Для величины R (см. (26)), в силу (66), (67) (применяя неравенство Коши–Буняковского), получаем

$$(68)\quad \sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T} R < A\left\{\sum_{\tilde t_\nu}\ln^2\tilde t_\nu \sum_{\tilde t_\nu}\left[\sum_n \frac{d(n)}{\sqrt{n}}\cos(\tilde t_\nu \ln n)\right]^2\right\}^{1/2} <$$
$$< A\left(T\ln^3 T\sum_{\tilde t_\nu} S\right)^{1/2} < A(T\ln^3 T\cdot T\ln^5 T)^{1/2} = AT\ln^4 T.$$

Наконец, из (26), в силу (66), (67), (68) получаем

$$(69)\quad \sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T} Z^4(\tilde t_\nu) = O(T\ln^5 T),$$

т.е. (8). На этом доказательство леммы закончено.

Литература

[1] A. E. Ingham, *Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2), 27 (1926), стр. 273–300.

[2] Ян Мозер, *О законе Грама в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 32 (1977), стр. 107–113.

[3] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[4] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV)*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 27. 5. 1977 (945)

ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Sur certaines suites uniformément équiréparties modulo 1

par

JEAN COQUET (Valenciennes)

1. Introduction

1.1. Notations. Soit q un entier naturel $\geqslant 2$. Dans cet article, $s(n)$ désigne la somme des chiffres de l'entier naturel n écrit en base q. Autrement dit, si $n = \sum_{r=0}^{+\infty} e_r(n)q^r$, où $\forall r\in \boldsymbol{N}$, $e_r(n)\in\{0,\ldots,q-1\}$, on a:

$$s(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} e_r(n).$$

On définit, par récurrence sur k, les itérées de la fonction „somme des chiffres":

$$s^{(1)}(n) = s(n)$$

et

$$s^{(k+1)}(n) = s\big(s^{(k)}(n)\big)\quad \text{pour tout } k\in\boldsymbol{N}^*.$$

1.2. Résultats. On se propose de démontrer:

THÉORÈME 1. *Soit $\big(\lambda(n)\big)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite de nombres réels. Si la suite $\big(\lambda(n)\big)$ est uniformément équirépartie modulo* 1 ([6]), *la suite $\big(\lambda(s(n))\big)$ l'est aussi.*

A l'aide de ce théorème, on obtient le résultat suivant, connu lorsque $k = 1$ ([1], [5] et [7]):

COROLLAIRE. *Pour tout $k\in\boldsymbol{N}^*$, la suite $\big(\alpha s^{(k)}(n)\big)_{n\in\boldsymbol{N}}$ est équirépartie modulo* 1 *si et seulement si α est irrationnel.*

En effet, si α est rationnel, la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Si α est irrationnel, la suite (αn) est uniformément équirépartie modulo 1.

A l'aide du théorème, on obtient alors, par récurrence sur k, l'uniforme équirépartition de $\big(\alpha s^{(k)}(n)\big)$.

L'utilisation de la notion d'équirépartition uniforme pour démontrer le corollaire et donc l'intérêt du théorème 1 seront justifiés par la proposition démontrée au paragraphe 3.2.

2. Preuve du théorème 1

2.1. Quelques résultats concernant la somme des chiffres en base q. Dans toute la suite, on pose, pour $r \in \mathbf{N}^*$ et $a \in \mathbf{Z}$:

$$c(r, a) = \operatorname{Card}\{n \mid 0 \leqslant n \leqslant q^r - 1 \text{ et } s(n) = a\}.$$

Lorsque $q = 2$ ($s(n)$ étant la somme des chiffres de n en base 2), $c(r, a) = C_r^a$.

Les propriétés des coefficients binômiaux suggèrent les résultats suivants:

PROPRIÉTÉ 1. $c(r, a) = 0$ *si* $a > r(q-1)$ *ou si* $a < 0$.

PROPRIÉTÉ 2. $c(r, a) = c\big(r, r(q-1)-a\big)$.

PROPRIÉTÉ 3. $c(r+1, a) = \sum_{j=0}^{q-1} c(r, a-j)$.

PROPRIÉTÉ 4. $c(r, a-1) \leqslant c(r, a)$ *pour* $a \leqslant \left[\dfrac{r(q-1)}{2}\right]$.

Démonstration. Les propriétés 1, 2 et 3 sont évidentes. La propriété 4 est vraie lorsque $r = 1$.

Supposons la vraie jusqu'à l'ordre $r = r_0$.

1er cas: $a \leqslant \left[\dfrac{r_0(q-1)}{2}\right]$

$$c(r_0+1, a-1) = \sum_{j=0}^{q-1} c(r_0, a-j-1) \leqslant \sum_{j=0}^{q-1} c(r_0, a-j) = c(r_0+1, a);$$

2 ème cas: $\left[\dfrac{r_0(q-1)}{2}\right] + 1 \leqslant a \leqslant \left[\dfrac{(r_0+1)(q-1)}{2}\right]$

$$\begin{aligned} c(r_0+1, a) - c(r_0+1, a-1) &= c(r_0, a) - c(r_0, a-q) \\ &\qquad \text{d'après la propriété 3,} \\ &= c\big(r_0, r_0(q-1)-a\big) - c(r_0, a-q) \\ &\qquad \text{d'après la propriété 2.} \end{aligned}$$

Comme $a - q \leqslant r_0(q-1) - a \leqslant \left[\dfrac{r_0(q-1)}{2}\right]$, on obtient, d'après l'hypothèse de récurrence:

$$c(r_0+1, a) - c(r_0+1, a-1) \geqslant 0.$$

Remarque. D'après [2], page 92, on a:

$$c(r, a) = \sum_{\substack{h,k \\ qh+k=a}} (-1)^h \binom{r}{h} \binom{r+k-1}{k}.$$

Cette expression semble peu utilisable pour démontrer les propriétés précédentes.

PROPRIÉTÉ 5. $\max_{a \in \mathbf{Z}} c(r, a) = o(q^r)$, $r \to +\infty$.

Démonstration. Il est sans doute possible de donner une preuve élémentaire de ce résultat en s'appuyant sur l'expression de $c(r, a)$ rappelée plus haut, mais nous allons le démontrer par un argument probabiliste très simple.

Soit $(X_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées dans $\{0, \ldots, q-1\}$.

Posons, pour $r \in \mathbf{N}^*$,

$$Y_r = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} X_k.$$

Il est facile de voir que:

$$P(Y_r = a) = \frac{1}{q^r} c(r, a)$$

de sorte que, d'après les propriétés 2 et 4, il s'agit de prouver que:

$$P\left(Y_r = \left[\frac{r(q-1)}{2}\right]\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0.$$

Or l'espérance de Y_r vaut $r(q-1)/2$ et sa variance $r(q^2-1)/12$. D'après le théorème limite central, pour $x > 0$,

$$P\left(\left|Y_r - \frac{r(q-1)}{2}\right| \leqslant x\sqrt{\frac{r(q^2-1)}{12}}\right) \xrightarrow[r \to +\infty]{} \int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du.$$

Fixons $x > 0$. Pour r assez grand, on a:

$$P\left(\left|Y_r - \frac{r(q-1)}{2}\right| \leqslant x\sqrt{\frac{r(q^2-1)}{12}}\right) \leqslant x.$$

Donc, pour r assez grand,

$$P\left(Y_r = \left[\frac{r(q-1)}{2}\right]\right) \leqslant x.$$

2.2. Un lemme. Fixons $h \in \mathbf{N}^*$ et posons $g(n) = e\big(h\lambda(n)\big)$ où $e(t) = e^{2i\pi t}$ pour tout t réel. L'hypothèse du théorème 1 se traduit par le fait qu'il existe une suite (ε_r) de réels positifs telle que:

(1) $\varepsilon_r \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$,

(2) $\left|\sum_{j=0}^{r-1} g(k+j)\right| \leqslant r\varepsilon_r$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

LEMME. *Il existe une suite (δ_r) de réels positifs telle que:*

(1′) $\delta_r \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$,

(2′) $\left|\sum\limits_{i=0}^{q^r-1} g(\sigma+s(i))\right| \leqslant q^r\delta_r$ *pour tout* $\sigma\in N$.

Démonstration. Posons ici pour simplifier $b = r(q-1)/2$ et $c(r, t) = c_t$. On a:

$$\sum_{i=0}^{q^r-1} g(\sigma+s(i)) = \sum_{j=0}^{2b} c_j g(\sigma+j).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\varrho\in N$ tel que: $j \geqslant 2\varrho+1 \Rightarrow \varepsilon_j \leqslant \varepsilon/2$.

Supposant $b > \varrho$, on a donc, par transformation d'Abel:

$$\left|\sum_{i=0}^{q^r-1} g(\sigma+s(i))\right| \leqslant \sum_{0\leqslant t\leqslant[b]} (c_t-c_{t-1})(2b-2t+1)\varepsilon_{2b-2t+1}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{0\leqslant t\leqslant[b]-\varrho} (c_t-c_{t-1})(2b-2t+1) + \sum_{[b]-\varrho+1\leqslant t\leqslant[b]} (c_t-c_{t-1})(2b-2t+1)$$

$$\leqslant q^r\frac{\varepsilon}{2} + 2\varrho c_{[b]} \leqslant q^r\varepsilon$$

pour r assez grand, d'après la propriété 5.

2.3. Fin de la démonstration du théorème. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme, il existe $r\in N$ tel que $\delta_r \leqslant \varepsilon/2$. Soit alors $N\in N$ satisfaisant à $N \geqslant 4q^r/\varepsilon$. Etant donné $n\in N$, on définit les entiers m et l par:

$$(m-1)q^r \leqslant n+1 < mq^r \quad \text{et} \quad lq^r \leqslant n+N < (l+1)q^r.$$

Alors,

$$\left|\sum_{j=n+1}^{n+N} g(s(j))\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{n+1\leqslant j<mq^r} g(s(j))\right| + \sum_{t=m}^{l-1}\left|\sum_{tq^r\leqslant j<(t+1)q^r} g(s(j))\right| + \left|\sum_{lq^r\leqslant j\leqslant n+N} g(s(j))\right|$$

$$\leqslant 2q^r + \sum_{t=m}^{l-1}\left|\sum_{0\leqslant i\leqslant q^r-1} g(s(t)+s(i))\right|$$

$$\leqslant 2q^r + (l-m)q^r\delta_r, \quad \text{d'après le lemme,}$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon N}{2} + \frac{\varepsilon N}{2} = \varepsilon N.$$

Le théorème est démontré.

3. Remarques

3.1. En modifiant à peine la démonstration, on peut obtenir:

THÉORÈME 2. *Pour tout $k\in N^*$, tout $c\in N$ et tout d entier $\geqslant 2$, $\{n\in N \mid s^{(k)}(n) \equiv c \bmod d\}$ a une densité asymptotique égale à $1/d$.*

Il est évidemment possible d'obtenir des résultats analogues au corollaire du théorème 1 et au théorème 2 en composant différentes fonctions „somme des chiffres".

3.2. On peut aussi prouver que la réciproque du théorème 1 est vraie: par exemple, dans le cas où $q = 2$, cela tient à ce que toute suite $(\lambda(n))$ qui est $(E, 2)$-équirépartie modulo 1 est équirépartie modulo 1 (théorème 7.14, page 63, [6]). Pour la même raison, il est vrai également que, si $(\lambda(s(n)))$ est équirépartie modulo 1, $(\lambda(n))$ l'est aussi.

Par contre, et cela justifie l'utilisation du théorème 1:

PROPOSITION. *Il existe une suite $(\lambda(n))$ équirépartie modulo 1 telle que la suite $(\lambda(s(n)))$ ne soit pas équirépartie modulo 1.*

Démonstration. On supposera que $s(n)$ est la somme des chiffres de n en base 2.

On sait que (n^α), où $\alpha\in\,]0, 1[$ est équirépartie modulo 1. Montrons que, si $\alpha\in\,]0, \frac{1}{2}[$, la suite $((s(n))^\alpha)$ ne l'est pas.

$$\operatorname{Card}\{n\leqslant 2^T-1 \mid T/2-\lambda > s(n) \text{ ou } T/2+\lambda < s(n)\}$$

$$= \sum_{j>T/2+\lambda} C_T^j + \sum_{j<T/2-\lambda} C_T^j = 2\sum_{j>T/2+\lambda} C_T^j < 2^{T+1}e^{-2\lambda^2/T}$$

d'après [4], page 17. Donc

$$\operatorname{Card}\{n\leqslant 2^T-1 \mid (T/2-\lambda)^\alpha \leqslant (s(n))^\alpha \leqslant (T/2+\lambda)^\alpha\} \geqslant 2^T - 2^{T+1}e^{-2\lambda^2/T}.$$

Prenons

$$\lambda = T^{3/4-\alpha/2} \quad \text{et} \quad T\geqslant 16.$$

$$\operatorname{Card}\left\{n\leqslant 2^T-1 \,\middle|\, \left(\frac{T}{2}\right)^\alpha - \frac{2\alpha}{T^{1/4-\alpha/2}} \leqslant (s(n))^\alpha \leqslant \left(\frac{T}{2}\right)^\alpha + \frac{2\alpha}{T^{1/4-\alpha/2}}\right\}$$

$$= 2^T - o(2^T).$$

Il en résulte que $((s(n))^\alpha)$ n'est pas équirépartie modulo 1 si $\alpha\in\,]0, \frac{1}{2}[$.

3.3. En utilisant des arguments analogues à ceux que nous avons développés dans 2.2 et 2.3, il est possible de prouver que toute suite q-additive (voir [3]) équirépartie modulo 1 est uniformément équirépartie modulo 1.

Nous sommes très reconnaissant au referee pour les simplifications qu'il nous a suggérées.

Bibliographie

[1] J. Besineau, *Indépendance statistique d'ensembles liés à la fonction „somme des chiffres"*, Acta Arith. 20 (1972), p. 401–416.
[2] L. Comtet, *Analyse combinatoire*, tome 1, PUF, collection SUP „Le mathématicien" No 4.
[3] H. Delange, *Sur les fonctions q-additives ou q-multiplicatives*, Acta Arith. 21 (1972), p. 285–298.
[4] P. Erdös and J. Spencer, *Probabilistic methods in combinatorics*, Academic Press, New-York, Akad. Kiádó, Budapest 1974.
[5] A. O. Gelfond, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives ou multiplicatives données*, Acta Arith. 13 (1968), p. 259–265.
[6] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley, Interscience.
[7] M. Mendès-France, *Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires*, J. Analyse Math. 20 (1967), p. 1–56.

Reçu le 30. 7. 1977
et dans la forme modifiée le 21. 10. 1977 (969)

ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Acknowledgment of priority

by

KARL K. NORTON (Boulder, Colorado)

My paper *Remarks on the number of factors of an odd perfect number* appeared in Acta Arithmetica 6 (1961), pp. 365–374. There I proved several results of the following nature: if N is an odd perfect number with smallest prime factor p, and if $\omega(N)$ denotes the number of distinct prime factors of N, then

$$\omega(N) \geqslant cp^2/\log p, \tag{1}$$

where c is a positive absolute constant. Only recently did I learn that a similar estimate for $\omega(N)$ when N is "λ-abundant" was obtained some years earlier by Hans Salié (*Über abundante Zahlen*, Math. Nachr. 9 (1953), pp. 217–220). When $\lambda = 2$, his result has the same strength as (1). The basic idea underlying Salié's proof is the same as my own, although he does not carry it quite as far. In particular, he does not determine the constant c, nor does he get numerical results on $\omega(N)$ of the sort tabulated in my paper.

I regret that I did not previously observe and acknowledge Professor Salié's contribution.

Received on 30. 7. 1977 (970)