ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Une remarque sur les suites équiréparties à croissance lente

par

JEAN COQUET (Valenciennes)

1. Introduction

1.1. Un résultat de M. Mendès-France. Dans un article paru en 1968 [1], M. Mendès-France démontrait le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Soit φ une fonction réelle définie sur $\boldsymbol{N}$*(¹) *telle que: $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Il existe une suite d'entiers naturels $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ telle que:*

(1) $\lambda_n = O(\varphi(n))$, $n \to +\infty$,

(2) *la suite $x\Lambda$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si x est irrationnel.*

1.2. Ensemble normal. Soit $B \subset \boldsymbol{R}-\{0\}$. On rappelle que B est dit *normal* s'il existe une suite $\Theta = (\theta_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de réels telle que:

$x\Theta$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $x \in B$.

1.3. Généralisation du théorème 1. En utilisant une méthode différente de celle utilisée dans [1], on se propose de prouver la généralisation suivante du théorème 1:

THÉORÈME 2. *Soit B un ensemble normal et φ une fonction réelle, à valeurs $\geqslant 0$, définie sur $\boldsymbol{N}$, et telle que $\varphi(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$. Il existe une suite $\Lambda = (\lambda_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de réels telle que:*

(1) $0 \leqslant \lambda_n \leqslant \varphi(n)$ *pour tout* $n \in \boldsymbol{N}$,

(2) *la suite $x\Lambda$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $x \in B$.*

2. Démonstration du théorème 2. On construit Λ en utilisant une suite Θ telle que:

$$x\Theta \text{ équirépartie modulo } 1 \Leftrightarrow x \in B.$$

2.1. Remarque préliminaire. On peut se ramener au cas où φ est non décroissante. En effet, si $\psi(n) = \inf_{k\geqslant n} \varphi(k)$, on a:

(¹) $\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

(a) $\psi(n) \leqslant \varphi(n)$ pour tout $n \in N$,
(b) ψ est non décroissante,
(c) $\psi(n) \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.

Dans toute la suite, on supposera φ non décroissante.

2.2. Construction de la suite Λ. On construit Λ par „blocs”.

Soit $m_0 = \inf\{n|\,\varphi(n) \geqslant \theta_0\}$. Pour $n < m_0$ (si cela est possible), on pose:

$$\lambda_n = 0.$$

Soit $m_1 = \inf\{n|\ \varphi(n) \geqslant \theta_1, n \geqslant m_0+1\}$. Pour $n \in [m_0, \ldots, m_1-1]$, on pose:

$$\lambda_n = \theta_0.$$

On définit, par récurrence sur k, la suite (m_k) par:
$\forall k \geqslant 1,\ m_{k+1} = \inf\{n|\ \varphi(n) \geqslant \theta_{k+1},\ n \geqslant (1+k)m_k,\ n-m_k \equiv 0 \bmod k+1\}$ de sorte que la suite (m_k) est strictement croissante.

On pose, pour $n \in [m_k, m_{k+1}-1]$:

$$\lambda_n = \theta_j \quad \text{si} \quad n-m_k \equiv j \bmod k+1, \quad 0 \leqslant j \leqslant k.$$

2.3. Fin de la démonstration du théorème 2. Il est clair que $0 \leqslant \lambda_n \leqslant \varphi(n)$. Reste donc à prouver que:

$x\Theta$ est équirépartie modulo 1 si et seulement si $x\Lambda$ l'est.

2.3.1. *$x\Theta$ équirépartie $\Rightarrow$ $x\Lambda$ équirépartie.* Pour tout $z \in \boldsymbol{R}$, on pose $e(z) = e^{2i\pi z}$. Soit $h \in N^*$ fixé. On pose:

$$\varepsilon_k = \left|\frac{1}{k+1}\sum_{n=0}^{k} e(hx\theta_n)\right|.$$

D'après le critère de Weyl, $\varepsilon_k \underset{k\to+\infty}{\to} 0$.

Soit N un entier que nous supposerons $\geqslant m_1$. Il existe $k \geqslant 1$ tel que:

$$N \in [m_k, m_{k+1}-1].$$

De plus, il existe $s \in N$ tel que:

$$m_k + s(k+1) \leqslant N \leqslant m_k + (s+1)(k+1) - 1.$$

On a:

$$\sum_{n=0}^{N} e(hx\lambda_n) = m_0 + \sum_{0\leqslant j\leqslant k-1} (m_{j+1}-m_j)\frac{1}{j+1}\sum_{p=0}^{j} e(hx\theta_p) + \\ + s\sum_{p=0}^{k} e(hx\theta_p) + \sum_{0\leqslant p\leqslant N-m_k-s(k+1)} e(hx\theta_p).$$

Par conséquent,

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e(hx\lambda_n)\right| \leqslant m_0 + \sum_{j=0}^{k-1}(m_{j+1}-m_j)\varepsilon_j + s(k+1)\varepsilon_k + (N-m_k-s(k+1)+1)$$
$$\leqslant m_0 + \sum_{j=0}^{k-1}(m_{j+1}-m_j)\varepsilon_j + N\varepsilon_k + (k+1).$$

Fixons $r \in [1, \ldots, k-1]$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} e(hx\lambda_n)\right| \leqslant m_0 + \sum_{j=0}^{r-1}(m_{j+1}-m_j)\varepsilon_j + (m_k-m_r)\max_{j\geqslant r}(\varepsilon_j) + N\varepsilon_k + (1+k)$$
$$\leqslant m_r + (k+1) + 2N\max_{j\geqslant r}\varepsilon_j.$$

Donc, en tenant compte du fait que: $\dfrac{k+1}{m_k} \underset{k\to+\infty}{\to} 0$, on obtient:

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}}\frac{1}{N+1}\left|\sum_{n=0}^{N} e(hx\lambda_n)\right| \leqslant 2\max_{j\geqslant r}\varepsilon_j \quad \text{quel que soit } r \geqslant 1.$$

Finalement,

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} e(hx\lambda_n) \underset{N\to+\infty}{\to} 0.$$

2.3.2. *$x\Theta$ non équirépartie $\Rightarrow$ $x\Lambda$ non équirépartie.* Il existe $h_0 \in N^*$, il existe $\alpha > 0$ tels que:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k+1}\left|\sum_{n=0}^{k} e(h_0x\theta_n)\right| \geqslant \alpha \quad \text{pour une infinité d'indices } k.$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} e(h_0x\lambda_n) = \sum_{n=0}^{m_k-1} e(h_0x\lambda_n) + (m_{k+1}-m_k)\frac{1}{k+1}\sum_{p=0}^{k} e(h_0x\theta_p).$$

Donc,

$$\frac{1}{m_{k+1}}\left|\sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} e(h_0x\lambda_n)\right| \geqslant \frac{m_{k+1}-m_k}{m_{k+1}}\varepsilon_k - \frac{m_k}{m_{k+1}} \geqslant \varepsilon_k - \frac{2m_k}{m_{k+1}} \geqslant \varepsilon_k - \frac{2}{k+1}.$$

Et,

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\frac{1}{m_{k+1}}\left|\sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} e(h_0x\lambda_n)\right| \geqslant \alpha.$$

$x\Lambda$ n'est pas équirépartie.

3. Remarque. On peut montrer avec la même construction, en modifiant légèrement les calculs du 2.3 que les suites $x\Lambda$ et $x\Theta$ sont simultanément uniformément équiréparties ou complètement équiréparties ou pseudo-aléatoires. Cette construction permet en particulier de donner des exemples de suites complètement équiréparties à croissance lente.

Bibliographie

[1] M. Mendès-France, *Deux remarques concernant l'équirépartition des suites*, Acta Arith. 14 (1968), p. 163–167.

Reçu le 5. 5. 1977
et dans la forme modifiée le 19. 9. 1977 (936)

ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Доказательство гипотезы Е. К. Титчмарша в теории дзета-функции Римана

Ян Мозер (Братислава)

1. Пусть ([3], стр. 94, 383)

$$Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(\tfrac{1}{2}+it),\qquad \vartheta(t) = \frac{t}{2}\ln\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + O\left(\frac{1}{t}\right). \tag{1}$$

Пусть, дальше, $\{t_\nu\}$ обозначает последовательность значений определенных соотношением

$$\vartheta(t_\nu) = \pi\nu, \tag{2}$$

где ν — целое положительное.

Е. К. Титчмарш, в работе [4], стр. 105, высказал следующую гипотезу

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z^2(t_\nu)Z^2(t_{\nu+1}) = O(N\ln^4 N) \tag{3}$$

(где M — постоянное число).

В этой работе покажем, что имеет место

Теорема.

$$\sum_{\nu=M+1}^{N} Z^2(t_\nu)Z^2(t_{\nu+1}) = O(N\ln^4 N). \tag{4}$$

Введем последовательность $\{\tilde{t}_\nu\}$ согласно условию

$$\vartheta(\tilde{t}_\nu) = \frac{\pi}{2}\nu. \tag{5}$$

Основой доказательства оценки (4) является следующая

Лемма.

$$\sum_{t_{M+1}\leqslant\tilde{t}_\nu\leqslant T} Z^4(\tilde{t}_\nu) = O(T\ln^5 T). \tag{6}$$