References

[1] M. Eichler, *Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale*, Math. Zeitschr. 67 (1957), pp. 267–298.
[2] J. Coates and W. Sinnot, *p-adic L-function of real quadratic fields*, Inventiones Math. 25 (1974), pp. 253–279.
[3] L. Goldstein and P. de la Torré, *On the transformation of* Log $\eta(z)$, Duke Math. J. 41 (1974), pp. 291–297.
[4] — and M. Razar, *A generalization of Dirichlet's Class Number formula*, ibid. 43 (1976), pp. 349–358.
[5] H. Klingen, *Über die arithmetischen Character der Fourier Koeffizienten von Modulformen*, Math. Ann. 147 (1962), pp. 176–188.
[6] E. Landau, *Einfuhrung in die Elementare und Analytische Theorie der Algebraischen Zahlen und der Ideale*, Chelsea Publishing Co. 1949.
[7] M. Razar, *Dirichlet series and Eichler cohomology*, to appear.
[8] — *Integrals and periods of Eisenstein series*, to appear.
[9] G. Shimura, *Sur le intégrales attachées aux formes automorphes*, J. Math. Soc. Japan 11 (1959), pp. 291–311.
[10] T. Shintani, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integral places*, J. Math. Soc. Japan, to appear.
[11] C. L. Siegel, *Über die Fourier-Koeffizienten von Modulformen*, Gött. Nach., 1970, pp. 1–47.
[12] — *Bernoullische Polynome und Quadratische Zahlkörper*, Gött. Nach., 1968, pp. 1–32.
[13] — *Berechnung von Zetafunktionen an ganzahligen Stellen*, Gött. Nach., 1969, pp. 87–102.
[14] B. Schoenberg, *Elliptic modular functions*, Springer-Verlag, Berlin 1974.
[15] D. Zagier, *Values at negative integers of zeta functions of real quadratic fields*, L'Enseignement Mathématique 22 (1976), pp. 55–95.
[16] — *Valeurs des fonctions zéta des corps quadratiques réels aux entiers négatifs*, Asterisque 41–42 (1977), pp. 135–151.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF MARYLAND
College Park, Maryland, U.S.A.

Received on 13. 5. 1977
and in revised form on 21. 12. 1977 (942)

ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Über die Entwicklung multiplikativer Funkiionen nach Ramanujan-Summen

von

FRIEDEMANN TUTTAS (Clausthal-Zellerfeld)

1. Einleitung. Die Ramanujan-Summen $C_q(n)$ sind definiert durch

$$C_q(n) = \sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant q\\(a,q)=1}} \exp\left(2\pi i\,\frac{a}{q}\,n\right) = \sum_{d\mid(q,n)} d\mu\left(\frac{q}{d}\right) \qquad (q,n\in \boldsymbol{N}).$$

Sie wurden erstmalig von Ramanujan [9] in die Zahlentheorie eingeführt, der sie zur Entwicklung zahlentheoretischer Funktionen $f\colon \boldsymbol{N}\to\boldsymbol{C}$ in der Gestalt

$$f(n) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q C_q(n) \tag{1}$$

verwendete. Ähnliche Entwicklungen finden sich bei Hardy [7]. Die ersten allgemeinen Aussagen über die Ramanujan-Entwicklung (1) zahlentheoretischer Funktionen stammen von Wintner [14] und Delsarte [5].

Es sei $f' = f*\mu$ die Faltung(¹) von f mit der Möbiusfunktion μ, und es gelte ($\tau(n) = \sum_{d\mid n} 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\frac{|f'(n)|}{n} < \infty. \tag{2}$$

Dann existieren die Entwicklungskoeffizienten(²)

$$a_q = \frac{1}{\varphi(q)}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n)C_q(n), \tag{3}$$

und die zugehörige Reihe (1) konvergiert absolut gegen $f(n)$ für jedes $n\in\boldsymbol{N}$.

(¹) Für je zwei zahlentheoretische Funktionen f_1, f_2 wird die Faltung f_1*f_2 durch $(f_1*f_2)(n) = \sum_{d\mid n} f_1(d)f_2\left(\frac{n}{d}\right)$ $(n\in\boldsymbol{N})$ erklärt.

(²) Hinreichend für die Existenz der Entwicklungskoeffizienten (3) ist die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|f'(n)|}{n}$ (vgl. [5], [14]).

Die Bedingung (2) wurde später von Delange [4] abgeschwächt. Er verlangt nur noch ($\omega(n) = \sum_{p|n} 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\omega(n)} \frac{|f'(n)|}{n} < \infty.$$

Insbesondere folgt hieraus, daß multiplikative Funktionen(3), die

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f'(n)|}{n} < \infty \tag{4}$$

erfüllen, eine absolut konvergente Ramanujan-Entwicklung (1) besitzen. In Spezialfällen findet sich dies bereits bei E. Cohen [1]. Ist f multiplikativ und $|f| \leqslant 1$, so ist (4) gleichbedeutend mit

$$\sum_{p} \frac{|f(p)-1|}{p} < \infty \quad (p \text{ prim}).$$

Bezeichnen wir für eine zahlentheoretische Funktion $f\colon N \to C$ mit

$$M(f) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n)$$

den Mittelwert von f (falls dieser existiert), so besagt ein bekannter Satz von Delange [2], daß für multiplikatives f mit $|f| \leqslant 1$ genau dann der Mittelwert $M(f)$ von Null verschieden ist, wenn die Reihe

$$\sum_{p} \frac{f(p)-1}{p}$$

konvergiert und ein $r \in N$ existiert, so daß $f(2^r) \neq -1$ ist. Unter Zuhilfenahme dieses Ergebnisses konnte Schwarz [13] nach einigen Vorarbeiten (vgl. Schwarz [10], [11], [12]) zeigen, daß jede multiplikative Funktion f mit $|f| \leqslant 1$ und $M(f) \neq 0$ eine i.a. nur bedingt konvergente Entwicklung (1) besitzt.

In dieser Note soll in Verallgemeinerung des Satzes von Schwarz das folgende Ergebnis bewiesen werden.

Satz 1. *Die multiplikative Funktion f besitze die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Der Mittelwert $M(f)$ existiert und ist von Null verschieden.*

(b) $\sum_{n\leqslant x} |f(n)|^2 \ll x.$

Dann existiert die punktweise konvergente Ramanujan-Entwicklung (1) *von f.*

(3) d.h. es gilt $f(1) = 1$ und $f(mn) = f(m)f(n)$ für teilerfremde $m, n \in N$.

Wir bemerken, daß ein zum Satz 1 analoges Resultat von Delange [3] angekündigt wurde. Jedoch scheint seine Beweismethode von der unsrigen verschieden zu sein.

Darüber hinaus wird noch gezeigt

Satz 2 (Parsevalsche Gleichung). *Unter den Voraussetzungen* (a) *und* (b) *von Satz* 1 *konvergiert die Reihe*

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_q|^2 \varphi(q) = M(|f|^2)$$

gegen den Mittelwert von $|f|^2$.

Hierin bedeutet φ die Euler-Funktion. Wir bemerken, daß dieses Ergebnis unter den stärkeren Voraussetzungen $M(f) \neq 0$, $|f| \leqslant 1$ ebenfalls bei Schwarz [13] steht.

2. Die Entwicklungskoeffizienten a_q. Das entscheidende Hilfsmittel beim Beweis der obigen Sätze ist ein von Elliott [6] angegebenes notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Existenz eines von Null verschiedenen Mittelwertes einer multiplikativen Funktion. Dieses Ergebnis wird die Existenz der Entwicklungskoeffizienten a_q absichern. Wir zitieren es hier als

Hilfssatz 1 (Elliott [6]). *Es sei f multiplikativ. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(a) *f besitzt einen von Null verschiedenen Mittelwert $M(f)$, und es gilt*

$$\sum_{n\leqslant x} |f(n)|^2 \ll x. \tag{5}$$

(b) *Die Reihen*

$$\sum_{p} \frac{f(p)-1}{p}, \quad \sum_{p} \frac{|f(p)-1|^2}{p}, \quad \sum_{p,\varkappa\geqslant 2} \frac{|f(p^\varkappa)|^2}{p^\varkappa} \quad (p \text{ prim}) \tag{6}$$

sind konvergent und für jede Primzahl p ist(4)

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{f(p^\varkappa)}{p^\varkappa} \neq 0.$$

Sind (a) oder (b) erfüllt, so existiert auch der Mittelwert von $|f|^2$.

Folgerung 1. *Es sei f eine multiplikative Funktion, die die Eigenschaften* (a) *aus Hilfssatz* 1 *besitzt. Aus der Existenz von $M(|f|^2)$ folgt dann*

(4) Die Reihe $\sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{f(p^\varkappa)}{p^\varkappa}$ konvergiert.

unmittelbar

$$f(n) = o(n^{1/2}) \qquad (n \to \infty). \tag{7}$$

Demnach gibt es eine Primzahl p_1, *so daß* $|f(p)| < p^{1/2}$ *für alle* $p > p_1$ *ist. Ferner gilt die Ungleichung*

$$M(|f|^2) \geqslant |M(f)|^2,$$

aus der sofort $M(|f|^2) > 0$ *abzulesen ist.*

Folgerung 2. *Es sei f multiplikativ und erfülle die Voraussetzung* (a) *aus Hilfssatz* 1. *Dann ist die Reihe*

$$\sum_p \frac{|f(p)|^2 - 1}{p}$$

konvergent.

Dies folgt aus Hilfssatz 1(b) und der Identität

$$|f(p)|^2 - 1 = |f(p) - 1|^2 - 2\,\mathrm{Re}\big(1 - f(p)\big).$$

Mit der Abkürzung

$$\lambda(p) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{f(p^\varkappa)}{p^\varkappa}$$

definieren wir unter den Voraussetzungen (a) und (b) von Satz 1 eine multiplikative Funktion a^* durch ihre Werte an den Primzahlpotenzstellen

$$a^*_{p^r} = \frac{1}{\lambda(p)} \sum_{\varrho \geqslant r} \frac{f(p^\varrho) - f(p^{r-1})}{p^\varrho} \tag{8}$$

und setzen

$$a_q = M(f)\, a^*_q.$$

Bemerkung 1. Schwarz [13] gibt eine andere Darstellung der a_q, die jedoch, wie man rasch nachrechnet, mit der unsrigen für $|f(p)| < p$, also erst recht für $p > p_1$ übereinstimmt.

Bemerkung 2. Aufgrund der Orthogonalitätsrelationen

$$M(C_r C_q) = \begin{cases} \varphi(q), & \text{falls } r = q, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wird man Entwicklungskoeffizienten der Gestalt

$$a_q = \frac{1}{\varphi(q)} M(f \cdot C_q) \tag{9}$$

erwarten. Mit Hilfssatz 1, Hilfssatz 6 und einer Idee von Lucht ([8], Beweis von Satz 4) läßt sich folgendes zeigen: Die durch (9) erklärten Entwicklungskoeffizienten a_q existieren, die Abbildung

$$q \to \frac{a_q}{M(f)} = a^*_q$$

ist multiplikativ und es gilt (8).

Im folgenden werden wir für genügend große Primzahlen, genauer für $p > p_1$, eine andere Darstellung von a^*_q angeben, die sich für den weiteren Beweisgang als zweckmäßiger erweisen wird.

Zur Abkürzung setzen wir (μ bezeichnet die Möbius-Funktion)

$$h = \mu f * f, \tag{10}$$

$$\eta(p) = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{h(p^\varkappa)}{p^\varkappa},$$

$$e_p = \left(1 - \frac{1}{p}\right) \lambda(p).$$

Bemerkung 3. Die Funktion h ist multiplikativ, und es gilt

$$h(p^\varkappa) = f(p^\varkappa) - f(p^{\varkappa-1}) f(p) \qquad (\varkappa \in \boldsymbol{N},\ p \text{ prim}).$$

Insbesondere ist also $h(p) = 0$. Weiter hat man

$$\eta(p) = \left(1 - \frac{f(p)}{p}\right) \lambda(p)$$

und nach Folgerung 1 ist $\eta(p) \neq 0$ für $p > p_1$.

Der folgende Hilfssatz liefert die angekündigte Umschreibung der a^*_q.

Hilfssatz 2. *Für* $p > p_1$ *und* $r \in \boldsymbol{N}$ *gilt*

$$a^*_{p^r} = \frac{1}{\eta(p)} \left\{ \frac{f(p) - 1}{p - 1} \cdot \frac{f(p^{r-1})}{p^{r-1}} + \sum_{\varrho \geqslant r} \frac{h(p^\varrho)}{p^\varrho} \right\}, \tag{11}$$

speziell

$$a^*_p = \frac{1}{\eta(p)} \left\{ \frac{f(p) - 1}{p - 1} + \sum_{\varrho \geqslant 2} \frac{h(p^\varrho)}{p^\varrho} \right\}.$$

Ferner besteht für alle Primzahlen p und $r \in \boldsymbol{N}$ *der Zusammenhang*

$$e_p \{1 + a^*_p \varphi(p) + \ldots + a^*_{p^r} \varphi(p^r) - a^*_{p^{r+1}} p^r\} = f(p^r). \tag{12}$$

Der Beweis von (11) wird durch direktes Nachrechnen geführt. Formel (12) steht ebenfalls bei Schwarz [13] und wird am einfachsten durch vollständige Induktion bestätigt.

Die folgenden Abschätzungen für die Koeffizienten $a^*_{p^r}$ werden sich an späterer Stelle als hilfreich erweisen.

Hilfssatz 3. *Für $p > p_1$ und $r \in \boldsymbol{N}$ gilt*

$$(13)\qquad a^*_p = \frac{1}{\eta(p)}\left\{\frac{f(p)-1}{p} + \frac{f(p^2)-f^2(p)}{p^2} + O(p^{-3/2})\right\} \quad (p\to\infty),$$

$$a^*_{p^2} = \frac{1}{\eta(p)}\left\{\frac{f(p^2)}{p^2} + O(p^{-3/2})\right\} \quad (p\to\infty),$$

$$(14)\qquad a^*_{p^r} = o(p^{-r/2}) \quad (p^r\to\infty),$$

$$(15)\qquad \eta(p) = 1+\frac{f(p^2)-f^2(p)}{p^2} + O(p^{-3/2}) \quad (p\to\infty).$$

Zum Beweis hat man lediglich die Definition (10) von h sowie die Abschätzung $f(p^\varkappa) = o(p^{\varkappa/2})$ für $p^\varkappa\to\infty$ zu beachten, letzteres nach (7).

3. Konvergenz der Reihe (1). Wir definieren für $t, D \in \boldsymbol{N}$ mit $(t, D) = 1$ und $a^*_D \neq 0$ durch

$$\beta_t(n) = \begin{cases} \dfrac{\mu(n)\, n a^*_{nD}}{a^*_D} & \text{für} \quad (n,t) = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n\in\boldsymbol{N})$$

eine multiplikative Funktion β_t. Wie bei Schwarz [13] ausgeführt, läßt sich der Konvergenzbeweis von (1) reduzieren auf den Konvergenzbeweis von

$$(16)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_t(n)}{n}.$$

Zum Vergleich erklären wir für jedes $r\in\boldsymbol{N}$ durch

$$b_r(n) = \begin{cases} \mu^2(n)\prod_{p|n}\big(1-f(p)\big), & \text{falls } (n,r) = 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n\in\boldsymbol{N})$$

eine weitere multiplikative Funktion b_r. Wir zeigen (vgl. Seite 264–265) den

Hilfssatz 4. *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_r(n)}{n}$$

ist konvergent für jedes $r\in\boldsymbol{N}$.

Der Übergang von b_r zu β_t wird ermöglicht durch den folgenden

Hilfssatz 5 (Lucht [8]). *Es seien f, g benachbarte*(5) *multiplikative Funktionen, die den Abschätzungen*

$$\sum_{n\leqslant x}|f(n)|^\lambda \ll x, \qquad \sum_{n\leqslant x}|g(n)|^\lambda \ll x$$

mit einem $\lambda > 1$ genügen. Ferner gelte noch

$$(17)\qquad 1+\frac{f(p)}{p^s}+\frac{f(p^2)}{p^{2s}}+\ldots \neq 0 \quad \textit{in} \quad \operatorname{Re} s \geqslant 1.$$

Konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n}$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n}$.

Wir wollen zunächst aus den beiden letzten Hilfssätzen die Konvergenz der Reihe (16) ableiten. Dazu wählen wir $r = t\prod_{p\leqslant p_2}p$, wobei p_2 so gewählt ist, daß

$$\frac{|1-f(p)|}{p} \leqslant \frac{1}{2}$$

ausfällt für alle $p > p_2$. Ein solches p_2 existiert wegen (7). Damit ist (17) mit b_r anstelle von f erfüllt. Die Konvergenz der Reihe (16) folgt dann aus

$$(18)\qquad \sum_p \frac{|\beta_t(p)-b_r(p)|}{p} < \infty$$

und aus

$$(19)\qquad \sum_{n\leqslant x}|b_r(n)|^2 \ll x, \qquad \sum_{n\leqslant x}|\beta_t(n)|^2 \ll x.$$

Zum Beweis von (18) wählen wir eine Primzahl $p_3 \geqslant \max\{r, D\}$, so daß $|\eta(p)| \geqslant \frac{1}{2}$ für alle $p > p_3$ ist. Für diese p haben wir unter Beachtung von (13) und (15)

$$\begin{aligned} |\beta_t(p)-b_r(p)| &= |pa^*_p + (1-f(p))| \\ &= \left|\frac{1}{\eta(p)}\left\{f(p)-1+\frac{f(p^2)-f^2(p)}{p}+O(p^{-1/2})\right\} + (1-f(p))\right| \\ &\leqslant 2\left|\big(f(p)-1\big)\big(1-\eta(p)\big) + \frac{f(p^2)-f^2(p)}{p} + O(p^{-1/2})\right| \\ &\leqslant 2\left\{\frac{|f(p)-1|\,|f(p^2)-f^2(p)|}{p^2} + \frac{|f(p^2)|+|f(p)|^2}{p} + O(p^{-1/2})\right\}. \end{aligned}$$

(5) Zwei multiplikative Funktionen f, g heißen *benachbart*, wenn die Reihe $\sum_p \frac{|f(p)-g(p)|}{p}$ konvergent ist.

Aus der Konvergenz der Reihen

$$\sum_p \frac{|f(p)-1|\,|f(p^2)-f^2(p)|}{p^3} < \infty, \qquad \sum_p \frac{|f(p^2)|}{p^2} < \infty, \qquad \sum_p \frac{|f(p)|^2}{p^2} < \infty$$

erhält man damit (18).

Wie partielle Summation zeigt, folgt (19) aus den Abschätzungen

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{|b_r(n)|^2}{n} \ll 1, \qquad \sum_{n\leqslant x} \frac{|\beta_t(n)|^2}{n} \ll 1.$$

Die erste Behauptung kommt aus (6) und

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{|b_r(n)|^2}{n} \leqslant \prod_{p\leqslant x}\left(1+\frac{|1-f(p)|^2}{p}\right).$$

Bei der zweiten Summe bleibt infolge

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{|\beta_t(n)|^2}{n} \ll \prod_{p\leqslant x}(1+p\,|a_p^*|^2)$$

die Konvergenz von $\sum_p p\,|a_p^*|^2$ zu zeigen, die nach einer längeren Rechnung aus den Hilfssätzen 1(b), 2 und Gleichung (7) folgt.

Insgesamt haben wir damit den Konvergenzbeweis der Reihe (1) auf den Beweis von Hilfssatz 4 zurückgeführt.

Zum Beweis von Hilfssatz 4 bemerken wir, daß es genügt, die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{r'}(n)}{n}$ für ein hinreichend großes $r'\in \boldsymbol{N}$ nachzuweisen, denn mit Hilfssatz 5 überträgt sich dann unmittelbar die Konvergenz auf jedes $r\in\boldsymbol{N}$. Wir setzen $r' = \prod_{p\leqslant p_4} p$, wobei $p_4 > t \prod_{p\leqslant p_3} p$ so gewählt sei, daß $\frac{|2-f(p)|}{p-1}\leqslant\frac{1}{2}$ ist für alle $p>p_4$. Mit diesem r' definieren wir die multiplikative Funktion

$$B_{r'} = 1 * b_{r'}$$

und zeigen

$$\text{(20)}\qquad \begin{cases} \sum_{n\leqslant x} |b_{r'}(n)| = o(x) & \text{für } x\to\infty, \\ \sum_{n\leqslant x} B_{r'}(n) = Ax+o(x) & \text{für } x\to\infty \end{cases}$$

mit einer geeigneten Konstanten A. Daraus folgt in bekannter Weise die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{r'}(n)}{n}$ gegen A.

Die schon nachgewiesene Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_{r'}(n)|^2}{n}$ liefert

$$\sum_{n\leqslant x}|b_{r'}(n)|^2 = o(x).$$

Damit hat man mit der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung

$$\sum_{n\leqslant x}|b_{r'}(n)| \ll \Big\{x\sum_{n\leqslant x}|b_{r'}(n)|^2\Big\}^{1/2} = o(x),$$

also den ersten Teil von (20).

Berechnet man die Werte von $B_{r'}$ an den Primzahlpotenzstellen, so sieht man

$$B_{r'}(p^k) = 1+b_{r'}(p) = \begin{cases} 2-f(p), & \text{falls } p\nmid r', \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (k\in\boldsymbol{N}),$$

also

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{r'}(p^k)}{p^k} = 1+\frac{1+b_{r'}(p)}{p-1} = \begin{cases} 1+\dfrac{2-f(p)}{p-1}, & \text{falls } p\nmid r', \\ \dfrac{p}{p-1} & \text{sonst} \end{cases} \qquad (k\in\boldsymbol{N})$$

und

$$B_{r'}(p)-1 = \begin{cases} 1-f(p), & \text{falls } p\nmid r', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt mit Hilfssatz 1, daß die Reihen

$$\sum_{p,\,k\geqslant 2}\frac{|B_{r'}(p^k)|^2}{p^k}, \qquad \sum_p \frac{B_{r'}(p)-1}{p}, \qquad \sum_p\frac{|B_{r'}(p)-1|^2}{p}$$

sämtlich konvergieren und nach unserer Wahl von r ist ferner

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{r'}(p^k)}{p^k}\neq 0$$

für jede Primzahl p. Folglich gibt es ebenfalls nach Hilfssatz 1 eine (von Null verschiedene) Konstante A mit $M(B_{r'}) = A$. Das ist der zweite Teil von (20).

4. Produktdarstellung von $M(f)$, $M(|f|^2)$. Zur Bestimmung des Grenzwertes der Reihe (1) und zum Beweis von Satz 2 benötigen wir den

HILFSSATZ 6. *Die multiplikative Funktion f genüge den Voraussetzungen* (a) *und* (b) *von Satz* 1. *Dann gilt*:

$$M(f) = \prod_p \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(p^2)}{p^2}+\ldots\Big) = \prod_p e_p; \tag{21}$$

$$M(|f|^2) = \prod_p \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\frac{|f(p)|^2}{p}+\frac{|f(p^2)|^2}{p^2}+\ldots\Big). \tag{22}$$

Bemerkung 4. Unter den Voraussetzungen $M(f)\neq 0$, $|f|\leqslant 1$ ist (21) ein Satz von Delange [2].

Zum Nachweis von Hilfssatz 6 verwenden wir den leicht beweisbaren

HILFSSATZ 7. *Es sei $f_n(\sigma)$ eine Folge von Funktionen auf $M\subset \boldsymbol{R}$. Sind die Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\sigma), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(\sigma)|^2$$

gleichmäßig konvergent auf M, so auch das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\big(1+f_n(\sigma)\big).$$

Beweis von Hilfssatz 6. Wir zeigen zunächst (21). Die erzeugende Dirichletsche Reihe von f,

$$F(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^\sigma} \qquad (\sigma>1),$$

konvergiert wegen (5) für $\sigma>1$ absolut.

Wegen der Existenz von $M(f)\neq 0$ hat man, wie partielle Summation rasch zeigt, für $\sigma\to 1+$ die Asymptotik

$$F(\sigma)\sim\frac{M(f)}{\sigma-1},$$

also (6)

$$M(f)\sim\frac{F(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \prod_p\Big(1+\frac{f(p)-1}{p^\sigma}+\frac{f(p^2)-f(p)}{p^{2\sigma}}+\ldots\Big) = \prod_p\big(1+a_p(\sigma)\big) \qquad (\sigma\to 1+).$$

Nach (7) ist für $\sigma\geqslant 1$ gleichmäßig

$$a_p(\sigma) = \frac{f(p)-1}{p^\sigma}+\frac{f(p^2)}{p^{2\sigma}}+O(p^{-3/2}) \qquad (p\to\infty),$$

(6) $\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\sigma$, $\sigma>1$, bedeutet die Riemannsche Zetafunktion. Bekanntlich gilt $\zeta(\sigma)\sim 1/(\sigma-1)$ für $\sigma\to 1+$.

und es konvergiert für $\sigma\geqslant 1$ gleichmäßig

$$\sum_p a_p(\sigma) = \sum_p\frac{f(p)-1}{p^\sigma}+\sum_p\frac{f(p^2)}{p^{2\sigma}}+\sum_p O(p^{-3/2}),$$

weil jede der Reihen für $\sigma=1$ konvergiert. Beachtet man noch die Konvergenz der Reihen

$$\sum_p\frac{|f(p)-1|^2}{p}, \qquad \sum_p\frac{|f(p^2)|}{p^2},$$

so folgt für $\sigma\geqslant 1$ die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_p |a_p(\sigma)|^2$, und Hilfssatz 7 liefert dann die Gleichung (21). Zum Nachweis von (22) geht man analog vor.

5. Bestimmung des Grenzwertes der Reihe (1). Für festes $n\in\boldsymbol{N}$ betrachten wir für $\sigma>0$ die Reihe

$$A(\sigma,n) = \sum_{q=1}^{\infty}\frac{a_q C_q(n)}{q^\sigma}.$$

Da die Reihe (1) konvergiert, besteht nach dem Stetigkeitssatz für Dirichletsche Reihen die Beziehung

$$\lim_{\sigma\to 0+} A(\sigma,n) = \sum_{q=1}^{\infty} a_q C_q(n).$$

Wir wollen für $A(\sigma,n)$ eine konvergente Produktdarstellung angeben. Zuvor haben wir uns jedoch davon zu überzeugen, ob $A(\sigma,n)$ für $\sigma>0$ absolut konvergiert. Wegen der Multiplikativität von a^* und der durch $q\mapsto C_q(n)$ erklärten Funktion gilt

$$\sum_{q\leqslant Q}\frac{|a_q C_q(n)|}{q^\sigma}\leqslant |M(f)|\prod_{p\leqslant Q}\Big(1+\frac{|a_p^* C_p(n)|}{p^\sigma}+\frac{|a_{p^2}^* C_{p^2}(n)|}{p^{2\sigma}}+\ldots\Big).$$

Wir zeigen die Konvergenz des Produkts für $Q\to\infty$. In jedem der endlich vielen Faktoren, für die $p|n$ gilt, steht nur eine endliche Summe, weil die $C_{p^r}(n)$ für $r\geqslant\nu+2$ mit $p^\nu\|n$, d.h. $p|n$, aber $p^{\nu+1}\nmid n$, verschwinden. Für die p mit $p\nmid n$ ist aber

$$C_p(n) = -1, \qquad C_{p^r}(n) = 0 \text{ für } r\geqslant 2.$$

Alle diese Faktoren haben die Gestalt

$$1+|a_p^*|/p^\sigma,$$

so daß nur noch die Konvergenz von

$$\sum_{p>p_1} |a_p^*|/p^\sigma$$

zu zeigen bleibt. Aus Hilfssatz 3 folgt ($\eta(p) \ll 1$)

$$\sum_{p>p_1} \frac{|a_p^*|}{p^\sigma} \ll \sum_{p>p_1} \frac{|f(p)-1|}{p^{1+\sigma}} + \sum_{p>p_1} \frac{|f(p^2)|+|f(p)|^2}{p^{2+\sigma}} + \sum_{p>p_1} p^{-3/2}.$$

Die Konvergenz der zweiten Reihe ist wegen (7) klar und für die erste Reihe gilt

$$\sum_{p>p_1} \frac{|f(p)-1|}{p^{1+\sigma}} \leqslant \Big\{ \sum_{p>p_1} \frac{|f(p)-1|^2}{p} \sum_{p>p_1} \frac{1}{p^{1+2\sigma}} \Big\}^{1/2} < \infty.$$

Damit besteht für $\sigma > 0$ die Produktdarstellung

$$A(\sigma, n) = M(f) \prod_p \Big(1 + \frac{a_p^* C_p(n)}{p^\sigma} + \frac{a_{p^2}^* C_{p^2}(n)}{p^{2\sigma}} + \ldots \Big)$$

$$= \prod_p e_p \Big(1 + \frac{a_p^* C_p(n)}{p^\sigma} + \ldots \Big) = \prod_{p \leqslant \varkappa} \{\ldots\} \prod_{p > \varkappa} \{\ldots\} = P_1(\sigma) P_2(\sigma).$$

Hierbei sei $\varkappa$ fest, aber größer als $\max\{n, p_1\}$ gewählt. Für das erste Produkt erhält man mit (12) wie bei Schwarz [13]

$$\lim_{\sigma \to 0+} P_1(\sigma) = P_1(0) = f(n).$$

Die Faktoren des zweiten Produktes haben die Gestalt

$$1 + \Big(1 - \frac{1}{p^\sigma} \Big) \Big(\frac{p-1}{p-f(p)} \eta(p) - 1 \Big) = 1 + \delta_p(\sigma). \tag{23}$$

Konvergieren nun die Reihen

$$\sum_{p>p_1} \delta_p(\sigma), \qquad \sum_{p>p_1} |\delta_p(\sigma)|^2 \tag{24}$$

gleichmäßig in $\sigma \geqslant 0$, so gilt nach Hilfssatz 7 dasselbe für das Produkt $\prod_{p>\varkappa} \big(1+\delta_p(\sigma)\big) = P_2(\sigma)$. Sehen wir dies als bewiesen an, so folgt

$$\lim_{\sigma \to 0+} P_2(\sigma) = P_2(0) = 1,$$

da für $\sigma = 0$ alle Faktoren (23) Eins sind. Insgesamt ergibt sich damit Satz 1.

Zur Vereinfachung des Ausdrucks für $\delta_p(\sigma)$ benutzen wir die Darstellung (15) für $\eta(p)$:

$$\frac{p-1}{p-f(p)} \eta(p) - 1 = \frac{p-1}{p-f(p)} - 1 + \frac{p-1}{p-f(p)} \frac{f(p^2)-f^2(p)}{p^2} + O(p^{-3/2})$$

$$= \frac{f(p)-1}{p} + \frac{f(p^2)}{p^2} + O(p^{-3/2}).$$

Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz der ersten Reihe (24) und für die zweite Reihe kommt dies aus der Abschätzung

$$|\delta_p(\sigma)|^2 \ll \frac{|f(p)-1|^2}{p^2} + \frac{|f(p^2)|^2}{p^4} + \frac{|f(p)-1|\,|f(p^2)|}{p^3} + p^{-3/2}.$$

Damit ist der Satz 1 vollständig bewiesen.

6. Beweis von Satz 2. Ist die Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} |a_q|^2 \varphi(q)$ konvergent, so gilt

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_q|^2 \varphi(q) = \prod_p \Big\{ |e_p|^2 \sum_{r=0}^{\infty} |a_{p^r}^*|^2 \varphi(p^r) \Big\}. \tag{25}$$

Wie Schwarz [13] betrachten wir die Funktionen

$$k_p(n) = e_p \sum_{r=0}^{\infty} a_{p^r}^* C_{p^r}(n)$$

und erhalten mit Hilfssatz 2 entsprechend

$$M(|k_p|^2) = \frac{\varphi(p)}{p} \sum_{\varrho=0}^{\infty} \frac{|f(p^\varrho)|^2}{p^\varrho}. \tag{26}$$

Setzt man $R(x) = \Big[\dfrac{\log x}{\log p} \Big] + 1$, so sieht man (vgl. [13])

$$\sum_{n \leqslant x} |k_p(n)|^2 = |e_p|^2 \sum_{r \leqslant R(x)} |a_{p^r}^*|^2 \varphi(p^r) x + O\Big(\sum_{0<r,r' \leqslant R(x)} |a_{p^r}^* a_{p^{r'}}^*| p^{r+r'} \Big). \tag{27}$$

Die Summe im O-Restglied läßt sich mit (15) abschätzen zu

$$\sum_{0 \leqslant r,r' \leqslant R(x)} |a_{p^r}^* a_{p^{r'}}^*| p^{r+r'} = \Big(\sum_{0 \leqslant r \leqslant R(x)} |a_{p^r}^*| p^r \Big)^2$$

$$= \Big(\sum_{r \leqslant \sqrt{R(x)}} |a_{p^r}^*| p^r + \sum_{\sqrt{R(x)} < r \leqslant R(x)} |a_{p^r}^*| p^r \Big)^2 = \{O(x^{1/4}) + o(x^{1/2})\}^2 = o(x).$$

Setzt man diese Abschätzung in (27) ein und vergleicht mit (26), so folgt bei Beachtung von $e_p \neq 0$ nach Hilfssatz 1 die Konvergenz von

$$\sum_{r=0}^{\infty} |a_{p^r}^*|^2 \varphi(p^r),$$

und es gilt

$$M(|k_p|^2) = |e_p|^2 \sum_{r=0}^{\infty} |a^*_{p^r}|^2 \varphi(p^r).$$

Ein Vergleich mit (26) gibt

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{|f(p)|^2}{p}+\ldots\right) = |e_p|^2 \sum_{r=0}^{\infty} |a^*_{p^r}|^2 \varphi(p^r).$$

Damit folgt aus (25) und Hilfssatz 6 die Konvergenz von

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_q|^2 \varphi(q) = M(|f|^2),$$

wie in Satz 2 behauptet.

Literaturverzeichnis

[1] E. Cohen, *Fourier expansions of arithmetical functions*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), S. 145–147.

[2] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Scient. de l'École Norm Sup. 78 (1961), S. 273–304.

[3] — *Quelques résultats sur les fonctions multiplicatives*, C.R. Acad. Sc. Paris 281 (1975), Sér A, S. 997–1000.

[4] — *On Ramanujan expansions of certain arithmetical functions*, Acta Arith. 31 (1976), S. 259–272.

[5] M. J. Delsarte, *Essai sur l'application de la théorie des fonctions presque périodiques a l'arithmétique*, Ann. Sci. de l'École Norm. Sup. (3) 62 (1945), S. 185–204.

[6] P. D. T. A. Elliott, *A mean-value theorem for multiplicative functions*, Proc. London Math. Soc (3) 31 (1975), S. 418–438.

[7] G. H. Hardy, *Note on Ramanujan's trigonometrical function $C_q(n)$ and certain series of arithmetical functions*, Proc. Cambr. Phil. Soc. 20 (1921), S. 263–271.

[8] L. Lucht, *Über benachbarte multiplikative Funktionen*, Archiv der Math. 30 (1978), S. 40–48.

[9] S. Ramanujan, *On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers*, Transact. Cambr. Phil. Soc. 20 (1918), S. 259–276.

[10] W. Schwarz, *Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer zahlentheoretischer Funktionen*, Acta Arith. 22 (1973), S. 329–338.

[11] — *Die Ramanujan-Entwicklung reellwertiger multiplikativer Funktionen vom Betrage kleiner oder gleich Eins*, J. Reine Angew. Math. 271 (1974), S. 171–176.

[12] — *Ramanujan-Entwicklungen stark multiplikativer Funktionen*, ibid. 262/263 (1973), S. 66–73.

[13] — *Über die Ramanujan-Entwicklung multiplikativer Funktionen*, Acta Arith. 27 (1975), S. 269–279.

[14] A. Wintner, *Eratosthenian averages*, Baltimore 1943.

Eingegangen am 9. 7. 1977
und in revidierter Form am 28. 11. 1977 (962)

ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Definite binary quadratic forms with class number one

by

Meinhard Peters (Münster)

Let k be a totally real algebraic number field, $\mathfrak{o}$ its maximal order. Let (V, q) be a totally positive binary quadratic space over k, let G be a primitive free $\mathfrak{o}$-lattice of rank 2 in (V, q) with $q(G) \subseteq \mathfrak{o}$ (primitive means: the $\mathfrak{o}$-module generated by $q(G)$ is the unit ideal). Let $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}G$ be the discriminant of G ($4\cdot$ "volume" $\mathfrak{v}G$ in the terminology of [4], § 82); in our situation $\mathfrak{d}G$ is an integral ideal. Let $\mathfrak{s}G$ be the scale of G ([4], § 82).

Let $H_k(\mathfrak{d}, G)$ be the proper class number of the genus of G over k. If $H_k(\mathfrak{d}, G) = 1$ for a G, let us call $(\mathfrak{d}, k)$ a (generalized) *idoneal number*. The $(\mathfrak{d}, Q)$ are — crudely speaking — Euler's idoneal numbers.

We prove the following

Theorem. (i) *For a fixed k there are only finitely many idoneal numbers $(\mathfrak{d}, k)$. For $n = [k:Q] > 2$ these idoneal numbers can be enumerated effectively.*

(ii) *For fixed n there are only finitely many idoneal numbers.*

(iii) *Assuming the Generalized Riemann Hypothesis, there are altogether only finitely many idoneal numbers.*

Proof. We use the explicit determination of the Minkowski–Siegel–Maßformula for binary quadratic forms in [6]:

$$M(G) = \frac{\dfrac{\sqrt{d}}{\pi^n}\sqrt{\dfrac{\mathfrak{N}(\mathfrak{v}G)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{s}G)^2}}}{\prod\limits_{\mathfrak{p}|\mathfrak{s}} 2 \prod\limits_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{s}}\left(1-\dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)\prod\limits_{\mathfrak{p}|2}\mathfrak{N}\mathfrak{p}^{\left[\frac{\sigma}{2}\right]} r_{\mathfrak{p}}} \tag{1}$$

where $\mathfrak{s} = (\mathfrak{s}G)^{-2}\mathfrak{v}G$, $r_{\mathfrak{p}} = \frac{1}{2}, 1, 2$ or $\left(1-\dfrac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathfrak{N}\mathfrak{p}}\right)^{-1}$, where χ is the generating character of $k(\sqrt{-\det G})/k$; let

$$G \cong \begin{pmatrix} 1 & \\ & \pi^s\alpha \end{pmatrix},$$

α a unit, then σ is defined by $\mathfrak{p}^{\sigma} = 4\mathfrak{o} + 2\mathfrak{p}^{\left[\frac{s}{2}\right]} + \partial(-\det G)$, where ∂ denotes the quadratic defect. Writing