3. Remarque. On peut montrer avec la même construction, en modifiant légèrement les calculs du 2.3 que les suites $x\Lambda$ et $x\Theta$ sont simultanément uniformément équiréparties ou complètement équiréparties ou pseudo-aléatoires. Cette construction permet en particulier de donner des exemples de suites complètement équiréparties à croissance lente.

Bibliographie

[1] M. Mendès-France, *Deux remarques concernant l'équirépartition des suites*, Acta Arith. 14 (1968), p. 163–167.

Reçu le 5. 5. 1977
et dans la forme modifiée le 19. 9. 1977 (936)

ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Доказательство гипотезы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана

Ян Мозер (Братислава)

1. Пусть ([3], стр. 94, 383)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it),\qquad \vartheta(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{1}$$

Пусть, дальше, $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность значений определенных соотношением

$$\vartheta(t_\nu) = \pi\nu, \tag{2}$$

где ν — целое положительное.

Е. К. Титчмарш, в работе [4], стр. 105, высказал следующую гипотезу

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z^2(t_\nu)Z^2(t_{\nu+1}) = O(N\ln^4 N) \tag{3}$$

(где M — постоянное число).

В этой работе покажем, что имеет место

Теорема.

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z^2(t_\nu)Z^2(t_{\nu+1}) = O(N\ln^4 N). \tag{4}$$

Введем последовательность $\{\tilde{t}_\nu\}$ согласно условию

$$\vartheta(\tilde{t}_\nu) = \frac{\pi}{2}\nu. \tag{5}$$

Основой доказательства оценки (4) является следующая

Лемма.

$$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} Z^4(\tilde{t}_\nu) = O(T\ln^5 T). \tag{6}$$

2. В этой части, предполагая справедливость леммы, завершим Доказательство теоремы. Прежде всего, в силу (2), (5)

(7) $$\vartheta(\tilde{t}_{2\nu}) = \frac{\pi}{2}2\nu = \pi\nu = \vartheta(t_\nu),$$

т.е.

(8) $$t_\nu = \tilde{t}_{2\nu}.$$

В силу (8),

(9) $$\sum_{t_{M+1}\leqslant t_\nu\leqslant T} Z^4(t_\nu) < \sum_{t_{M+1}\leqslant \tilde{t}_\nu\leqslant T} Z^4(\tilde{t}_\nu).$$

Дальше напомним, что в силу (1) и [3], стр. 109,

$$|Z(\tilde{t}_\nu)| = |\zeta(\tfrac{1}{2}+i\tilde{t}_\nu)| < A(\tilde{t}_\nu)^{1/6}\ln\tilde{t}_\nu < AT^{1/6}\ln T,$$

т.е.

(10) $$Z^4(\tilde{t}_\nu) < AT^{2/3}(\ln T)^4, \quad \tilde{t}_\nu \leqslant T.$$

Теперь, в силу (6), (9), (10) (применяя в надлежащем месте неравенство Коши–Буняковского)

(11) $$\sum_{t_{M+1}\leqslant t_\nu\leqslant T} Z^2(t_\nu)Z^2(t_{\nu+1}) < \left\{\sum Z^4(t_\nu)\sum Z^4(t_{\nu+1})\right\}^{1/2} <$$
$$< \left\{\sum Z^4(\tilde{t}_\nu)\sum Z^4(\tilde{t}_{\nu+1})\right\}^{1/2} <$$
$$< \{AT\ln^5 T(T\ln^5 T + T^{2/3}\ln^4 T)\}^{1/2} <$$
$$< AT\ln^5 T.$$

Положим

(12) $$t_N = \max_{0<t_\nu\leqslant T}\{t_\nu\}.$$

Так как ([4], стр. 102)

(13) $$t_{\nu+1} - t_\nu \sim \frac{2\pi}{\ln t_\nu},$$

то, очевидно,

(14) $$t_N \sim T, \quad T\to+\infty.$$

Однако, ([3], стр. 261)

$$t_N \sim 2\pi\frac{N}{\ln N},$$

т.е.

(15) $$N \sim \frac{1}{2\pi}T\ln T.$$

Наконец, из (11), в силу (15) следует (4), т.е. теорема доказана.

3. В этой части упомянем одно следствие из теоремы. Напомним ([4], [2]) что промежуток $\langle\bar{t}_\nu, \bar{t}_{\nu+1}\rangle$ называется правильным, если

(16) $$Z(\bar{t}_\nu)Z(\bar{t}_{\nu+1}) < 0.$$

Пусть $G(T)$ обозначает количество правильных промежутков принадлежащих промежутку $\langle 0, T\rangle$. Относительно $G(T)$ Е. К. Титчмарш получил следующую оценку ([4], стр. 105)

(17) $$G(T) > A\frac{T^{2/3}}{\ln T}.$$

Покажем, что имеет место

Следствие.

(18) $$G(T) > A\frac{T}{\ln^3 T}.$$

Действительно. Прежде всего напомним ([4], [2], (28)) что Е. К. Титчмарш получил следующее соотношение

(19) $$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z(t_\nu)Z(t_{\nu+1}) \sim -2(c+1)N,$$

где c — постоянная Эйлера. Следовательно, из (19), в силу (11), (15), (см. (16))

(20) $$AT\ln T < \sum_{t_{M+1}\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T}|Z(\bar{t}_\nu)Z(\bar{t}_{\nu+1})| < \sqrt{G(T)}\Big\{\sum_{t_{M+1}\leqslant\bar{t}_\nu\leqslant T} Z^2(\bar{t}_\nu)Z^2(\bar{t}_{\nu+1})\Big\}^{1/2} <$$
$$< \sqrt{G(T)}\Big\{\sum_{t_{M+1}\leqslant t_\nu\leqslant T} Z^2(t_\nu)Z^2(t_{\nu+1})\Big\}^{1/2} < A\sqrt{G(T)}\sqrt{T\ln^5 T},$$

из чего следует (18).

В следующих частях работы помещено доказательство леммы.

4. Исходим из приближенного функционального уравнения для $\zeta^2(s)$. Имеем ([3], стр. 95)

(21) $$\zeta^2(s) = \sum_{n\leqslant x}\frac{d(n)}{n^s} + \chi^2(s)\sum_{m\leqslant y}\frac{d(m)}{m^{1-s}} + O\{(x+y)^{1/2-\sigma}\ln t\},$$

где $d(n)$ означает число делителей n, $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, и

(22) $$xy = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^2.$$

Полагая
$$s = \tfrac{1}{2}+it, \quad x = y = \frac{t}{2\pi} = \bar{t},$$
получаем

(23) $$\zeta^2(\tfrac{1}{2}+it) = \sum_{n\leqslant \bar{t}} \frac{d(n)}{n^{1/2+it}} + \chi^2(\tfrac{1}{2}+it)\sum_{n\leqslant \bar{t}} \frac{d(n)}{n^{1/2-it}} + O(\ln t).$$

Умножая последнее на $e^{i2\vartheta}$ (напомним, [3], стр. 94, что
$$\chi(\tfrac{1}{2}+it) = e^{-i2\vartheta})$$
получаем

(24) $$Z^2(t) = 2\sum_{n\leqslant \bar{t}} \frac{d(n)}{\sqrt{n}}\cos(2\vartheta - t\ln n) + O(\ln t).$$

Из этого, в силу (5),

(25) $$Z^2(\tilde{t}_\nu) = 2(-1)^\nu \sum_{n\leqslant \tilde{t}_\nu/2\pi} \frac{d(n)}{\sqrt{n}}\cos(\tilde{t}_\nu \ln n) + O(\ln \tilde{t}_\nu).$$

Последнее соотношение является основным для дальнейшего. Из (25)

(26) $$Z^4(\tilde{t}_\nu) = 4\sum_{n,m}\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}}\cos(\tilde{t}_\nu\ln n)\cos(\tilde{t}_\nu \ln m) + {}$$
$$+ O\left\{\ln\tilde{t}_\nu\left|\sum_n \frac{d(n)}{\sqrt{n}}\cos(\tilde{t}_\nu\ln n)\right|\right\} + O(\ln^2\tilde{t}_\nu) =$$
$$= 4S + R + O(\ln^2\tilde{t}_\nu),$$
где

(27) $$4S = 2\sum\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}}\left[\cos\{\tilde{t}_\nu\ln(nm)\} + \cos\left(\tilde{t}_\nu\ln\frac{n}{m}\right)\right] =$$
$$= 2\sum\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}}\cos\left(\tilde{t}_\nu\ln\frac{n}{m}\right) + {}$$
$$+ 2\sum\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}}\cos\{\tilde{t}_\nu\ln(nm)\} =$$
$$= 2\sum \frac{d^2(n)}{n} + 2\sum_{n\neq m}\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}}\cos\left(\tilde{t}_\nu\ln\frac{n}{m}\right) + {}$$

$$+ 2\sum \frac{d^2(n)}{n}\cos(2\tilde{t}_\nu\ln n) + 2\sum_{n\neq m}\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}}\cos\{\tilde{t}_\nu\ln(nm)\} =$$
$$= 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 + 2S_4.$$

5. В этой части изучим величину

(28) $$\sum_{t_{M+1}\leqslant \tilde{t}_\nu\leqslant T} S_2 = 2\sum_{m<n<\tilde{t}_N/2\pi}\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}} \sum_{\tau\leqslant \tilde{t}_\nu \leqslant T}\cos\left(\tilde{t}_\nu\ln\frac{n}{m}\right),$$
где

(29) $$\tau = \max\{t_{M+1}, 2\pi m, 2\pi n\}.$$

Сумме (28) соответствует следующая внутренняя сумма

(30) $$\sum\cos\{2\pi\psi(\nu)\},$$
где

(31) $$\psi(\nu) = \frac{1}{2\pi}\tilde{t}_\nu\ln\frac{n}{m}.$$

Так как, в силу (5), (ср. [4], стр. 100)

(32) $$\vartheta'(\tilde{t}_\nu)\frac{d\tilde{t}_\nu}{d\nu} = \frac{\pi}{2},$$
то

(33) $$\psi'(\nu) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\pi}{2\vartheta'(\tilde{t}_\nu)}\ln\frac{n}{m} = \frac{1}{4\vartheta'(\tilde{t}_\nu)}\ln\frac{n}{m}.$$

Однако (ср. [4], стр. 100)

(34) $$2\vartheta'(\tilde{t}_\nu) = \ln\frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi} + O\left(\frac{1}{\tilde{t}_\nu}\right).$$

Следовательно, в силу (34) (напомним, что $\tilde{t}_\nu \geqslant 2\pi n$)

(35) $$\psi'(\nu) = \frac{1+o(1)}{2\ln\frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi}}\ln\frac{n}{m} < \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\ln n}{2\ln\frac{\tilde{t}_\nu}{2\pi}} < \frac{3}{4},$$
т.е. $(m<n)$

(36) $$\frac{A}{\ln\tilde{t}_\nu}\ln\frac{n}{m} < \psi'(\nu) < \frac{3}{4}.$$

Из этого (ср. [4], стр. 103) получаем, что

$$\sum \cos\{2\pi\psi(\nu)\} = \int \cos\{2\pi\psi(x)\}\,dx + O(1) = O\left(\frac{\ln T}{\ln\dfrac{n}{m}}\right). \tag{37}$$

Еще напомним ([1], стр. 297), что

$$\sum_{m<n\leqslant x}\sum \frac{d(n)\,d(m)}{\sqrt{nm}\ln\dfrac{n}{m}} = O(x\ln^3 x). \tag{38}$$

Следовательно, из (28), в силу (37), (38), ($x = T/2\pi$), получаем

$$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T} S_2 = O(T\ln^4 T). \tag{39}$$

6. В этой части изучим величину (см. (27))

$$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T} S_4 = 2\sum_{m<n}\sum \frac{d(n)\,d(m)}{\sqrt{nm}} \sum_{\tau\leqslant\tilde t_\nu\leqslant T} \cos\{\tilde t_\nu \ln(nm)\}. \tag{40}$$

Этой сумме соответствует следующая внутренняя сумма

$$\sum \cos\{2\pi\chi(\nu)\}, \tag{41}$$

где

$$\chi(\nu) = \frac{1}{2\pi}\tilde t_\nu \ln(nm). \tag{42}$$

В силу (34) (ср. (32), (33))

$$\chi'(\nu) = \frac{\ln(nm)}{4\vartheta'(\tilde t_\nu)} = \frac{\ln(nm)}{2\ln\dfrac{\tilde t_\nu}{2\pi} + O\left(\dfrac{1}{\tilde t_\nu}\right)} = \frac{\ln(nm)}{2\ln\dfrac{\tilde t_\nu}{2\pi}} + O\left(\frac{\ln(nm)}{\tilde t_\nu \ln^2 \tilde t_\nu}\right). \tag{43}$$

Имеем (см. (25))

$$n \leqslant \frac{\tilde t_\nu}{2\pi}, \quad \ln n < A\ln\tilde t_\nu, \tag{44}$$

и, следовательно, из (43) в силу (44) получаем

$$\begin{aligned}\chi'(\nu) &= \frac{\ln(nm)}{2\ln n} + O\left\{\frac{\ln(nm)}{n(\ln n)^2}\right\} < \\ &< \frac{1}{2}\,\frac{\ln m}{\ln n} + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n\ln n}\right) < \frac{1}{2}\,\frac{\ln m}{\ln n} + \frac{1}{2} + \frac{A}{2n\ln n},\end{aligned} \tag{45}$$

если M достаточно большое.

Имеем (ср. [4], стр. 103)

$$\begin{aligned}\sum \cos\{2\pi\chi(\nu)\} &= \\ &= \int_{\chi'(x)\leqslant\frac12} \cos\{2\pi\chi(x)\}\,dx + \int_{\chi'(x)>\frac12} \cos[2\pi\{\chi(x)-x\}]\,dx + O(1) = \\ &= S_5 + S_6 + O(1).\end{aligned} \tag{46}$$

Для S_5 имеем (ср. [4], стр. 104)

$$S_5 = O(\ln t_N) = O(\ln T). \tag{47}$$

Напомним ([1], стр. 297, 298, оценка суммы Σ_1) что

$$\sum_{m<n\leqslant x}\sum \frac{d(n)\,d(m)}{\sqrt{nm}} = O(x\ln^2 x). \tag{48}$$

Следовательно, в силу (47), (48), (при $x = T/2\pi$), имеем

$$\sum_{m<n}\sum \frac{d(n)\,d(m)}{\sqrt{nm}} S_5 = O(T\ln^3 T). \tag{49}$$

Далее положим

$$\begin{aligned}S_6 = S_{61}\ (n > 2m) + S_{62}\ (m+2A \leqslant n < 2m) + \\ + S_{63}\ (m < n < m+2A),\end{aligned} \tag{50}$$

где A — постоянная из соотношения (45).

Для величины S_{61} получим, аналогично случаю (49), (см. [4], стр. 104)

$$\sum_{m<n}\sum \frac{d(n)\,d(m)}{\sqrt{nm}} S_{61} = O(T\ln^3 T). \tag{51}$$

Переходим к величине S_{62}. Полагая $n = m+2A+r$ (ср. аналогичное место в [4], стр. 104) в силу (45) имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\{x-\chi(x)\} &\geqslant \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\ln(n-2A-r)}{\ln n} - \frac{A}{n\ln n}\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{\ln\left(1-\dfrac{2A+r}{n}\right)}{\ln n} - \frac{A}{n\ln n}\right\} > \\ &> \frac{1}{2}\left\{\frac{2A+r}{n\ln n} - \frac{A}{n\ln n}\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{A+r}{n\ln n} > A\,\frac{r}{m\ln(m+1)}.\end{aligned} \tag{52}$$

Следовательно (ср. [4], стр. 104)

(53) $$\sum_{m<n}\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}} S_{62} =$$
$$= O\left\{\sum_{m\leqslant T/2\pi} \frac{d(m)}{\sqrt{m}} \sum_{r=1}^{m-2A} \frac{d(m+r+2A)}{\sqrt{m}} \frac{m\ln(m+1)}{r}\right\} =$$
$$= O\left\{\sum_{m\leqslant T/2\pi} d(m)\ln m \sum_{r=1}^{m} \frac{d(m+r+2A)}{r}\right\} =$$
$$= O\left\{\ln T \sum_{r\leqslant T/2\pi} \frac{1}{r} \sum_{m\leqslant T/2\pi} d(m)d(m+r+2A)\right\}.$$

Теперь напомним ([1], стр. 296), что

(54) $$\sum_{1}^{x} d^2(n) = \frac{1}{\pi^2} x\ln^3 x + O(x\ln^2 x).$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, в силу (54) получаем ($m+r < 2m < 2T$)

(55) $$\sum_{m\leqslant T/2\pi} d(m)d(m+r+2A) < \left\{\sum d^2(m)\sum d^2(m+r+2A)\right\}^{1/2} < AT\ln^3 T.$$

Значит, из (53), в силу (55) получаем

(56) $$\sum_{m<n}\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}} S_{62} = O(T\ln^5 T).$$

Переходим к величине S_{63}. Прежде всего напомним ([4], стр. 100), что

(57) $$\vartheta'(t) \sim \frac{1}{2}\ln t, \qquad \vartheta''(t) \sim \frac{1}{2t}.$$

Дальше, из (43) в силу (32) ($n > m \geqslant 1$, $n \geqslant 2$)

(58) $$\chi''(\nu) = -\frac{\ln(nm)}{4\{\vartheta'(\tilde{t}_\nu)\}^2}\vartheta''(\tilde{t}_\nu)\frac{d\tilde{t}_\nu}{d\nu} =$$
$$= -\frac{\pi}{8}\frac{\ln(nm)}{\{\vartheta'(\tilde{t}_\nu)\}^3}\vartheta''(\tilde{t}_\nu) < -A\frac{\ln 2}{\tilde{t}_\nu\ln^3\tilde{t}_\nu} < -\frac{A}{T\ln^3 T}.$$

Значит, в силу леммы 3 из [3], стр. 73, 74, имеем

(59) $$S_{63} = O\{\sqrt{T}(\ln T)^{3/2}\}.$$

Следовательно ($n = m+p$, $p \leqslant 2A$),

(60) $$\left|\sum_{m<n}\sum \frac{d(n)d(m)}{\sqrt{nm}} S_{63}\right| <$$
$$< A\sqrt{T}(\ln T)^{3/2} \sum_{m\leqslant T/2\pi} \frac{d(m)}{\sqrt{m}} \sum_{p=1}^{2A} \frac{d(m+p)}{\sqrt{m+p}} <$$
$$< A\sqrt{T}(\ln T)^{3/2} \sum_{p=1}^{2A} \sum_{m} \frac{d(m)}{\sqrt{m}} \frac{d(m+p)}{\sqrt{m+p}} <$$
$$< A\sqrt{T}(\ln T)^{3/2} \sum_{p=1}^{2A} \left(\sum \frac{d^2(m)}{m} \sum \frac{d^2(m+p)}{m+p}\right)^{1/2} <$$
$$< A\sqrt{T}(\ln T)^{3/2}(\ln T)^4 = A\sqrt{T}(\ln T)^{11/2},$$

где в надлежащем месте использовано соотношение ([1], стр. 296)

(61) $$\sum_{1}^{x} \frac{d^2(n)}{n} = \frac{1}{4\pi^2}\ln^4 x + O(\ln^3 x).$$

Наконец, из (40), в силу (46), (49), (51), (56), (60) получаем оценку

(62) $$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} S_4 = O(T\ln^5 T).$$

7. Остается получить оценки для сумм

(63) $$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} S_1, \qquad \sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} S_3.$$

Из (27), в силу (15), (61),

(64) $$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} S_1 = O(N\ln^4 T) = O(T\ln^5 T).$$

Что же касается второй суммы в (63), то,

(65) $$\left|\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} S_3\right| < AN\sum \frac{d^2(n)}{n} < AT\ln^5 T.$$

Из (27), в силу (39), (62), (64), (65) получаем

(66) $$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} 4S = O(T\ln^5 T).$$

Теперь приступим к соотношению (26). В силу (15) имеем

(67) $$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} O(\ln^2\tilde{t}_\nu) = O(T\ln T\cdot\ln^2 T) = O(T\ln^3 T).$$

Для величины R (см. (26)), в силу (66), (67) (применяя неравенство Коши–Буняковского), получаем

$$(68)\quad \sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} R < A\left\{\sum_{\tilde{t}_\nu}\ln^2\tilde{t}_\nu\sum_{\tilde{t}_\nu}\left[\sum_n\frac{d(n)}{\sqrt{n}}\cos(\tilde{t}_\nu\ln n)\right]^2\right\}^{1/2} <$$
$$< A\left(T\ln^3 T\sum_{\tilde{t}_\nu}S\right)^{1/2} < A(T\ln^3 T\cdot T\ln^5 T)^{1/2} = AT\ln^4 T.$$

Наконец, из (26), в силу (66), (67), (68) получаем

$$(69)\quad \sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} Z^4(\tilde{t}_\nu) = O(T\ln^5 T),$$

т.е. (8). На этом доказательство леммы закончено.

Литература

[1] A. E. Ingham, *Mean-value theorems in the theory of the Riemann zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2), 27 (1926), стр. 273–300.
[2] Ян Мозер, *О законе Грама в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 32 (1977), стр. 107–113.
[3] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.
[4] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann (IV)*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 27. 5. 1977 (945)

ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Sur certaines suites uniformément équiréparties modulo 1

par

JEAN COQUET (Valenciennes)

1. Introduction

1.1. Notations. Soit q un entier naturel $\geqslant 2$. Dans cet article, $s(n)$ désigne la somme des chiffres de l'entier naturel n écrit en base q. Autrement dit, si $n = \sum_{r=0}^{+\infty} e_r(n)q^r$, où $\forall r\in \boldsymbol{N}$, $e_r(n)\in\{0,\ldots,q-1\}$, on a:

$$s(n) = \sum_{r=0}^{+\infty} e_r(n).$$

On définit, par récurrence sur k, les itérées de la fonction „somme des chiffres":

$$s^{(1)}(n) = s(n)$$

et

$$s^{(k+1)}(n) = s\big(s^{(k)}(n)\big)\quad \text{pour tout } k\in\boldsymbol{N}^*.$$

1.2. Résultats. On se propose de démontrer:

THÉORÈME 1. *Soit $(\lambda(n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite de nombres réels. Si la suite $(\lambda(n))$ est uniformément équiépartie modulo* 1 ([6]), *la suite $\big(\lambda(s(n))\big)$ l'est aussi.*

A l'aide de ce théorème, on obtient le résultat suivant, connu lorsque $k = 1$ ([1], [5] et [7]):

COROLLAIRE. *Pour tout $k\in\boldsymbol{N}^*$, la suite $(\alpha s^{(k)}(n))_{n\in\boldsymbol{N}}$ est équirépartie modulo* 1 *si et seulement si α est irrationnel.*

En effet, si α est rationnel, la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Si α est irrationnel, la suite (αn) est uniformément équirépartie modulo 1.

A l'aide du théorème, on obtient alors, par récurrence sur k, l'uniforme équirépartition de $(\alpha s^{(k)}(n))$.

L'utilisation de la notion d'équirépartition uniforme pour démontrer le corollaire et donc l'intérêt du théorème 1 seront justifiés par la proposition démontrée au paragraphe 3.2.