfüllen, wo $e_1 = \ldots = e_s = 1$ und $e_{s+1} = \ldots = e_{s+t} = 2$ (falls $t > 0$). (Ist die durch (10) bestimmte Menge leer, so sei $c_H(s, t) = 0$.) Es wird endlich

$$c(s, t) = \sum_{H \subset T} c_H(s, t)$$

gesetzt, wo die Summation für jede höchstens r-elementige möglicherweise leere Teilmenge H von T sich erstreckt.

Lemma 2. *Mit den obigen Bezeichnungen ist*

$$c(s, t) = \frac{(s+2t)^r}{r!}. \tag{11}$$

Beweis. Wir halten den Index i fest $1 \leqslant i \leqslant s+t$, ändern aber die Menge $H \subset T$ so, daß i das größte Element von $T \setminus H$ sei. Die zu dieser H geordneten r-dimensionalen Mengen C_H sind disjunkt, ihre Vereinigung bezeichnen wir mit C_i, sowie das Lebesguesche Maß von C_i mit $c_i(s, t)$. Dann gilt

$$c_i(s, t) = \sum_{\substack{H \subset T \\ \max(j) = i \\ j \in T \setminus H}} c_H(s, t).$$

Es ist leicht zu sehen, daß C_1 leer ist, folglich $c_1(s, t) = 0$ also $c(s, t) = \sum_{i=2}^{s+t} c_i(s, t)$. Zur Bestimmung von $c(s, t)$ genügt es also die Werte $c_i(s, t)$ für $i = 2, \ldots, s+t$ zu berechnen.

Zunächst werden die Mengen C_i in einfacherer Weise beschrieben.

Setzen wir

$$f(i) = s + 2t - 2\sum_{j=i}^{s+t} e_j,$$

so werden wir einsehen, daß C_i genau die Menge der Punkte von E^r ist, deren Koordinaten $(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{s+t})$ dem Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} & -(f(i+1) - e_k) < y_k \leqslant e_k \qquad (k = 1, \ldots, i-1), \\ & -(f(i+1) + e_k) < y_k < -e_k \qquad (k = i+1, \ldots, s+t), \\ & \Big|\sum_{j \in T \setminus \{i\}} y_j\Big| \leqslant e_i \end{aligned} \tag{12}$$

genügen. (Wäre $i = s+t$, so muß $f(i+1) = s+2t$ in den entsprechenden Ungleichungen von (12) und auch in weiteren genommen werden.)

Sei nun $Y = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{s+t})$ ein solcher Punkt von E^r, dessen Koordinaten (12) genügen.

H bestehe aus den Indizes $k \in T$ mit $y_k < -e_k$. Dann ist H höchstens r-elementig; denn wir haben $i \notin H$; andererseits gilt $i \in T \setminus H$ und $k \in H$ für alle $k > i$, somit ist i das größte Element der Menge $T \setminus H$, also liegt Y in der zu diesem speziellen H gehörenden Menge C_H. (Wenn nämlich $j \notin H$ und $j \neq i$ ist, dann ist $y_j \geqslant -e_j$ und nach (12) $y_j \leqslant e_j$.)

Umgekehrt, sei $Y = (y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_{s+t})$ ein solcher Punkt von E^r, der zu einer Menge C_H wie oben gehört, falls nicht jede solche Menge leer ist. Wir zeigen, daß alle Koordinaten von Y (12) genügen.

Sei $k \in T \setminus \{i\}$ beliebig, dann wird wegen $\sum_{j \in T \setminus \{i\}} y_j \geqslant -e_i$ auch

$$y_k \geqslant -e_i - \sum_{j \in T \setminus \{i, k\}} y_j = -e_i - \sum_{j \in H \setminus \{k\}} y_j - \sum_{j \in T \setminus \{H, i, k\}} y_j$$

üerfüllt. Es gilt $-y_j \geqslant -e_j$, falls $j \in T \setminus \{H, i, k\}$ und $-y_j > e_j$, falls $j \in H$. Ferner ist i das größte Element von $T \setminus H$, weshalb alle $j > i$ zu H gehören, also

$$y_k > -e_i - \sum_{j \in T \setminus \{H, i, k\}} e_j + \sum_{j \in H \setminus \{k\}} e_j \geqslant -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{i} e_j + \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq k}}^{s+t} e_j.$$

Setzen wir jetzt $k < i$, dann ist wegen des Vorangehenden

$$y_k > -\sum_{j=1}^{i} e_j + \sum_{j=i+1}^{s+t} e_j + e_k = -(f(i+1) - e_k).$$

Schließlich ergibt sich auf ähnliche Weise für $k > i$

$$y_k > -\sum_{j=1}^{i} e_j + \sum_{j=i+1}^{s+t} e_j - e_k = -(f(i+1) + e_k).$$

Da das Lebesguesche Maß von C_i und der abgeschlossenen Hülle von C_i übereinstimmen, werden wir im weiteren der Einfachheit halber in den Ungleichungen (12) statt $<$ überall $\leqslant$ benutzen.

Danach verwenden wir die Transformation

$$y'_j = -y_j + e_j \quad (j = 1, \ldots, i-1),$$

$$y'_j = -y_j - e_j \quad (j = i+1, \ldots, s+t).$$

So geht (12) wegen

$$\sum_{j\in T\setminus\{i\}} y'_j = -\sum_{j\in T\setminus\{i\}} y_j + \sum_{j=1}^{i-1} e_j - \sum_{j=i+1}^{s+t} e_j$$

in das Ungleichungssystem

$$(13) \qquad \begin{aligned} 0 \leqslant y'_j \leqslant f(i+1), \quad & j \in T\setminus\{i\}, \\ f(i) \leqslant \sum_{j\in T\setminus\{i\}} y'_j \leqslant f(i+1) & \end{aligned}$$

über, und das Lebesguesche Maß von C_i und der durch (13) definierten Menge stimmen überein. Daher können wir es als die Differenz von zwei r-dimensionalen Symplexen bestimmen, die durch

$$(14) \qquad \begin{aligned} 0 \leqslant y'_j \leqslant f(i+1), \quad & j \in T\setminus\{i\}, \\ 0 \leqslant \sum_{j\in T\setminus\{i\}} y'_j \leqslant f(i+1) & \end{aligned}$$

bezeichungsweise

$$(14') \qquad \begin{aligned} 0 \leqslant y'_j \leqslant f(i+1), \quad & j \in T\setminus\{i\}, \\ 0 \leqslant \sum_{j\in T\setminus\{i\}} y'_j \leqslant f(i) & \end{aligned}$$

beschrieben werden. (14') ist wegen $f(i) < f(i+1)$ äquivalent mit dem Ungleichungssystem

$$(14'') \qquad \begin{aligned} 0 \leqslant y'_j \leqslant f(i), \quad & j \in T\setminus\{i\}, \\ 0 \leqslant \sum_{j\in T\setminus\{i\}} y'_j \leqslant f(i). & \end{aligned}$$

Das Maß der durch (14) definierten Menge ergibt sich als $(f(i+1))^r/r!$ falls $f(i+1) > 0$ und als 0, falls $f(i+1) \leqslant 0$. Ähnlich ergibt sich das Maß der durch (14'') definierten Menge als $(f(i))^r/r!$ falls $f(i) > 0$ und als 0, falls $f(i) \leqslant 0$. Somit ist

$$C_i(s, t) = \begin{cases} [(f(i+1))^r - (f(i))^r]/r!, & \text{falls} \quad f(i) > 0, \\ (f(i+1))^r/r!, & \text{falls} \quad f(i+1) > 0 \quad \text{aber } f(i) \geqslant 0, \\ 0, & \text{falls} \quad f(i+1) \leqslant 0. \end{cases}$$

Danach ergibt sich

$$c(s, t) = \sum_{i=2}^{s+t} c_i(s, t) = \frac{1}{r!} \sum_{i=2}^{s+t}{}' [(f(i+1))^r - (f(i))^r],$$

wo $\sum'$ bedeutet, daß in der Summation nur die positiven $f(i)$ und $f(i+1)$ berücksichtigt werden. Daraus ist zu sehen, daß tatsächlich

$$c(s, t) = \frac{(s+2t)^r}{r!}$$

erfüllt wird, womit das Lemma bewiesen ist.

Im weiteren wird angenommen, daß K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $n \geqslant 2$ ist, dessen Konjugierten derart geordnet sind, daß $K^{(1)}, \ldots$ $\ldots, K^{(s)}$ reell sind während $K^{(s+1)}, \ldots, K^{(s+t)}$ der Reihe nach die komplexen Konjugierten von $K^{(s+t+1)}, \ldots, K^{(s+2t)}$ sind, wobei $r = s+t-1 \geqslant 1$. Sei $\mathscr{E}$ eine torsionsfreie Untergruppe mit der Basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ von endlichem Index in der Einheitengruppe von K. Die Konjugierten der Einheiten seien wie oben geordnet und es bezeichne $R = R(\mathscr{E})$ den Regulator von $\mathscr{E}$, d.h. den gemeinsamen Absolutbetrag der Determinanten r-ter Ordnung der Matrix

$$\begin{bmatrix} e_1 \log|\varepsilon_1^{(1)}| & \ldots & e_1 \log|\varepsilon_r^{(1)}| \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{s+t} \log|\varepsilon_1^{(s+t)}| & \ldots & e_{s+t} \log|\varepsilon_r^{(s+t)}| \end{bmatrix}$$

wobei $e_1 = \ldots = e_s = 1$ und $e_{s+1} = \ldots = e_{s+t} = 2$ für $t > 0$ ist.

Lemma 3. *Sei H eine höchstens r-elementige (möglicherweise leere) Teilmenge der Menge $T = \{1, \ldots, s+t\}$ und seien $b_j (j \in H)$; $b'_j, b''_j (j \in T\setminus H)$ beliebige Konstanten mit $|b_j|, |b'_j|, |b''_j| \leqslant B$ für alle Indizes j. Sei weiter mit den obigen Bezeichnungen*

$$\max_{\substack{1\leqslant l\leqslant r \\ 1\leqslant j\leqslant s+t}} |e_j \log|\varepsilon_l^{(j)}|| \leqslant E.$$

Dann gilt für die Anzahl $S(N)$ der Lösungen $(a_1, \ldots, a_r) \in Z^r$ des Ungleichungssystems

$$(15) \qquad \begin{aligned} & a_1 e_j \log|\varepsilon_1^{(j)}| + \ldots + a_r e_j \log|\varepsilon_r^{(j)}| < -e_j \log N + b_j \quad \textit{für alle } j \in H, \\ & -e_j \log N + b'_j \leqslant a_1 e_j \log|\varepsilon_1^{(j)}| + \ldots + a_r e_j \log|\varepsilon_r^{(j)}| \leqslant e_j \log N + b''_j \\ & \hspace{20em} \textit{für alle } j \in T\setminus H \end{aligned}$$

die Abschätzung

$$(16) \qquad \left| S(N) - \frac{c_H(s, t)}{R} \log^r N \right| \leqslant \frac{(2n)^r}{R} (B + 2rE) \log^{r-1} N,$$

falls $\log N \geqslant B + rE$.

Beweis. Bezeichnen wir mit $\mathscr{P}$ die Menge der Punkte $(a_1, \ldots, a_r)$ des r-dimensionalen reellen euklidischen Raumes E^r, die das Ungleichungssystem (15) erfüllen. Sei i das größte Element der Menge $T\setminus H$ und wenden wir die Transformation

$$a_1 e_j \log|\varepsilon_1^{(j)}| + \ldots + a_r e_j \log|\varepsilon_r^{(j)}| = y_j \quad (j \in T\setminus\{i\}) \tag{17}$$

auf E^r an. Es gilt

$$e_1 \log|\varepsilon_h^{(1)}| + \ldots + e_{s+t} \log|\varepsilon_h^{(s+t)}| = 0 \quad (h = 1, \ldots, r),$$

deshalb ist auch

$$a_1 e_i \log|\varepsilon_1^{(i)}| + \ldots + a_r e_i \log|\varepsilon_r^{(i)}| = -\sum_{j \in T\setminus\{i\}} y_j$$

erfüllt. Also überführt die Transformation (17) $\mathscr{P}$ in die Menge

$$y_j < -e_j \log N + b_j \quad (j \in H),$$
$$-e_j \log N + b_j' \leqslant y_j \leqslant e_j \log N + b_j'' \quad (j \in T\setminus\{H, i\}),$$
$$-e_i \log N - b_i'' \leqslant \sum_{j \in T\setminus\{i\}} y_j \leqslant e_i \log N - b_i'$$

welche im weiteren $\mathscr{P}_y$ genannt wird. Das Maß von $\mathscr{P}_y$ ist das R-Fache des Maßes von $\mathscr{P}$. Aus der Definition kann man sehen, daß $\mathscr{P}_y$ eine beschränkte Menge ist und (17) eine lineare Transformation darstellt; deshalb ist auch $\mathscr{P}$ beschränkt.

Wenn Λ_0 das Gitter der Punkte mit ganzen Koordinaten in E^r bezeichnet, so ist $S(N)$ die Zahl der zu $\mathscr{P}$ gehörigen Gitterpunkte von Λ_0. Nun wenden wir Lemma 1 auf $\mathscr{P}$ und auf Λ_0 an. Wegen $d(\Lambda_0) = 1$ reicht es zum Beweis von (16) aus, $V(\mathscr{P})$ zu bestimmen und $V(\mathscr{P}(\delta))$ nach oben abzuschätzen (δ bezeichnet auch hier das Minimum der Durchmesser der Grundmaschen von Λ_0, während $\mathscr{P}(\delta)$ die Menge derjenigen Punkte bezeichnet, die vom Rand von $\mathscr{P}$ höchstens den Abstand δ haben).

Wir bestimmen zuerst das Maß von $\mathscr{P}$. Wir wiesen früher darauf hin, daß $V(\mathscr{P}) = V(\mathscr{P}_y)/R$ gilt; daher genügt es, das Maß von $\mathscr{P}_y$ zu berechnen. Bezeichnet $\mathscr{P}_y'$ die Menge $\mathscr{P}_y$ bei der speziellen Wahl $b_j = 0$ $(j \in H)$ und $b_j' = b_j'' = 0$ $(j \in T\setminus H)$ dann gilt

$$|V(\mathscr{P}_y) - V(\mathscr{P}_y')| \leqslant (2n)^r B \log^{r-1} N \tag{18}$$

wegen $\log N \geqslant B$.

Tatsächlich, unterscheidet sich $\mathscr{P}_y'$ von $\mathscr{P}_y$ in höchstens $2(r+1)-|H|$ Mengen ($|H|$ bedeutet die Anzahl der Elemente von H). Sei $\mathscr{B}$ eine der möglichen $2(r+1)-|H|$ Ausnahmemengen. Für eine Menge $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}_y'\setminus\mathscr{P}_y$ erhalten wir die definierenden Ungleichungen aus den $\mathscr{P}_y$ definierenden Ungleichungen folgendermaßen. Sei $j \in T$ ein beliebiger Index. Die $\mathscr{P}_y$ definierenden, von j verschiedenen Ungleichungen bleiben unverändert. Für $j \in H$, setzen wir statt der j-ten Ungleichung

$$-e_j \log N \leqslant y_j \leqslant -e_j \log N + b_j.$$

(Falls $b_j < 0$ werden die rechte und linke Seite vertauscht.) Wenn jetzt $j \in T\setminus\{H, i\}$, so setzen wir statt der j-ten Ungleichung

$$-e_j \log N + b_j' \leqslant y_j < -e_j \log N \quad (\text{falls } b_j' \leqslant 0),$$

bzw.

$$e_j \log N < y_j \leqslant e_j \log N + b_j'' \quad (\text{falls } b_j'' \geqslant 0).$$

(Auch hier wird die rechte und linke Seite vertauscht, wenn $b_j' > 0$ bzw. $b_j'' < 0$.)

Ist $k \in H$ und $k \neq j$, so gilt

$$y_k < -e_k \log N + b_k$$

und

$$y_k \geqslant -e_i \log N - b_i'' - \sum_{j \in T\setminus\{i,k\}} y_j$$
$$\geqslant -(s+2t-e_k)\log N - \sum_{h \in H\setminus\{k\}} b_h - \sum_{h \in T\setminus H} b_h'.$$

Die betrachteten Mengen $\mathscr{B}$ liegen also jeweils in einem Parallelepiped, dessen Maß von oben leicht abgeschätzt werden kann, nämlich für $j \neq i$ mit

$$B[n \log N + (s+t)B]^{r-1}.$$

Wenn aber $j = i$, dann ist

$$-e_i \log N - b_i'' \leqslant \sum_{j \in T\setminus\{i\}} y_j \leqslant -e_i \log N$$

bzw.

$$e_i \log N \leqslant \sum_{j \in T\setminus\{i\}} y_j \leqslant e_i \log N - b_i'$$

zu nehmen, falls $b_i'' \geqslant 0$, $b_i' \leqslant 0$, sonst vertauschen wir die Seiten sinngemäß.

Nach der Substitution

$$Z_j = y_j, \quad j \in T\setminus\{i, i_0\},$$
$$Z_{i_0} = \sum_{j \in T\setminus\{i\}} y_j$$

wo i_0 das größte Element von $T\setminus\{i\}$ ist, ist es leicht einzusehen, daß das Maß der Mengen $\mathscr{B}$ mit $j = i$ auch jetzt kleiner ist, als die oben angegebene Schranke.

In der aufsteigenden Reihe der Indizes von T betrachten wir die

Reihe der Konstanten b_j, b_j', b_j''. Bezeichne $\mathscr{P}_y^{(1)}$ die Menge, die man aus $\mathscr{P}_y = \mathscr{P}_y^{(0)}$ dadurch erhält, daß man die erste Konstante gleich 0 wählt, während man die anderen ungeändert läßt. Entsprechend sei $\mathscr{P}_y^{(2)}$ die Menge, die man aus $\mathscr{P}_y^{(1)}$ dadurch erhält, daß man in der obigen Reihe die zweite Konstante gleich 0 wählt während man die anderen ungeändert läßt, und so fort. Dann gilt nach dem Obengesagten, daß

$$|V(\mathscr{P}_y^{(k-1)})-V(\mathscr{P}_y^{(k)})| \leqslant B[n\log N+(s+t)B]^{r-1} \quad (k=1,\ldots,2(s+t)-|H|)$$

woraus für $\log N \geqslant B$ die Formel (18) folgt. Das Maß von $\mathscr{P}_y'$ ist das $\log^r N$-fache des Maßes der durch (10) bestimmten Menge, deshalb ergibt sich aus (18)

$$\left|V(\mathscr{P})-\frac{c_H(s,t)}{R}\log^r N\right| \leqslant \frac{(2n)^r B}{R}\log^{r-1}N. \tag{19}$$

Betrachten wir danach die Menge $\mathscr{P}(\delta)$ derjenigen Punkte, die von einer beliebigen Seitenfläche von $\mathscr{P}$ höchstens den Abstand δ haben, wo δ das Minimum der Durchmesser der Grundmaschen von Λ_0 ist.

Es ist $\delta \leqslant \sqrt{r}$. Die h-te Ungleichung in (15) sei jetzt

$$-e_h\log N+b_h-rE < a_1e_h\log|\varepsilon_1^{(h)}|+\ldots+a_re_h\log|\varepsilon_r^{(h)}| < -e_h\log N+b_h+rE$$

falls $h\in H$, wenn aber $h\in T\setminus H$, dann sei entweder

$$-e_h\log N+b_h'-rE < a_1e_h\log|\varepsilon_1^{(h)}|+\ldots+a_re_h\log|\varepsilon_r^{(h)}| < -e_h\log N+b_h'+rE$$

oder

$$e_h\log N+b_h''-rE < a_1e_h\log|\varepsilon_1^{(h)}|+\ldots+a_re_h\log|\varepsilon_r^{(h)}| < e_h\log N+b_h''+rE.$$

Für alle von h verschiedenen Indizes nehmen wir $b_h\pm rE$, $b_h'\pm rE$, $b_h''\pm rE$ an Stelle von b_h, b_h', b_h'' wobei wir die Vorzeichen so wählen, daß das Maß des erhaltenen Gebietes maximal ist. Mit obigem Verfahren ist es einzusehen, daß das Maß dieser Mengen,

$$\leqslant \frac{2rE(2n)^{r-1}}{R}\log^{r-1}N$$

ist, falls $\log N \geqslant B+rE$. Ferner enthält die Vereinigung dieser Mengen $\mathscr{P}(\delta)$. Die Zahl dieser Mengen ist $\leqslant 2(|T|-|H|)+|H| \leqslant 2n$ also muß das Maß ihrer Vereinigung $\leqslant (2rE(2n)^r/R)\log^{r-1}N$ sein.

Lemma 1 wird jetzt auf $\mathscr{P}$ angewandt, und man erhält

$$|S(N)-V(\mathscr{P})| \leqslant \frac{2rE(2n)^r}{R}\log^{r-1}N.$$

Hieraus und aus (19) ergibt sich

$$\left|S(N)-\frac{c_H(s,t)}{R}\log^r N\right| \leqslant \frac{(2n)^r}{R}(B+2rE)\log^{r-1}N.$$

Der Beweis geht natürlich auch dann, wenn $c_H(s,t)=0$. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

Der nächste Satz stammt im speziellen Fall $\mathscr{D}=Z_K$ im wesentlichen von C. L. Siegel [16], in dieser Form aber von H. M. Stark [17].

Lemma 4 (s. [4]). *Sei $\mathscr{D}$ eine Ordnung in K mit dem Regulator $R_{\mathscr{D}}$. In $\mathscr{D}$ existieren solche multiplikativ unabhängige Einheiten $\eta_1,\ldots,\eta_r$ für die*

$$\prod_{j=1}^{r}\log A_j < (31rn^2\log 6n)^r R_{\mathscr{D}}$$

gilt, wo $A_j=\max(e, h(\eta_j))$. Weiter ist der Absolutbetrag der Elemente der Inversen der Matrix $(e_i\log|\eta_j^{(i)}|)$ $(i,j=1,\ldots,r)$

$$\leqslant 31r!\,n^2\log 6n.$$

Hieraus folgt leicht das folgende

Lemma 5. *Sei M ein vollständiger Modul von K mit dem Multiplikatorenring $\mathscr{D}_M$. In $\mathscr{D}_M$ existieren multiplikativ unabhängige Einheiten $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r$ der Norm $+1$ mit*

$$e_k|\log|\varepsilon_i^{(k)}|| < 2(n-1)(31rn^2\log 6n)^r R_{\mathscr{D}} = c_8 \quad (i,k=1,\ldots,r). \tag{20}$$

Wir wollen hier bemerken, daß das in Teil I [5] bewiesene Lemma 2 für beliebige vollständige Modulen wahr bleibt, wenn man D_K duch $D_{\mathscr{D}_M}$, den Absolutbetrag der Diskriminante von $\mathscr{D}_M$ ersetzt. (Dazu genügt es im Beweis statt M überall $\mathscr{D}_M$ zu nehmen.) So kann man einsehen, daß in (20)

$$c_8 = 12\left(\frac{5\log D_K}{2n-2}\right)^{n-1}\sqrt{D_K}(Dd(D))^{n-1}, \quad D=\sqrt{D_{\mathscr{D}_M}/D_K}$$

zu wählen ist. Im weiteren rechnet man dann statt $R_{\mathscr{D}_M}$ mit $D_{\mathscr{D}_M}$, demc..tsprechend bekommt man in (5) als Koeffizient von $\log^{r-1}N$ eine andere Konstante.

Beweis von Lemma 5. $\mathscr{D}_M$ ist eine Ordnung in K. Seien $\eta_1,\ldots,\eta_r$ die Lemma 4 genügenden Einheiten und $\varepsilon_i=\eta_i^2$ $(i=1,\ldots,r)$. Dann ist $\mathrm{Norm}_{K/Q}(\varepsilon_i)=1$,

$$\log h(\eta_i) \leqslant \log A_i \leqslant (31rn^2\log 6n)^r R_{\mathscr{D}_M}$$

sowie $h(\varepsilon_i)=h^2(\eta_i)$ für $i=1,\ldots,r$. Aus

$$e_k|\log|\varepsilon_i^{(k)}|| \leqslant (n-1)\log h(\varepsilon_i) \quad (i=1,\ldots,r)$$

und dem Früheren ergibt sich (20).

Beweis von Satz 1. Nach der Voraussetzung besitzt (4) eine Lösung $(x_1,\ldots,x_n)\in Z^n$ und folglich sogar unendlich viele Lösungen, also ist $\varkappa_M \geq 1$. Wenn nämlich $\mu \in M$ eine Lösung ist, so ist auch jedes Element von $\mu\mathcal{E}_M^+$ eine Lösung von (4), wo $\mathcal{E}_M^+$ die Untergruppe der Elemente der Norm $+1$ der Einheitengruppe $\mathcal{E}_M$ von $\mathcal{D}_M$ ist. Diese Lösungsfamilien sind paarweise disjunkt und für ihre Anzahl gilt $1 \leq \varkappa_M < \infty$.

Seien $\mu_i\mathcal{E}_M^+$ $(i = 1, \dots, \varkappa_M)$ die verschiedenen Lösungsfamilien und bezeichne $P_i(N)$ die Anzahl der Lösungen $(x_1, \dots, x_n) \in Z^n$ von (4) mit $\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k| \leq N$ für die $\alpha_1x_2+\dots+\alpha_nx_n$ in $\mu_i\mathcal{E}_M^+$ liegt.

Zuerst wird $P_i(N)$ für ein belibiges aber festes i $(1 \leq i \leq \varkappa_M)$ abgeschätzt. Nach Lemma 5 existieren Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ der Norm $+1$ in $\mathcal{D}_M$, für die (20) erfüllt ist. Mit $\mathcal{E}$ wird die in $\mathcal{D}_M$ durch die Einheiten $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r$ erzeugte multiplikative Gruppe bezeichnet und es sei $R = R(\mathcal{E})$ der zugehörige Regulator. $\mathcal{E}$ ist eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathcal{E}_M^+$.

Sei $\mathcal{E}'$ das direkte Produkt von $\mathcal{E}$ und der Gruppe der Einheitswurzeln von $\mathcal{E}_M^+$. Dann folgt wegen

$$[\mathcal{E}_M^+ : \mathcal{E}'] = J = R/R_M^+ \quad \text{und} \quad [\mathcal{E}' : \mathcal{E}] = w_M^+ \tag{21}$$

daß $[\mathcal{E}_M^+ : \mathcal{E}] = w_M^+ J = J'$ ist, wo R_M^+ bzw. w_M^+ den Regulator bzw. die Einheitswurzelanzahl von $\mathcal{E}_M^+$ bezeichnen. Sei $\gamma_{i1}, \dots, \gamma_{iJ'}$ ein vollständiges Representantensystem von $\mathcal{E}_M^+/\mathcal{E}$. Mit den Bezeichnungen $\mu_{if} = \mu_i\gamma_{if}$ $(f = 1, \dots, J')$ sind dann $\mu_{i1}\mathcal{E}, \dots, \mu_{iJ'}\mathcal{E}$ paarweise disjunkt und ihre Vereinigung fällt mit $\mu_i\mathcal{E}_M^+$ zusammen.

Wenn jetzt $P_{if}(N)$ die Zahl derjenigen Elemente $\lambda_{if} = \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n$ von $\mu_{if}\mathcal{E}$ bezeichnet, für die $\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k| \leq N$ gilt, dann ist

$$P_i(N) = \sum_{f=1}^{J} P_{if}(N) \quad (i = 1, \dots, \varkappa_M). \tag{22}$$

Mit Hilfe eines oft gebrauchten Verfahrens (s. [1], S. 188 und 205 und Lemma 3 in unserer Arbeit [5]) kann man einsehen daß, falls $|\mathrm{Norm}_{K/Q}(\mu_{if})| = |a|$ gilt, es ein $\varepsilon \in \mathcal{E}$ und ein μ'_{if} mit $\mu'_{if} = \varepsilon\mu_{if}$ gibt welches gleichzeitig

$$h(\mu'_{if}) \leq |a|^{1/n} e^{2r^2c_8} = c_9$$

erfüllt mit derselben Konstante c_8 wie oben. Da $\mu_{if}\mathcal{E}$ und $\mu'_{if}\mathcal{E}$ zusammenfallen, genügt es, wenn wir in Zukunft $\mu'_{if}\mathcal{E}$ betrachten.

Sei nun $\mu = \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n \in \mu'_{if}\mathcal{E}$ mit $\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k| \leq N$. Dann ist

$$\mu = \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n = \mu'_{if}\varepsilon_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{a_r} \tag{23}$$

mit geeigneten ganzrationalen Zahlen $a_1, \dots, a_r$. Wir bilden jetzt auf der linken und rechten Seite von (23) die ersten $s+t$ Konjugierten

$$\mu^{(j)} = \alpha_1^{(j)}x_1+\dots+\alpha_n^{(j)}x_n = \mu_{if}'^{(j)}\varepsilon_1^{(j)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(j)a_r} \quad (j = 1, \dots, s+t). \tag{24}$$

Im weiteren werden wir dem Beweis unseres Satzes 1 von [6] folgen und werden deshalb den Gedankengang nicht ausführlich darlegen.

Sei $c_{10} > 0$ eine absolute später zu bestimmende Konstante. Ist $N > c_{10}c_9^{n-1}/|a|$, dann kann die Ungleichung $|\mu^{(j)}| \leq c_{10}/N$ nicht für alle $j = 1, \dots, s+t$ gelten, da sonst aus

$$h\left(\frac{1}{\mu'_{if}}\right) \leq \frac{h(\mu'_{if})^{n-1}}{|a|} \leq \frac{c_9^{n-1}}{|a|} = c_{11} \tag{25}$$

und aus (24)

$$\left|\frac{\mu^{(j)}}{\mu_{if}'^{(j)}}\right| = |\varepsilon_1^{(j)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(j)a_r}| < \frac{c_{10}}{N}\,\frac{c_9^{n-1}}{|a|} < 1,$$

folgte

$$|\mathrm{Norm}_{K/Q}(\varepsilon_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{a_r})| < 1$$

was unmöglich ist.

Bezeichne H eine höchstens r-elementige (möglicherweise leere) Teilmenge der Menge $T = \{1, \dots, s+t\}$ und $P_{i,f,H}(N)$ die Anzahl derjenigen Elemente $\mu = \alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n \in \mu'_{if}\mathcal{E}$ für welche neben $\max\limits_{1\leq k\leq n}|x_k| \leq N$ auch

$$|\mu^{(j)}| < c_{10}/N \quad \text{für alle } j \in H, \tag{26}$$

$$|\mu^{(j)}| \geq c_{10}/N \quad \text{für alle } j \in T\setminus H \tag{27}$$

gleichzeitig erfüllt sind.

Aus (26) folgt für alle solchen μ

$$\log|\mu^{(j)}| < -\log N + \log c_{10} \quad \text{für alle } j \in H$$

das heißt, unter Benutzung von (24) und (25)

$$\log|\varepsilon_1^{(j)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(j)a_r}| = \frac{\log|\mu^{(j)}|}{\log|\mu_{if}'^{(j)}|} < -\log N + \log(c_{10}c_{11}) \quad (j \in H)$$

und daher

$$e_ja_1\log|\varepsilon_1^{(j)}| + \dots + e_ja_r\log|\varepsilon_r^{(j)}| < -e_j\log N + e_j\log(c_{10}c_{11}) \tag{28}$$

für alle $j \in H$.

Hiernach ergibt sich aus (27) unter Benutzung von

$$h(\mu) \leq n\mathcal{H}N \quad \text{und} \quad c_9^{-1} \leq |\mu_{if}'^{(j)}|^{-1} \leq c_{11} \quad (j = 1, \dots, s+t),$$

$$\frac{c_{10}c_9^{-1}}{N} \leq \left|\frac{\mu^{(j)}}{\mu_{if}'^{(j)}}\right| = |\varepsilon_1^{(j)a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{(j)a_r}| \leq n\mathcal{H}c_{11}N$$

woraus bei der Bezeichnung $c_{12} = n\mathcal{H}c_{11}$ folgt

$$-e_j\log N + e_j\log(c_{10}c_9^{-1}) \leq e_ja_1\log|\varepsilon_1^{(j)}| + \dots + e_ja_r\log|\varepsilon_r^{(j)}| \leq e_j\log N + e_j\log c_{12} \tag{29}$$

für alle $j \in T\setminus H$.

Also ist die Anzahl der in $P_{i,f,H}(N)$ gezählten Elemente mit der gewünschten Eigenschaft, welche gleichzeitig (26) und (27) genügen, höchstens gleich der Anzahl der gemeinsamen ganzzahligen Lösungen $(a_1, \ldots, a_r)$ des Ungleichungssystems (28), (29). Daher gilt infolge Lemma 3

$$(30)\qquad P_{i,f,H}(N) \leqslant \frac{c_H(s,t)}{R}\log^r N + $$
$$+\frac{4(2n)^r}{R}\max\left(|\log(c_{10}c_{11})|,\ |\log c_{12}|,\ |\log(c_{10}c_9^{-1})|,\ r^2c_8\right)\log^{r-1}N,$$

falls $\log N \geqslant 2\max\left(|\log(c_{10}c_{11})|,\ |\log c_{12}|,\ |\log(c_{10}c_9^{-1})|\right)+r^2c_8$.

Sei jetzt umgekehrt H eine echte Teilmenge von $T = \{1, \ldots, s+t\}$. Betrachten wir zu H eine beliebige ganzzahlige Lösung $(a_1, \ldots, a_r)$ des (28), (29) entsprechenden Ungleichungssystems

$$(31)\qquad e_ja_1\log|\varepsilon_1^{(j)}|+\ldots+e_ja_r\log|\varepsilon_r^{(j)}| < -e_j\log N+e_jc_{13} \quad \text{für alle } j\in H,$$

$$(32)\qquad -e_j\log N+e_jc_{14} \leqslant e_ja_1\log|\varepsilon_1^{(j)}|+\ldots+e_ja_r\log|\varepsilon_r^{(j)}| \leqslant e_j\log N+e_jc_{15}$$
$$\text{für alle } j\in T\setminus H,$$

wobei c_{13}, c_{14}, c_{15} später zu bestimmende Konstanten sind. Es ist $\mu'_{if}\varepsilon_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{a_r}\in M$ das heißt

$$(33)\qquad \mu = \mu'_{if}\varepsilon_1^{a_1}\cdot\ldots\cdot\varepsilon_r^{a_r} = a_1x_1+\ldots+a_nx_n,$$

wo $(x_1, \ldots, x_n)\in Z^n$ eine Lösung von (4) ist. Bei Umkehrung des obigen Verfahrens ergibt sich für μ aus (31) unter der Benutzung von (33)

$$|\mu^{(j)}| < \frac{e^{c_{13}}c_9}{N}$$

für alle $j\in H$ und wenn $c_{13}\leqslant\log(c_9^{-1}c_{10})$, dann erfüllt μ auch noch (26). Aus (32) ergibt sich auf ähnliche Weise

$$e^{c_{14}}c_{11}^{-1}/N \leqslant |\mu^{(j)}| \leqslant e^{c_{15}}c_9N = c_{16}N$$

für alle $j\in T\setminus H$. Wenn sogar $c_{14}\geqslant\log(c_{10}c_{11})$, dann genügen diese μ auch (27) für alle $j\in T\setminus H$. Nehmen wir an, daß $c_{10}c_{16}^{-1}\leqslant N^2$ ist, dann gilt für obiges μ und für alle $1\leqslant j\leqslant s+t$

$$|\mu^{(j)}| \leqslant c_{16}N,$$

und somit gilt dies sogar für alle j mit $1\leqslant j\leqslant n$.

Daher folgt aus (33)

$$(34)\qquad |\mu^{(j)}| = |a_1^{(j)}x_1+\ldots+a_n^{(j)}x_n| \leqslant c_{16}N \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Hier ist die Matrix $(a_k^{(j)})$ $(1\leqslant k, j\leqslant n)$ nicht-singulär, und der Absolut-

betrag ihrer Determinante gleich $D_M^{1/2}$. Aus (34) können die x_k $(k = 1, \ldots, n)$ mittels der $\mu^{(1)}, \ldots, \mu^{(n)}$ linear ausgedrückt werden und außerdem gilt

$$|x_k| \leqslant c_{16}n^{n/2}\mathscr{H}^{n-1}ND_M^{-1/2} \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Wenn wir nun $e^{c_{15}}c_9 = c_{16}\leqslant(n^{n/2}\mathscr{H}^{n-1}D_M^{-1/2})^{-1} = c_{17}^{-1}$ haben, das heißt $c_{15}\leqslant-\log(c_9c_{17})$, so erhalten wir aus jeder gemeinsamen ganzzahligen Lösung $(a_1, \ldots, a_r)$ von (31) und (32) eine solche Lösung $\mu\in\mu'_{if}\mathscr{E}$ von (26) und (27), in deren Darstellung in der Form (23) auch noch $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x_k|\leqslant N$ erfüllt ist. Wir können jetzt nochmals Lemma 3 benutzen; daraus ergibt sich

$$(35)\qquad P_{i,f,H}(N)$$
$$\geqslant\frac{c_H(s,t)}{R}\log^r N-\frac{4(2n)^r}{R}\max(|c_{13}|,\ |c_{14}|,\ |c_{15}|,\ r^2c_8)\log^{r-1}N,$$

falls $\log N\geqslant 2\max(|c_{13}|,\ |c_{14}|,\ |c_{15}|)+r^2c_8$.

Zunächst folgt unter der Voraussetzung für N daß

$$(36)\qquad \left|P_{i,f,H}(N)-\frac{c_H(s,t)}{R}\log^r N\right|\leqslant\frac{4(2n)^r}{R}c_{18}\log^{r-1}N$$

wo c_{18} eine Konstante ist mit

$$(37)\qquad c_{18}\geqslant\max\left(|\log(c_{10}c_{11})|,\ |\log c_{12}|,\ |\log(c_{10}c_9^{-1})|,\ r^2c_8,\ |c_{13}|,\ |c_{14}|,\ |c_{15}|\right).$$

Wählen wir $c_{13} = \log(c_{10}c_9^{-1})$ und $c_{14} = \log(c_{10}c_{11})$, so können wir sie in (37) weglassen.

Wir schätzen zuerst das Maximum von $|\log c_{12}|$, r^2c_8 und $|c_{15}|$ ab; sie sind nämlich unabhängig von c_{10}. Mit der Wahl $c_{15} = -\log(c_9c_{17})$ gilt

$$|c_{15}| = |\log(c_9c_{17})| < \frac{1}{n}\left|\log|a|\right|+n\log(n\mathscr{H})+|\log D_M|+2nr^2c_8 = c_{19}$$

und man kann leicht einsehen, daß auch $|\log c_{12}|\leqslant c_{19}$ gilt. Endlich ergibt sich wegen $r^2c_8 < c_{19}$

$$\max(|\log c_{12}|,\ r^2c_8,\ |c_{15}|) < c_{19}.$$

Da $2nr^2c_8 < (8rn)^{2(r+1)}R_{\mathscr{D}_M}$, gilt

$$c_{19} < \frac{1}{n}\left|\log|a|\right|+n\log(n\mathscr{H})+|\log D_M|+(8rn)^{2(r+1)}R_{\mathscr{D}_M} = c_{20}.$$

Wir wählen $c_{10} = c_9$. Dann gilt $\log(c_{10}c_{11}) = 2nr^2c_8 < c_{20}$ und folglich ist (37) erfüllt, wenn wir zusätzlich setzen $c_{18} = c_{20}$. Daher ist diese Wahl von c_{18} auch in (36) zulässig. Mit der Wahl $c_{10} = c_9$ und wegen $\log N > 2c_{20}$ ist es wegen des Obengesagten leicht einzusehen, daß auch die für $\log N$

früher geforderte untere Schranke, sowie $N > c_{10}c_9^{n-1}/|a|$ und $N^2 \geqslant c_{10}c_{16}^{-1}$ gelten.

Die Anzahl der Möglichkeiten, aus der Menge $T = \{1, \ldots, s+t\}$ höchstens r-elementige Mengen auszuwählen, beträgt $2^{r+1}-1$. Zu den verschiedenen Indexmengen $H \subset T$ bekommt man wegen (26) und (27) verschiedene in $\mu'_{if}\mathscr{E}$ liegende, Lösungen μ und umgekehrt gehört jedes $\mu \in \mu'_{if}\mathscr{E}$ zu einem H. Also gehören zu den verschiedenen Teilmengen H paarweise disjunkte Lösungsmengen. Infolge dessen nach $c(s, t) = \sum_{H \subset T} c_H(s, t)$ nach Lemma 2 und (36), erhalten wir

$$\left|P_{i,f}(N) - \frac{n^r}{r!R}\log^r N\right| \leqslant \frac{4(4n)^r}{R}c_{20}\log^{r-1}N \tag{38}$$

für alle $1 \leqslant i \leqslant \varkappa_M$ und $1 \leqslant f \leqslant I'$. Bei beliebigem, aber festem i ergibt sich unter Anwendung von (21) und (22) aus (38)

$$\left|P_i(N) - \frac{n^r w_M^+}{r!R_M^+}\log^r N\right| \leqslant \frac{4(4n)^r w_M^+}{R_M^+}c_{20}\log^{r-1}N, \tag{39}$$

falls $\log N > 2c_{20}$.

Da aber $w_M^+/R_M^+ = w_{\mathscr{D}_M}/(\tau_{\mathscr{D}_M}R_{\mathscr{D}_M})$ ist, wo $\tau_{\mathscr{D}_M} = 1$ wenn in $\mathscr{D}_M$ die Norm aller Einheiten $+1$ ist und wo sonst $\tau_{\mathscr{D}_M} = 2$ ist, so ergibt sich (5) aus (39).

B e w e i s v o n F o l g e r u n g 1. Zuerst zeigen wir, daß in M eine Basis $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ existiert, für deren Elemente

$$h(\alpha_i) \leqslant n^2 d^n 2^{n(n-1)} D_M^{1/2} D_K^{(n^2-2)/2} = c_{21} \tag{40}$$

erfüllt ist, wo d eine ganzrationale Zahl ist mit $M' = dM \subseteq Z_K$.

In K existiert ein primitives ganzes Element δ, mit $h(\delta) \leqslant D_K^{1/2}$. Bezeichne $\Delta(\delta)$ den Absolutbetrag der Diskriminante von δ. Es ist leicht einzusehen, daß

$$\Delta(\delta) \leqslant (2D_K^{1/2})^{n(n-1)}.$$

Es ist wohlbekannt ([2], S. 11), daß in K eine Ganzheitsbasis der Form

$$(1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \big(1, \psi_2(\delta)/\Delta_2, \ldots, \psi_n(\delta)/\Delta_n\big)$$

existiert, wo $\psi_s(\delta) = \delta^{s-1} + a_{s,1}\delta^{s-2} + \ldots + a_{s,s-1}$; $\Delta_s, a_{s,r} \in Z$ und $\Delta_s | \Delta(\delta)$ und außerdem $|a_{s,r}| \leqslant \Delta(\delta)$ für alle $1 \leqslant s, r \leqslant n$. Es ist

$$h\big(\psi_s(\delta)\big) \leqslant n\Delta(\delta)h(\delta)^{n-1} \leqslant n(2D_K^{1/2})^{n(n-1)}D_K^{(n-1)/2},$$

also gilt

$$h(\omega_i) \leqslant n 2^{n(n-1)} D_K^{(n^2-1)/2} = c_{22}. \tag{41}$$

Der Einfachheit halber sei $\omega_1 = 1$. Aus einem wohlbekannten Satz über die endlich erzeugten Abelschen Gruppen folgt, daß in M' eine Basis $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n$ der Form

$$\alpha'_i = b_{i1}\omega_1 + \ldots + b_{ii}\omega_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

existiert, wo $b_{ik} \in Z$ $(i, k = 1, \ldots, n)$; $b_{11} \cdot \ldots \cdot b_{nn} = D$; $0 \leqslant b_{ij} < b_{jj}$ für alle $1 \leqslant j \leqslant i-1$ und D der Index von M' in Z_K ist, das heißt $D = (D_{M'}/D_K)^{1/2}$. Daraus folgt unter Benutzung von (41) daß

$$h(\alpha'_i) \leqslant nDc_{22} = n^2 2^{n(n-1)} D_K^{(n^2-2)/2} D_{M'}^{1/2} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Sei $\alpha_i = \alpha'_i/d$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann ist $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von M mit $D_{M'} = D_M d^{2n}$, weshalb (40) tatsächlich erfüllt ist.

Betrachten wir jetzt die diophantische Gleichung

$$\mathrm{Norm}_{K/Q}(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = a. \tag{42}$$

Für beliebige $\alpha = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ mit $h(\alpha) \leqslant N$ und $\mathrm{Norm}_{K/Q}(\alpha) = a$ ist $(x_1, \ldots, x_n) \in Z^n$ eine Lösung von (42). Schreiben wir für die Konjugierten von α

$$\alpha^{(i)} = \alpha_1^{(i)}x_1 + \ldots + \alpha_n^{(i)}x_n \quad (i = 1, \ldots, n),$$

so bekommen wir

$$|x_j| \leqslant n^{n/2}c_{21}^{n-1}N/D_M^{1/2} = N' \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Im weiteren benutzen wir, der Einfachheit halber die Bezeichnung $\vartheta_M = \dfrac{n^r w_{\mathscr{D}_M}\varkappa_M}{\tau_{\mathscr{D}_M} r! R_{\mathscr{D}_M}}$. Dann folgt aus Satz 1

$$P_M^*(N) \leqslant \vartheta_M \log^r N' + \frac{4(4n)^r w_{\mathscr{D}_M}\varkappa_M}{R_{\mathscr{D}_M}}c_{23}\log^{r-1}N',$$

falls

$$\log N' > 2c_{23} = 2\left[\frac{1}{n}\big|\log|a|\big| + |\log D_M| + n\log(nc_{21}) + (8rn)^{2(r+1)}R_{\mathscr{D}_M}\right].$$

Demnach ist

$$P_M^*(N) \leqslant \vartheta_M \log^r N + \frac{4(8n)^r w_{\mathscr{D}_M}\varkappa_M}{R_{\mathscr{D}_M}}c_{24}\log^{r-1}N,$$

falls

$$\log N > 2c_{24} = 2\left[\frac{1}{n}\big|\log|a|\big| + n|\log D_M| + n^3\log(dD_K) + (8rn)^{2(r+1)}R_{\mathscr{D}_M}\right].$$

Wir betrachten dann eine beliebige Lösung $(x_1, \ldots, x_n) \in Z^n$ von (42), mit

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n}|x_i| \leqslant c_{25}N \tag{43}$$

mit einer später zu bestimmenden Konstante c_{25}, und sei $\alpha = \alpha_1 x_1 + \ldots$

$\ldots + a_n x_n$. Dann ist $a \in M$ und $\mathrm{Norm}_{K/Q}(a) = a$. Ferner folgt auf Grund der obigen Abschätzungen, daß $h(a) \leqslant n c_{25} c_{21} N$. Wenn $c_{25} = (n c_{21})^{-1}$ dann ist $h(a) \leqslant N$. Mit diesem c_{25} haben wir also nach Satz 1

$$P_M^*(N) \geqslant \vartheta_M \log^r(c_{25}N) - \frac{4(4n)^r w_{\mathfrak{O}_M} \varkappa_M}{R_{\mathfrak{O}_M}} c_{23} \log^{r-1}(c_{25}N)$$

falls $\log(c_{25}N) > 2c_{23}$. Daraus ergibt sich, daß für $\log N > 2c_{24}$

$$P_M^*(N) \geqslant \vartheta_M \log^r N - \frac{4(8n)^r w_{\mathfrak{O}_M} \varkappa_M}{R_{\mathfrak{O}_M}} c_{24} \log^{r-1} N$$

gilt. Damit ist (6) bewiesen.

4. Beweis von Satz 2. Zum Beweis von Satz 2 brauchen wir einen Satz, der im wesentlichen von E. Landau [7], [8] stammt. Die Bezeichnungen sind wie in Abschnitt 2.

Lemma 6. *Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad $n \geqslant 2$; $x > 0$ eine reele Zahl und $\mathscr{K}$ eine beliebige Idealklasse von Z_K. Bezeichne $H(x;\mathscr{K})$ die Anzahl der Ideale der Idealklasse $\mathscr{K}$ mit Norm $\leqslant x$. Dann gilt*

$$(44)\qquad H(x;\mathscr{K}) = \lambda x + O\left(D_K^{1/(n+1)} (\log D_K)^n x^{(n-1)/(n+1)}\right),$$

wenn $\lambda = \dfrac{2^s(2\pi)^t R_K}{w_K \sqrt{D_K}}$ ist. Die Konstante in O hängt nur von n ab.

Beweis. Der Beweis von Lemma 6 ist im Buch von E. Landau [8] (Satz 210) zu finden; allerdings ist dort nicht angegeben wie die Konstante in O von D_K abhängt. Sodann hat E. Landau in [7] die Anzahl der Ideale des Körpers mit Norm $\leqslant x$ bestimmt mit dem in Lemma 6 angegebenen Restglied. Bei sinngemäßer Abänderung des Beweises dieses Ergebnisses erhalten wir das obige Restglied für eine beliebige Idealklasse $\mathscr{K}$.

Beweis von Satz 2. Sei $a \in Z$ fixiert, $|a| \leqslant x$ und bezeichne $\varkappa(a)$ die Zahl der in Z_K nicht assoziierten Elemente der Norm a. Da die Elemente von Z_K ganze algebraische Zahlen sind, liegen ihre Normen in Z. Daher gilt

$$(45)\qquad P_K(x; N) = \sum_{0<|a|\leqslant x} P_{K,a}(N),$$

wobei über alle $a \in Z$ summiert werden soll, die Norm eines Elementes von Z_K sind. Nun folgt aus (5) und (45), daß

$$(46)\qquad \left| P_K(x; N) - \frac{n^r w_K}{r! R_K \tau_K} \log^r N \sum_{0<|a|\leqslant x} \varkappa(a) \right| \leqslant \frac{4(4n)^r w_K}{R_K} \sum_{0<|a|\leqslant x} \varkappa(a) c_1(a) \log^{r-1} N,$$

falls

$$\log N > 2\left[\frac{1}{n}\log x + \log D_K + n\log(n\mathscr{H}) + (8rn)^{2(r+1)} R_K\right] = c_{26}$$

und hier ist

$$c_1(a) = \frac{1}{n}\log|a| + \log D_K + n\log(n\mathscr{H}) + (8rn)^{2(r+1)} R_K.$$

Aber $\sum_{0<|a|\leqslant x} \varkappa(a)$ ist identisch mit der Anzahl der Elemente eines vollständigen Systems von 0 verschiedener, nicht assoziierter ganzen Zahlen des Körpers mit Norm $\leqslant x$. Diese Anzahl ist aber gleich der Anzahl derjenigen Hauptideale des Körpers, deren Norm x nicht übersteigt. Bezeichnen wir die Hauptidealklasse des Körpers K mit $\mathscr{K}_0$. Dann folgt aus (44)

$$(47)\qquad \sum_{0<|a|\leqslant x} \varkappa(a) = H(x;\mathscr{K}_0) = \lambda x + O\left(D_K^{1/(n+1)} (\log D_K)^n x^{(n-1)/(n+1)}\right).$$

Aus (46) und (47) ergibt sich

$$(48)\qquad \left| P_K(x; N) - \frac{(2n)^r \pi^t}{2r! \tau_K \sqrt{D_K}} x \log^r N \right| \leqslant \frac{4(4n)^r w_K}{R_K} \sum_{0<|a|\leqslant x} \varkappa(a) c_1(a) \log^{r-1} N + O\left(D_K^{1/(n+1)} (\log D_K)^n x^{(n-1)/(n+1)} \log^r N\right),$$

falls $\log N > c_{26}$, wobei die Konstante in O nur von n abhängt. (Wie wir in der Bemerkung nach Satz 1 gezeigt haben, kann man w_K/R_K durch n nach oben abschätzen.)

Die Konstanten $\varkappa(a)$ und $c_1(a)$ sind nicht negativ, außerdem können wir $c_1(a)$ als eine im Intervall $(1, \infty)$ differenzierbare Funktion der reellen Variable a betrachten. Wir wenden die Abelsche Identität an und erhalten

$$\sum_{0<|a|\leqslant x} \varkappa(a) c_1(a) = \sum_{a=1}^{x} \left(\varkappa(a) + \varkappa(-a)\right) c_1(a) = c_1(x) \sum_{0<|a|\leqslant x} \varkappa(a) - \frac{1}{n}\int_1^x \sum_{|a|\leqslant t} \frac{\varkappa(a)}{t}\, dt.$$

Nach (47) ist das Integral

$$\frac{1}{n}\int_1^x \sum_{|a|\leqslant t} \frac{\varkappa(a)}{t}\, dt = \frac{1}{n}\int_1^x \frac{[\lambda t + O(t^{(n-1)/(n+1)})]}{t}\, dt = O(x),$$

wobei die Konstante in O nur von n, $\mathscr{H}$ abhängt. Nun ist also

$$\frac{4(4n)^r w_K}{R_K} \sum_{0<|\alpha|\leqslant x} \varkappa(\alpha) c_1(\alpha) = \frac{4(4n)^r \lambda}{R_K n} x\log x + c_{27}(n, \mathscr{H}) x^{(n-1)/(n+1)} \log x + c_{28}(n, \mathscr{H}) x.$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt, da $R_K < 2w_K D_K^{1/2} \log^{n-1} D_K$, $D_K \leqslant (n\mathscr{H})^{2n}$ und R_K^{-1} durch n nach Oben abgeschätzt werden kann. Aus $\log x < x^{2/(n+1)}$ folgt, daß es eine Konstante $c_{29}(n, \mathscr{H})$ gibt mit

$$\sum_{0<|\alpha|\leqslant x} \varkappa(\alpha) c_1(\alpha) \leqslant \frac{\lambda}{n} x\log x + c_{29}(n, \mathscr{H}) x.$$

Hieraus und aus (48) ergibt sich

$$\left| P_K(x; N) - \frac{\pi^t (2n)^r}{2r!\, \tau_K \sqrt{D_K}} x \log^r N \right| \leqslant \frac{8(8n)^r \pi^t}{n\sqrt{D_K}} x(\log x) \log^{r-1} N + c_{30}(n) D_K^{1/(n+1)} (\log D_K)^n x^{(n-1)/(n+1)} \log^r N + c_{31}(n, \mathscr{H}) x \log^{r-1} N.$$

Damit ist Satz 2 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] A. Baker, *Contributions to the theory of diophantine equations*, Philos. Trans. Royal Soc. London, A 263 (1968), S. 173–208.

[2] W. E. H. Berwick, *Integral bases*, Cambridge Tracts, No. 22, Reprinted in New York, 1964.

[3] S. I. Borewicz und I. R. Šafarevič, *Zahlentheorie*, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1966.

[4] K. Győry, *On the solutions of linear diophantine equations in algebraic integers of bounded norm*, to appear.

[5] K. Győry et A. Pethő, *Sur la distribution des solutions des équations du type „norm-forme"*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 26 (1975), S. 135–142.

[6] — — *Über die Verteilung der Lösungen von Normformen Gleichungen, II*, Acta Arith. 32 (1977), S. 349–363.

[7] E. Landau, *Verallgemeinerung eines Pólyaschen Satzes auf algebraische Zahlkörper*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1919), S. 478–488.

[8] — *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Teubner Verlag, Leipzig und Berlin, 1927.

[9] S. Lang, *Diophantine geometry*, Interscience Tracts, No. 11, New York and London, 1962.

[10] — *Asymptotic approximations to quadratic irrationalities*, I and II, Amer. J. Math. 87 (1965), S. 481–496.

[11] — *Introduction to diophantine approximations*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1966.

[12] R. Remak, *Über die Abschätzung des absoluten Betrages des Regulators eines algebraischen Zahlkörpers nach unten*, J. Reine Angew. Math. 167 (1932), S. 360–378.

[13] W. M. Schmidt, *Simultaneous approximation to a basis of a real numberfield*, Amer. J. Math. 88 (1966), S. 517–527.

[14] — *Linearformen mit algebraischen Koeffizienten*, II, Math. Ann. 191 (1971), S. 1–20.

[15] — *Norm form equations*, Annals of Math. 96 (1972), S. 526–551.

[16] C. L. Siegel, *Abschätzung von Einheiten*, Göttinger Nachrichten 9 (1969), S. 71–86.

[17] H. M. Stark, *Effective estimates of solutions of some diophantine equations*, Acta Arith. 24 (1973), S. 251–259.

MATHEMATISCHES INSTITUT
KOSSUTH LAJOS UNIVERSITÄT
Debrecen, Ungarn

Eingegangen am 30. 7. 1977
und in revidierter Form am 25. 4. 1978 (971)