ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Berechnung eines Integrals, das bei der Bestimmung des Ranges der Schar der Siegelschen Modulformen auftritt

von

WERNER QUAAS (Berlin, West)

1. Die Berechnung des Ranges der Schar der Modulformen zur Siegelschen Modulgruppe n-ten Grades läßt sich zurückführen auf die Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen aller Grade $\leqslant n$ (U. Christian [2], Formeln (29) und (30)). Ein entsprechender Satz gilt für die Modulformen zur Modulgruppe n-ten Grades und der Stufe q (U. Christian [7], Satz 5.67).

Die Spitzenformen genügen einer Integralgleichung, deren Kern eine Poincarésche Reihe ist. Dabei erfolgt die Summation über die volle Hauptkongruenzgruppe entsprechender Stufe und Grades. Aus der Integralgleichung erhält man eine Integraldarstellung für den Rang der Schar der Spitzenformen (U. Christian [2], [4]). Um bei der Auswertung des Integrals die von U. Christian in [1] entwickelte Reduktionstheorie für symplektische Matrizen anwenden zu können, wird die betreffende Hauptkongruenzgruppe in elementfremde Klassen zerlegt, wobei das charakteristische Polynom der Matrizen und eine Rangbedingung als Kriterien dienen.

In der vorliegenden Arbeit wird nun das erwähnte Integral für den Grad $n = 3$, die Stufen $q \geqslant 3$ und diejenigen Matrizen M aus $\Gamma(3, q)$ berechnet, die das charakteristische Polynom $(x-1)^6$ haben und für deren Rang die Bedingung $\mathrm{Rg}(E-M) = 1$ gilt, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnen soll.

Nach der Klärung der Begriffe und dem Beweis zweier später benötigter Hilfssätze im ersten Abschnitt wird im zweiten Abschnitt eine für die Berechnung des Integrals benötigte Vertauschbarkeit von Summation und Integration nachgewiesen. Dabei werden im Wesentlichen die schon erwähnte Reduktionstheorie von U. Christian und einige von A. Selberg [9] bei der Herleitung der Spurformel durchgeführte Umformungen benutzt. Im letzten Abschnitt erfolgt dann die eigentliche Berechnung des Integrals.

2. Mit $\Gamma(n)$ seien die Modulgruppe n-ten Grades und mit $\Gamma(n, q)$ die zugehörige Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe bezeichnet. $\Gamma(n, q)$ besteht also aus allen Matrizen $M \in \Gamma(n)$ mit

$$M \equiv E \bmod q. \tag{1}$$

Wir setzen hier stets $q \geqslant 3$ voraus.

Es bezeichne $\operatorname{Rg} M$ den Rang der Matrix M und $\operatorname{Det} M$ ihre Determinante.

Wir betrachten nun die folgende Teilmenge von $\Gamma(3, q)$:

$$\sigma_2 = \sigma_2(3, q) = \{M \in \Gamma(3, q) / \operatorname{Det}(xE - M) = (x-1)^6,\ \operatorname{Rg}(E - M) = 1\}. \tag{2}$$

$\mathfrak{G}$ sei ein Fundamentalbereich von $\Gamma(3, q)$ in der oberen Halbebene dritten Grades $\mathfrak{Z}(3)$:

$$\mathfrak{Z}(3) = \{Z = X + iY / Z = Z',\ Y > 0\}. \tag{3}$$

Ist $M \in \Gamma(3)$ gegeben, setzen wir

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{mit } 3 \times 3\text{-Matrizen} \quad A, B, C, D. \tag{8}$$

Es wird dann für $Z \in \mathfrak{Z}(3)$ definiert:

$$M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \tag{9}$$

$$M\{Z\} = CZ + D. \tag{10}$$

Schließlich sei

$$d\omega_Z = \frac{dX\, dY}{(\operatorname{Det} Y)^4} \tag{11}$$

das invariante symplektische Volumenelement.

Im folgenden soll das Integral τ berechnet werden:

$$\tau = \int_{\mathfrak{G}} \sum_{M \in \sigma_2} \operatorname{Det}(-\bar{Z} + M\langle Z\rangle)^{-g} \operatorname{Det}(M\{Z\})^{-g} (\operatorname{Det} Y)^g\, d\omega_Z. \tag{12}$$

Dabei wird $g > 6$, $g \equiv 0 \bmod 2$ vorausgesetzt. Das Integral τ stellt, mit einem gewissen Faktor $\eta(3, g)$ versehen, einen Beitrag zum Rang der Schar der Spitzenformen dar (vergl. [2], § 4, (28)).

Zuvor definieren wir noch ein weiteres Symbol und beweisen zwei Hilfssätze.

Sei die Matrix M wie in (8) aufgespalten mit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Dabei sollen A_1, B_1, C_1, D_1 2×2-Matrizen und a, b, c, d ganze Zahlen sein.

$$M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben dann:

$$M = \{M_1, M_2\}. \tag{13}$$

Lemma 1. *Seien P_1 und P_2 zwei Matrizen des Typs*

$$P = \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix}, \quad s \neq 0 \tag{14}$$

und $L \in \Gamma(3)$. Dann gilt $LP_1 = P_2 L$ genau dann, wenn $P_1 = P_2$ und $L \in \Gamma_1(3)$ sind.

Dabei ist $\Gamma_1(3)$ die erste Spitzengruppe von $\Gamma(3)$ bei Unendlich, das heißt:

$$\Gamma_1(3) = \left\{ M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & b_{11} & b_{12} & * \\ a_{21} & a_{22} & 0 & b_{21} & b_{22} & * \\ * & * & \pm 1 & * & * & * \\ c_{11} & c_{12} & 0 & d_{11} & d_{12} & * \\ c_{21} & c_{22} & 0 & d_{21} & d_{22} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \in \Gamma(3) \right\}. \tag{15}$$

Beweis des Lemmas.

(a) Mit

$$P_1 = \begin{pmatrix} E & S_1 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} E & S_2 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$S_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_\nu \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2$$

und

$$L = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{pmatrix}, \quad L_\mu = \begin{pmatrix} l_{11}^{(\mu)} & l_{12}^{(\mu)} & l_{13}^{(\mu)} \\ l_{21}^{(\mu)} & l_{22}^{(\mu)} & l_{23}^{(\mu)} \\ l_{31}^{(\mu)} & l_{32}^{(\mu)} & l_{33}^{(\mu)} \end{pmatrix}, \quad \mu = 1, 2, 3$$

errechnet man aus $LP_1 = P_2 L$ sofort:

$$S_2 L_3 = L_3 S_1 = 0,$$

$$L_1 S_1 + L_2 = L_2 + S_2 L_4$$

und daraus:

$$
\begin{gathered}
l_{31}^{(3)} = l_{32}^{(3)} = l_{33}^{(3)} = l_{13}^{(3)} = l_{23}^{(3)} = 0\,,\\
l_{13}^{(1)} = l_{23}^{(1)} = l_{31}^{(4)} = l_{32}^{(4)} = 0\,,\\
l_{33}^{(1)} s_1 = s_2 l_{33}^{(4)}
\end{gathered}
\tag{16}
$$

(16) bedeutet aber gerade $L \in \Gamma_1(3)$ und $P_1 = P_2$.

(b) Die Umkehrung folgt durch eine einfache Rechnung sofort.

Lemma 2. *Es sei $Z = X + iY \in \mathfrak{Z}(3)$ in der Darstellung*

$$
Z = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{X_1} & x_{13}\\ & & x_{23}\\ x_{13} & x_{23} & x_3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{Y_1} & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1\\ 0 & 1 & l_2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = X + i\hat{Y}[\hat{L}]
\tag{17}
$$

gegeben.

$\mathfrak{G}(2)$ sei ein Fundamentalbereich von $\Gamma(2, q)$ in $\mathfrak{Z}(2)$. Dann läßt sich der Fundamentalbereich von $\Gamma_1(3, q)$ angeben mit:

$$
X_1 + iY_1 \in \mathfrak{G}(2)\,,
\tag{18}
$$

$$
\begin{cases}
|x_{13}| \leqslant q/2\,,\\
|x_{23}| \leqslant q/2\,,\\
|x_3| \leqslant q/2\,,\\
|l_1| \leqslant q/2\,,\\
|l_2| \leqslant q/2\,.
\end{cases}
\tag{19}
$$

Beweis. Es sei $M \in \Gamma_1(3, q)$, d.h. $M \in \Gamma(3, q)$ und

$$
M = \begin{pmatrix}
\multicolumn{2}{c}{A} & 0 & \multicolumn{2}{c}{B} & *_1\\
 & & 0 & & & *_2\\
*_3 & *_4 & 1 & *_5 & *_6 & *_7\\
\multicolumn{2}{c}{C} & 0 & \multicolumn{2}{c}{D} & *_8\\
 & & 0 & & & *_9\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ usw.}
\tag{20}
$$

Dann läßt sich die folgende Aufspaltung vornehmen:

$$
M = \hat{M} M^* = \begin{pmatrix} U' & \hat{S} U^{-1}\\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\multicolumn{2}{c}{A} & 0 & \multicolumn{2}{c}{B} & 0\\
 & & 0 & & & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\multicolumn{2}{c}{C} & 0 & \multicolumn{2}{c}{D} & 0\\
 & & 0 & & & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},
\tag{21}
$$

$$
U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2\\ 0 & 1 & u_3\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u_2, u_3 \in \mathbf{Z}, \qquad \begin{aligned} u_2 &= -*_8 \equiv 0 \bmod q,\\ u_3 &= -*_9 \equiv 0 \bmod q, \end{aligned}
\tag{22}
$$

$$
\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{13}\\ 0 & 0 & s_{23}\\ s_{13} & s_{23} & s_3 \end{pmatrix}, \qquad \hat{S} \equiv 0 \bmod q.
\tag{23}
$$

Die Anwendung von M^* auf Z bewirkt, daß $Z_1 = X_1 + iY_1$ auf $(AZ_1 + B) \times \times (CZ_1 + D)^{-1}$ abgebildet wird. Da wegen $M \in \Gamma(3, q)$ gilt: $\begin{pmatrix} A & B\\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma(2, q)$, folgt: $\mathfrak{G}(2)$ ist Fundamentalbereich von Z_1.

Die Anwendung von $\hat{M}$ auf Z bewirkt dann folgendes: $\hat{M}\langle Z\rangle = U'ZU + \hat{S}$, d.h. im Einzelnen erfolgen die Ergänzungen

$$
\begin{aligned}
&x_{13} \to x_{13} + s_{13},\\
&x_{23} \to x_{23} + s_{23},\\
&x_3 \to x_3 + s_3,\\
&Y \to U'YU = Y[U],
\end{aligned}
\tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
Y[U] &= \left\{\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{Y_1} & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1\\ 0 & 1 & l_2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\right\}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2\\ 0 & 1 & u_3\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{Y_1} & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & l_1\\ 0 & 1 & l_2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2\\ 0 & 1 & u_3\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{Y_1} & 0\\ & & 0\\ 0 & 0 & p_3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2 + l_1\\ 0 & 1 & u_3 + l_2\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}
$$

Also erfolgen die Ersetzungen

$$
\begin{aligned}
l_1 &\to l_1 + u_2,\\
l_2 &\to l_2 + u_3.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Berücksichtigt man $\hat{S} \equiv 0 \bmod q$ und $u_2, u_3 \equiv 0 \bmod q$, so folgt aus (24) und (25) die Aussage des Lemmas.

3. Es soll gezeigt werden, daß in (12) die Summation und die Integration vertauscht werden können. Dazu müssen wir beweisen, daß

$$
\sum_{M \in \sigma_2} \int_{\mathfrak{G}} \operatorname{abs}(-\bar{Z} + M\langle Z\rangle)^{-g} \operatorname{abs}(M\{Z\})^{-g} (\operatorname{Det} Y)^g \, d\omega_Z
\tag{26}
$$

konvergiert. Dabei bezeichnet $\mathrm{abs}(M)$ den absoluten Betrag der Determinante von M.

Die nächsten Schritte lehnen sich an eine Umformung von A. Selberg [9], S. 63f an.

Es sei $\{\sigma_2\}$ die Menge der Konjugiertenklassen von σ_2, $\{M\}\in\{\sigma_2\}$, d.h. M sei die Konjugiertenklasse von σ_2, in der M liegt.

Ferner definieren wir:

(27) $$[\Gamma(3,q)]_M = \{N\in\Gamma(3,q)/N\tilde{M} = MN\}.$$

(28) Den Fundamentalbereich von $[\Gamma(3,q)]_M$ in $\mathfrak{Z}(3)$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_M$.

Nach Selberg gilt dann, daß (26) dem folgenden Ausdruck gleich ist:

(29) $$\sum_{\{M\}\in\{\sigma_2\}}\int_{\mathfrak{H}_M}\mathrm{abs}(-\bar{Z}+M\langle Z\rangle)^{-g}\mathrm{abs}(M\{Z\})^{-g}(\mathrm{Det}\,Y)^g\,d\omega_Z.$$

Unser Ziel ist es jetzt, für $\{\sigma_2\}$ ein Repräsentantensystem anzugeben.

Da für $M\in\sigma_2$ ja gilt

(30) $$\mathrm{Rg}(M-E) = 1,$$

folgt nach U. Christian [1], Lemma 5 und [5], Satz 2:

Zu jedem $M\in\sigma_2$ gibt es ein $R\in\Gamma(3)$ mit

$$R^{-1}MR = \{M_1, M_2\},$$

wobei $M_1 = E$ und $M_2 = \begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mit $s\neq 0$.

Anders gesagt: Zu $M\in\sigma_2$ gibt es ein $K\in\Gamma(3)$, so daß

(31) $$M = K^{-1}PK,$$

und P hat die Gestalt (14).

Wir setzen jetzt noch

(32) $$\Gamma(3) = G_1\Gamma(3,q)\cup\ldots\cup G_a\Gamma(3,q).$$

Die G_i $(i = 1,\ldots,a)$ repräsentieren also die Nebenklassen von $\Gamma(3)$ nach $\Gamma(3,q)$.

Zusammenfassend ergibt sich: Wenn s über alle von Null verschiedenen ganzen Zahlen und i von 1 bis a laufen, so repräsentieren die Matrizen

(33) $$G_i^{-1}PG_i$$

alle Konjugiertenklassen von σ_2. Dabei habe P die Gestalt (14) und G_i die Bedeutung (32).

Jetzt muß noch berücksichtigt werden, daß durch die Matrizen (33) eventuell zu viele Repräsentanten gegeben sind, d.h., daß mehrere Matrizen (33) dieselbe Klasse repräsentieren.

Lemma 3. *Es sei*

(34) $$A_q = \tfrac{1}{2}q^6\prod_{p|q}(1-p^{-6})\qquad (p\ \textit{Primzahl}).$$

Dann gibt es Matrizen $H_k\in\Gamma(3)$ $(k = 1,\ldots,A_q)$ *mit der Eigenschaft: Die Matrizen* $H_kPH_k^{-1}$ *bilden ein Repräsentantensystem der Konjugiertenklassen von* σ_2, *und jede Klasse wird auch genau einmal repräsentiert.*

Beweis. Falls es zwei Matrizen der Form (33) gibt, die dieselbe Konjugiertenklasse von σ_2 repräsentieren, existiert ein $N\in\Gamma(3,q)$ mit

(35) $$NG_i^{-1}P_1G_iN^{-1} = G_h^{-1}P_2G_h,\qquad i,h\in\{1,\ldots,a\}.$$

Man setze $L^* = G_hNG_i^{-1}$ und erhält aus (35)

$$L^*P_1 = P_2L^*.$$

Nun folgt aus Lemma 1:

$$P_1 = P_2\quad\text{und}\quad L^* = G_hNG_i^{-1}\in\Gamma_1(3).$$

Also existiert genau dann ein $N\in\Gamma(3,q)$, welches (35) erfüllt, wenn

(36) $$G_h\Gamma(3,q)G_i^{-1}\cap\Gamma_1(3)\neq\emptyset.$$

Dies stellt aber gerade den Zusammenhang mit der bei U. Christian [3], S.56, definierten Spitzenanzahl $A_q = A(\Gamma(3,q),1)$ her, deren Wert oben explizit angegeben wurde. Aus der genannten Arbeit von Christian folgt jetzt sofort das Lemma 3.

Nach diesen Vorbereitungen fahren wir mit der Berechnung von (29) fort und erhalten dafür

(37)
$$\sum_{\substack{k=1,\ldots,A_q\\ s\neq 0}}\int_{\mathfrak{H}_{H_k^{-1}PH_k}}\mathrm{abs}(-\bar{Z}+(H_k^{-1}PH_k)\langle Z\rangle)^{-g}\mathrm{abs}(H_k^{-1}PH_k\{Z\})^{-g}(\mathrm{Det}\,Y)^g\,d\omega_Z.$$

Für das Integral gilt nun folgende Gleichheit:

$$\int_{\mathfrak{H}_{H_k^{-1}PH_k}}\mathrm{abs}\big(-\bar{Z}+(H_k^{-1}PH_k)\langle Z\rangle\big)^{-g}\mathrm{abs}\big((H_k^{-1}PH_k)\{Z\}\big)^{-g}(\mathrm{Det}\,Y)^g\,d\omega_Z$$
$$= \int_{\mathfrak{H}_P}\mathrm{abs}(-\bar{Z}+P\langle Z\rangle)^{-g}\mathrm{abs}(P\{Z\})^{-g}(\mathrm{Det}\,Y)^g\,d\omega_Z.$$

Wenn man nun noch Lemma 3 berücksichtigt, errechnet man für (37):

(38) $$A_q\sum_{s\neq 0}\int_{\mathfrak{H}_P}\mathrm{abs}(-\bar{Z}+P\langle Z\rangle)^{-g}\mathrm{abs}(P\{Z\})^{-g}(\mathrm{Det}\,Y)^g\,d\omega_Z.$$

$\mathfrak{H}_P$ ist ein Fundamentalbereich von $[\Gamma(3,q)]_P$.

In Lemma 1 fanden wir

$$LP_1 = P_2 L \Leftrightarrow \big(P_1 = P_2 \wedge L \in \Gamma_1(3, q)\big),$$

d.h.

$$[\Gamma(3, q)]_P = \Gamma_1(3, q). \tag{39}$$

Das bedeutet aber gerade, daß $\mathfrak{H}_P$ auch Fundamentalbereich von $\Gamma_1(3, q)$ ist, und der war in Lemma 2 bestimmt worden.

Unter Berücksichtigung von (17) gilt ferner:

$$\operatorname{Det}(-\bar{Z} + P\langle Z\rangle) = (\operatorname{Det} Y_1)(4s - 8ip_3), \tag{40}$$

$$\operatorname{Det}(P\{Z\}) = 1. \tag{41}$$

Für (38) erhalten wir jetzt:

$$\begin{aligned} (42)\quad & A_q \sum_{s\neq 0} \int_{\mathfrak{H}_P} |(\operatorname{Det} Y_1)(4s - 8ip_3)|^{-g} |p_3 \operatorname{Det} Y_1|^g (\operatorname{Det} Y)^{-4} dX\, dY \\ &= A_q \sum_{s\neq 0} \int_{\substack{X_1 + iY_1 \in \mathfrak{G}(2) \\ |l_1|, |l_2|, |x_{13}|, \\ |x_{23}|, |x_3| \leqslant q/2}} (\operatorname{Det} Y_1)^{-4} |4s - 8ip_3|^{-g} (\operatorname{Det} Y_1) \times \\ &\qquad\qquad \times |p_3|^{g-4} dX_1\, dx_{13}\, dx_{23}\, dx_3\, dY_1\, dp_3\, d\hat{L} \\ &= q^5 A_q \sum_{s\neq 0} \int_{X_1 + iY_1 \in \mathfrak{G}(2)} (\operatorname{Det} Y_1)^{-3} |4s - 8ip_3|^{-g} |p_3|^{g-4} dX_1\, dY_1\, dp_3. \end{aligned}$$

Folgende Substitution

$$p_3 = \tfrac{1}{2}|s|t \tag{43}$$

führt (42) über in

$$\begin{aligned} (44)\quad & q^5 A_q \sum_{s\neq 0} \int_{X_1 + iY_1 \in \mathfrak{G}(2)} (\operatorname{Det} Y_1)^{-3} |s|^{-3} 2^{3-3g} |1 - it|^{-g} |t|^{g-4} dX_1\, dY_1\, dt \\ &= q^5 A_q 2^{3-3g} \operatorname{Vol}\big(\mathfrak{G}(2)\big) \zeta(3) \int_0^\infty |i + t|^{-g} |t|^{g-4} dt. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist konvergent.

4. Da Summation und Integration in (12) vertauscht werden dürfen, gilt also:

$$\tau = \sum_{M \in \sigma_2} \int_{\mathfrak{G}} \operatorname{Det}(-\bar{Z} + M\langle Z\rangle)^{-g} \operatorname{Det}(M\{Z\})^{-g} (\operatorname{Det} Y)^g d\omega_Z.$$

Hierauf können wir, wie bei der Berechnung von (26), die „Selbergschen Umformungen" anwenden und erhalten schließlich wie in (42):

$$\tau = A_q q^5 \sum_{s\neq 0} \int_{X_1 + iY_1 \in \mathfrak{G}(2)} (\operatorname{Det} Y_1)^{-3} (4s - 8ip_3)^{-g} p_3^{g-4} dX_1\, dY_1\, dp_3.$$

Wir substitutieren wieder wie in (42), d.h.

$$p_3 = \tfrac{1}{2}|s|t,$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \tau &= A_q q^5 \sum_{s\neq 0} \int_{X_1 + iY_1 \in \mathfrak{G}(2)} (\operatorname{Det} Y_1)^{-3} (4s - 4|s|ti)^{-g} (\tfrac{1}{2}|s|t)^{g-4} \tfrac{1}{2}|s|\, dX_1\, dY_1\, dt \\ &= A_q q^5 \operatorname{Vol}\big(\mathfrak{G}(2)\big) 2^{-2g-g+4-1} \sum_{s>0} \int_0^\infty |s|^{-3}\big((1 - it)^{-g} + (-1 - it)^{-g}\big) t^{g-4} dt \\ &= (-1)^{g/2} A_q q^5 \operatorname{Vol}\big(\mathfrak{G}(2)\big) 2^{-3g+3} \zeta(3) \int_{-\infty}^{\infty} (t + i)^{-g} t^{g-4} dt. \end{aligned}$$

Der Integrand ist in der oberen t-Halbebene residuenfrei und verhält sich für $|t| \to \infty$ wie $O(|t|^{-4})$, woraus

$$\tau = 0 \tag{45}$$

folgt.

Literaturverzeichnis

[1] U. Christian, *A reduction theory for symplectic matrices*, Math. Zeitschr. 101 (1967), S. 213–244.

[2] — *Siegelsche Modulformen und Integralgleichungen*, ibid., S. 299–305.

[3] — *Über die Anzahl der Spitzen Siegelscher Modulgruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32 (1968), S. 55–60.

[4] — *Hilbert–Siegelsche Modulformen und Integralgleichungen*, Monatsh. Math. 72 (1968), S. 412–418.

[5] — *Zur Theorie der symplektischen Gruppen*, Acta Arith. 24 (1973), S. 61–85.

[6] — *Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$*, Journ. Reine Angew. Math. 277 (1975), S. 130–154.

[7] — *Siegelsche Modulfunktionen*, Vorlesungsausarbeitung, Göttingen, Wintersemester 1974/75 und Sommersemester 1975.

[8] Y. Morita, *An explicit formula for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree two*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 21 (1974), S. 167–248.

[9] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, Journ. Indian Math. Soc. 20 (1956), S. 47–87.

[10] T. Shintani, *On zeta-functions associated with the vector space of quadratic forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 22 (1975), S. 25–65.

Eingegangen am 7. 10. 1977
und in revidierter Form am 19. 1. 1978 (988)