ACTA ARITHMETICA
XXXVI (1980)

Über das Mordellsche Umkehrproblem für den Minkowskischen Linearformensatz

von

G. Ramharter (Wien)

1. Einleitung. Wir befassen uns im folgenden mit dem von Mordell [9] 1936 gestellten Umkehrproblem für den Minkowskischen Linearformensatz. Zum besseren Verständnis wird gleich eine geometrische Fassung des Problems angegeben. Es sei G ein Gitter des R^n mit der Determinante $d(G)$. P sei stets ein bezüglich des Ursprungs $\mathbf{0}$ symmetrisches, abgeschlossenes und achsenparalleles Parallelepiped vom Volumen $V(P)$. Wir bezeichnen P als *frei* (bezüglich G), wenn das Innere von P außer $\mathbf{0}$ keinen weiteren Punkt von G enthält. Es sei

$$(1) \qquad k(G) := \sup\{2^{-n}V(P)/d(G) \mid P \text{ frei bezüglich } G\}.$$

Dann sind die nur von der Dimension n abhängigen Konstanten

$$(2) \qquad k_n := \inf\{k(G) \mid G \text{ Gitter des } R^n\}$$

gesucht. Aus einem Resultat von Hlawka [5] folgt

$$k_n \geqslant \frac{n}{(n!)^2 2^{n(n+1)/2}}.$$

Eine bessere, für alle n gültige Abschätzung ist bis heute nicht bekannt. Nach Arbeiten von Szekeres [13], Szüsz [15], Surányi [11], [12] und Gruber [3], [4] gilt

$$k_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = 0{,}723\ldots$$

Die Beweise der ersten drei Autoren beruhen auf einer geometrischen Interpretation des Kettenbruchalgorithmus, die auf Klein und Minkowski zurückgeht. Die Arbeit von Gruber enthüllt dagegen einen Zusammenhang mit dem homogenen Minimum $\lambda(G) := \inf\{|x_1x_2| \mid \boldsymbol{x} \in G \setminus \{\mathbf{0}\}\}$.

Für die Dimensionen $n \geqslant 3$ ist k_n nicht bekannt. Szekeres [14] zeigte unter Heranziehung einer Bemerkung von Erdös und Grünwald $k_3 > 1/4$, Ko [6] gab dafür einen arithmetischen Beweis. Gruber [3] erledigte den

Fall der dreidimensionalen Gitter mit (analog definiertem) homogenem Minimum $\lambda(G) = 0$. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Fall $n = 3$. Zunächst wird das kritische Gitter G^* des Bereichs $\{x \in R^3 \mid |x_1 x_2 x_3| \leqslant 1\}$ untersucht und $k^* = k(G^*) = (8/7)\cos^2(\pi/7)\cos(2\pi/7) = 0{,}578\ldots$ gezeigt (Satz 1). k^* ist eine obere Schranke für k_3. Anschließend wird bewiesen, daß k^* zumindest lokal auch eine untere Schranke für k_3 darstellt und zwar in folgendem Sinn: Für alle Gitter G einer passenden Umgebung von G^* gilt $k(G) \geqslant k(G^*)$ (Satz 2). Durch dieses Resultat wird die Vermutung von Gruber gestützt, daß k^* schon mit k_3 zusammenfällt.

2. Das Minkowskische Verfahren für extremale Parallelepipede. Es sei nun G ein Gitter des R^3 mit homogenem Minimum $\lambda(G) = \inf\{|x_1 x_2 x_3| \mid x \in G\setminus\{\mathbf{0}\}\}$. Ersichtlich ist jedesb ezüglich G freie achsenparallele Parallelepiped mit $\mathbf{0}$ als Mittelpunkt in einem (nicht immer eindeutig bestimmten) freien enthalten, das im relativen Inneren seiner Seitenflächen jeweils (mindestens) einen Gitterpunkt enthält. Ein solches Parallelepiped wollen wir *extremal* (bezüglich G) nennen. Der Wert des Supremums in (1) ändert sich demnach nicht, wenn man „frei" durch „extremal" ersetzt. Zur Bestimmung von $k(G)$ genügt also die Kenntnis des Systems der bezüglich G extremalen Parallelepipede. Ein Algorithmus zu dessen Auffindung aus einem gegebenen ersten Parallelepiped wurde bereits von Minkowski angegeben (vgl. [16], dort insbesondere eine Korrektur S. 1245). Furtwängler und Zeisel [2] haben später das Problem der Auffindung eines ersten extremalen Parallelepipeds aus einer Basis eines gegebenen Gitters behandelt. Wir geben eine Beschreibung des Minkowskischen Verfahrens, wobei wir der Einfachheit halber voraussetzen wollen, daß das vorgelegte Gitter G keinen Punkt mit den Koordinatenebenen gemein hat, eine Einschränkung, die sich mit etwas größerem Aufwand leicht beseitigen läßt (vgl. [2]). Es sei also P ein bezüglich G extremales Parallelepiped. Auf Grund unserer Voraussetzung über G kann auf einer achsenparallelen Ebene nicht mehr als ein Gitterpunkt liegen, daher enthält der Rand $\operatorname{bd} P$ von P genau drei Gitterpunktpaare $\pm \mathbf{x}_j = \pm(x_{1j}, x_{2j}, x_{3j})^t \in G\setminus\{\mathbf{0}\}$, $j = 1, 2, 3$ (Vektoren sind hier wie im folgenden stets als Spaltenvektoren aufzufassen). Die Indizierung sei von nun an stets so gewählt, daß $\pm\mathbf{x}_j$ im relativen Inneren derjenigen Seitenflächen von P liegen, welche normal zur j-Achse stehen. Es folgt

(3) $$|x_{ii}| = \max\{|x_{i1}|, |x_{i2}|, |x_{i3}|\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Durch P wird bis auf die Wahl der Spaltenvorzeichen eindeutig eine Matrix $X = (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3)$ bestimmt, für die neben (3) folgende Beziehungen gelten:

(4) $$\mathbf{x}_j \in (G\setminus\{\mathbf{0}\}) \cap \operatorname{bd} P, \quad j = 1, 2, 3,$$

(5) $$\mathbf{z} \in G\setminus\{\mathbf{0}\} \Rightarrow \max_{i=1,2,3}\{|z_i| - |x_{ii}|\} \geqslant 0.$$

Umgekehrt bestimmt natürlich jede Matrix mit den Eigenschaften (3)–(5) ein extremales Parallelepiped P. Stimmen zwei Matrizen X, Y bis auf die Spaltenvorzeichen überein, so schreiben wir

$$X \mathrel{\hat{=}} Y.$$

Auf Grund der beschriebenen (bis auf Spaltenvorzeichen) eineindeutigen Zuordnung zu extremalen Parallelepipeden dürfen wir von nun an von extremalen Matrizen sprechen. Dem Übergang zu benachbarten Parallelepipeden entsprechen nun drei Operationen $\mathfrak{T}^1, \mathfrak{T}^2, \mathfrak{T}^3$ in der Menge der bezüglich G extremalen Matrizen:

$\mathfrak{T}^1$: Es sei $X = (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3)$ eine extremale Matrix und P das zugeordnete Parallelepiped mit Seitenflächen $\pm F_j$. Es gelte $\mathbf{x}_j \in F_j$, $j = 1, 2, 3$. Wir komprimieren P, indem wir seine Seitenflächen $\pm F_1$ parallel zur Ausgangslage und symmetrisch zu $\mathbf{0}$ solange nach innen verschieben, bis mindestens eines der Gitterpunktpaare $\pm\mathbf{x}_2$ bzw. $\pm\mathbf{x}_3$ darauf zu liegen kommt. Wegen der Annahme über G kann nur eines dieser Gitterpunktpaare darauf liegen. Aus demselben Grund tritt bei der folgenden Fallunterscheidung Gleichheit nicht auf:

Fall 1: $|x_{12}| > |x_{13}|$. Bezeichnen wir die Seitenflächen des so erhaltenen freien, nichtextremalen Parallelepipeds P' mit $\pm F_j'$, dann ist offenbar $\mathbf{x}_3$ im relativen Inneren $\operatorname{relint} F_3'$ von F_3', jedoch ist $\operatorname{relint} F_2'$ nun gitterpunktfrei. Wir expandieren jetzt P', indem wir die Seitenflächen $\pm F_2'$ parallel solange nach außen verschieben, bis wir an ein Gitterpunktpaar $\pm\mathbf{x}_2'$ stoßen. Dies wird stets der Fall sein, da nach dem Minkowskischen Fundamentalsatz im Bereich $\{z \in R^3 \mid |z_1| < |x_{12}|, |z_3| < |x_{33}|\}$ jedenfalls Gitterpunkte liegen. Nach Annahme über G gibt es dort wiederum genau einen Gitterpunkt $\mathbf{x}_2'$ mit $x_{22}' > 0$ und minimalem x_{22}'. Setzen wir $\mathfrak{T}^1_2(X) := (\mathbf{x}_1' \mathbf{x}_2' \mathbf{x}_3')$ mit $\mathbf{x}_1' := (\operatorname{sgn} x_{12})\mathbf{x}_2$ und $\mathbf{x}_3' := (\operatorname{sgn} x_{33})\mathbf{x}_3$, so haben wir eine neue extremale Matrix mit positiven Diagonalelementen erhalten.

Fall 2: $|x_{13}| > |x_{12}|$. Hier ist $\mathbf{x}_2$ noch im relativen Inneren der Seitenfläche F_2' des komprimierten Parallelepipeds P', hingegen ist $\operatorname{relint} F_3'$ gitterpunktfrei. Wir expandieren dementsprechend P', indem wir die Seitenflächen $\pm F_3'$ parallel solange nach außen verschieben, bis wir an ein Gitterpunktpaar $\pm\mathbf{x}_3'$ mit $x_{33}' > 0$ und minimalem x_{33}' stoßen. Die neue extremale Matrix lautet jetzt $\mathfrak{T}^1_3(X) := (\mathbf{x}_1' \mathbf{x}_2' \mathbf{x}_3')$ mit $\mathbf{x}_1' := (\operatorname{sgn} x_{13})\mathbf{x}_3$ und $\mathbf{x}_2' = (\operatorname{sgn} x_{22})\mathbf{x}_2$.

In jedem Fall wird X in eindeutiger Weise eine extremale Matrix $\mathfrak{T}^1(X)$ ($:= \mathfrak{T}^1_2(X)$ im Fall 1, $:= \mathfrak{T}^1_3(X)$ im Fall 2) mit positiven Diagonalelementen zugeordnet. Wir nennen das zu $T^1(X)$ gehörige Parallelepiped den 1-Nachbarn des ursprünglich gegebenen. Fallweise werden wir durch den tiefgestellten Index im Sinne der Fallunterscheidung verdeutlichen, in welche Richtung bei der Nachbarbildung expandiert wurde.

$\mathfrak{T}^2, \mathfrak{T}^3$: Auf analoge Art werden die Operationen $\mathfrak{T}^2$ und $\mathfrak{T}^3$ erklärt, wobei jeweils wieder die Fälle $\mathfrak{T}^2_1, \mathfrak{T}^2_3$ und $\mathfrak{T}^3_1, \mathfrak{T}^3_2$ auftreten können. Ausgehend von einer beliebigen extremalen Matrix erhält man durch fortgesetzte Anwendung solcher Operationen $\mathfrak{T}^i$ eine Kette von extremalen Matrizen im vorgelegten Gitter. Nach Minkowski ([8], S. 283) erhält man auf diese Art bereits alle extremalen Matrizen. Wir formulieren dieses Resultat als

Hilfssatz 1 (Minkowski). *Es sei G ein Gitter des R^3, ferner seien X, Y zwei beliebige bezüglich G extremale Matrizen. Dann kann man eine Folge von Operationen angeben, sodaß $Y \triangleq \mathfrak{T}^{i_1} \ldots \mathfrak{T}^{i_n}(X)$ ist.*

Die folgenden einfachen Aussagen über die Operationen $\mathfrak{T}^i$ fassen wir zusammen im

Hilfssatz 2. *Es sei G ein Gitter des R^3 und X, Y seien zwei extremale Matrizen. Dann gilt*

(a) $\mathfrak{T}^j\mathfrak{T}^i_j(X) = \mathfrak{T}^j_i(\mathfrak{T}^i_j(X)) \triangleq X$, $i = 1, 2, 3$; *j so, daß $\mathfrak{T}^i_j$ existiert.*

(b) $X \triangleq Y \Rightarrow \mathfrak{T}^i(X) = \mathfrak{T}^i(Y)$, $i = 1, 2, 3$.

(c) *Es sei $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, d_3)$ eine Diagonalmatrix mit $d_i \neq 0$ und $G' := DG$. Dann ist $X' := DX$ extremal bezüglich G' und es gilt $\mathfrak{T}^i(DX) \triangleq D\mathfrak{T}^i(X)$, $i = 1, 2, 3$.*

(d) *Es sei φ eine Permutation von $\{1, 2, 3\}$, $P = (p_{ij})$ die Permutationsmatrix mit $p_{ij} = 1$ für $\varphi(i) = j$, $p_{ij} = 0$ sonst, ferner sei $G' := PG$. Dann ist $X' := PXP^t$ extremal in G' und es gilt*

$$P\mathfrak{T}^i_j(X)P^t = \mathfrak{T}^r_s(PXP^t) \quad \textit{mit} \quad r := \varphi^{-1}(i),\ s := \varphi^{-1}(j).$$

3. Die Bestimmung von $k(G^*)$. Bei der Untersuchung von Gittern mit $\lambda(G) > 0$ kann man sich wegen der Diagonalinvarianz von $k(G)$ auf solche mit $\lambda(G) = 1$ beschränken. Nach Davenport gilt für diese Gitter $d(G) \geqslant 7$, wobei Gleichheit bis auf Diagonaläquivalenz genau für ein Gitter G^* — das für den Sternkörper $\{\boldsymbol{x} \in R^3 |\ |x_1x_2x_3| \leqslant 1\}$ kritische Gitter besteht. Wir zeigen den

Satz 1. *Es ist*

$$k(G^*) = \frac{8}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} = 0{,}578\ldots.$$

Zunächst beschreiben wir das System der extremalen Parallelepipede in G^* in einer Form, wie sie für das Hauptresultat im nächsten Abschnitt benötigt wird. In der Bezeichnungsweise halten wir uns im wesentlichen an Cassels [1], S. 273. Danach bilden die Spaltenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_1 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{pmatrix}$$

eine (nichtextremale) Basis von G^*. Dabei sind c_1, c_2, c_3 die drei Lösungen der Gleichung $c^3 - c^2 - 2c + 1 = 0$ und es gilt

$$(6)\qquad c_1 = -2\cos\frac{2\pi}{7} = -1{,}24\ldots,\qquad c_2 = -2\cos\frac{4\pi}{7} = 0{,}44\ldots,$$
$$c_3 = -2\cos\frac{6\pi}{7} = 1{,}80\ldots.$$

Die c_i sind ganzalgebraische Zahlen in dem durch die obige Gleichung bestimmten totalreellen kubischen Zahlenkörper. Wir stellen einige für das weitere benötigte einfach verifizierbare Bezeichungen zwischen den c_i zusammen: es gilt

$$(7\text{a, b})\qquad c_1 + c_2 + c_3 = 1,\qquad c_1c_2c_3 = -1,$$

$$(8)\qquad c_1^2 = 2 - c_2,\qquad c_2^2 = 2 - c_3,\qquad c_3^2 = 2 - c_1,$$

$$(9)\qquad c_1^{-1} = -c_2c_3 = 1 - c_3,\ c_2^{-1} = -c_3c_1 = 1 - c_1,\ c_3^{-1} = -c_1c_2 = 1 - c_2.$$

Transformation von A mit der unimodularen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

liefert eine neue Basis $X = AM$, die wir unter Verwendung von (7) und (9) in der Form schreiben

(10)
$$X = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 1-c_1 & -c_3 & 1 \\ 1-c_2 & -c_1 & 1 \\ 1-c_3 & -c_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2^{-1} & -c_3 & 1 \\ c_3^{-1} & -c_1 & 1 \\ c_1^{-1} & -c_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}24 & -1{,}80 & 1 \\ 0{,}55 & 1{,}24 & 1 \\ -0{,}80 & -0{,}44 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man unschwer nachprüft, liegt keiner der Punkte $\sum_{j=1}^{3} u_j\boldsymbol{x}_j \neq \boldsymbol{0}$ $(u_j \in \{-1, 0, 1\})$ im Inneren des durch X bestimmten achsenparallelen Parallelepipeds P, ferner ist P ganz im Inneren des Parallelepipeds $\operatorname{conv}\{\sum_{j=1}^{3} u_j\boldsymbol{x}_j |\ |u_j| \leqslant 2\}$ enthalten. Daraus folgt, daß P (und damit X) extremal ist.

Hilfssatz 3. *Die Kette der Nachbarn von X (vgl. (10)) besteht genau aus den Matrizen der Form $\Phi^m\Psi^n\Theta^p\mathfrak{T}^i(X)$, $m, n, p \in \boldsymbol{Z}$, $i \in \{0, 1\}$, wobei wir $\mathfrak{T}^0(X) = X$ vereinbaren und*

$$(11)\qquad \Phi := \operatorname{diag}(c_2, c_3, c_1),\qquad \Psi := \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3),\qquad \Theta := \operatorname{diag}(c_3, c_1, c_2)$$

setzen.

Beweis. Es sei φ die Permutation von $\{1, 2, 3\}$ mit der Zyklendarstellung $(1, 3, 2)$ und

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Permutationsmatrix mit $p_{ij} = 1$ für $\varphi(i) = j$ und $p_{ij} = 0$ sonst. Wie man sofort sieht, gelten folgende Beziehungen:

$$\text{(12a, b, c)} \qquad \Phi = P\Theta P^t, \quad \Psi = P\Phi P^t, \quad \Theta = P\Psi P^t,$$

daher wegen $P^t = P^{-1}$ auch

$$\text{(13a, b, c)} \qquad \Theta = P^t\Phi P, \quad \Phi = P^t\Psi P, \quad \Psi = P^t\Theta P.$$

Wir bestimmen zunächst den Nachbarn $\mathfrak{T}^1(X)$. Mit Hilfe des Minkowskischen Algorithmus ([8], S. 285, Fall IV 2) erhält man ausgehend von (10)

$$\text{(14)} \quad \mathfrak{T}^1(X) = \mathfrak{T}_2^1(X) = X\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =: XU_1 = \begin{pmatrix} c_3 & c_1^{-1} & 1 \\ c_1 & c_2^{-1} & 1 \\ c_2 & c_3^{-1} & 1 \end{pmatrix} =: X_2^1.$$

Für das weitere benötigen wir zwei Identitäten. Es gilt (vgl. (10), (9), (11a))

$$\text{(15)} \quad PXP^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_2^{-1} & -c_3 & 1 \\ c_3^{-1} & -c_1 & 1 \\ c_1^{-1} & -c_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c_1^{-1} & -c_2 \\ 1 & c_2^{-1} & -c_3 \\ 1 & c_3^{-1} & -c_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} c_2 & & \\ & c_3 & \\ & & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_2^{-1} & -c_3 & -1 \\ c_3^{-1} & -c_1 & -1 \\ c_1^{-1} & -c_2 & -1 \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \Phi X$$

sowie wegen (13a) und (15)

$$\text{(16)} \qquad P^tXP = (P^t\Phi^{-1}P)(P^t\Phi XP) \mathrel{\hat{=}} \Theta^{-1}P^tPXP^tP = \Theta^{-1}X.$$

Wir sind nun in der Lage, die beiden anderen Nachbarn von X anzugeben. Nach Hilfssatz 2(d)(c) und (15) ist

$$P\mathfrak{T}_2^1(X)P^t = \mathfrak{T}_3^2(PXP^t) = \mathfrak{T}_3^2(\Phi X) \mathrel{\hat{=}} \Phi\mathfrak{T}_3^2(X),$$

daher wegen (11a), (14), (11b) und (9)

$$\text{(17)} \qquad X_3^2 := \mathfrak{T}_3^2(X) \mathrel{\hat{=}} \Phi^{-1}PX_2^1P^t = \begin{pmatrix} c_2^{-1} & 1 & (c_2c_3)^{-1} \\ c_3^{-1} & 1 & (c_3c_1)^{-1} \\ c_1^{-1} & 1 & (c_1c_2)^{-1} \end{pmatrix} \mathrel{\hat{=}} \Psi X_2^1.$$

Zur Permutation φ^{-1} gehört die Permutationsmatrix $P^{-1} = P^t$, wir erhalten wiederum mit Hilfssatz 2(d), (c) und (16)

$$P^t\mathfrak{T}_2^1(X)P = \mathfrak{T}_1^3(P^tXP) = \mathfrak{T}_1^3(\Theta^{-1}X) \mathrel{\hat{=}} \Theta^{-1}\mathfrak{T}_1^3(X)$$

und daraus mittels (13b), (17) und (13a)

$$\text{(18)} \qquad X_1^3 := \mathfrak{T}_1^3(X) \mathrel{\hat{=}} \Theta P^tX_2^1P = \Theta(P^t\Psi^{-1}P)(P^t\Psi X_2^1P)$$
$$\mathrel{\hat{=}} \Theta\Phi^{-1}P^t\Phi^{-1}PX_2^1P^tP \mathrel{\hat{=}} \Theta\Phi^{-1}\Theta^{-1}X_2^1 = \Phi^{-1}X_2^1.$$

Wir setzen den Prozeß der Nachbarbildung fort, indem wir auf jede der in (14), (17) und (18) erhaltenen Matrizen nocheinmal die Transformationen $\mathfrak{T}^1$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^3$ anwenden. Zunächst ergibt sich mit Hilfssatz 2(a), (b), (c) bei Berücksichtigung von (18) und (17)

$$\text{(19)} \qquad \Phi X \mathrel{\hat{=}} \Phi\mathfrak{T}_3^1\big(\mathfrak{T}_1^3(X)\big) \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{T}_3^1\big(\Phi\mathfrak{T}_1^3(X)\big) = \mathfrak{T}_3^1\big(\mathfrak{T}_2^1(X)\big),$$

$$\text{(20)} \qquad \Psi X \mathrel{\hat{=}} \Psi\mathfrak{T}_1^2\big(\mathfrak{T}_2^1(X)\big) \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{T}_1^2\big(\Psi\mathfrak{T}_2^1(X)\big) = \mathfrak{T}_1^2\big(\mathfrak{T}_3^2(X)\big).$$

Die Beziehung (7b) zeigt, daß gilt

$$\text{(21)} \qquad \Phi\Psi\Theta = -I \mathrel{\hat{=}} I.$$

Damit ergibt sich aus (17) und (18) sukzessive

$$\Theta\mathfrak{T}_3^2(X) \mathrel{\hat{=}} \Phi^{-1}\Psi^{-1}\mathfrak{T}_3^2(X) \mathrel{\hat{=}} \Phi^{-1}\mathfrak{T}_2^1(X) \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{T}_1^3(X)$$

und daraus wiederum mit Hilfssatz 2(a), (b), (c)

$$\text{(22)} \qquad \Theta X \mathrel{\hat{=}} \Theta\mathfrak{T}_2^3\big(\mathfrak{T}_3^2(X)\big) \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{T}_2^3\big(\Theta\mathfrak{T}_3^2(X)\big) = \mathfrak{T}_2^3\big(\mathfrak{T}_1^3(X)\big).$$

Nunmehr erhalten wir jeweils aus (19), (20) bzw. (22) mit Hilfe von Hilfssatz 2(a), (b), (c)

$$\text{(23)} \quad \Phi^{-1}X \mathrel{\hat{=}} \Phi^{-1}\mathfrak{T}_1^2(\mathfrak{T}_1^3(\mathfrak{T}_3^1(\mathfrak{T}_2^1(X)] \mathrel{\hat{=}} \Phi^{-1}\mathfrak{T}_1^2\big(\mathfrak{T}_1^3(\Phi X)\big) \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{T}_1^2\big(\mathfrak{T}_1^3(X)\big),$$

$$\text{(24)} \quad \Psi^{-1}X \mathrel{\hat{=}} \Psi^{-1}\mathfrak{T}_2^3(\mathfrak{T}_2^1(\mathfrak{T}_1^2(\mathfrak{T}_3^2(X)] \mathrel{\hat{=}} \Psi^{-1}\mathfrak{T}_2^3\big(\mathfrak{T}_2^1(\Psi X)\big) \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{T}_2^3\big(\mathfrak{T}_2^1(X)\big),$$

$$\text{(25)} \quad \Theta^{-1}X \mathrel{\hat{=}} \Theta^{-1}\mathfrak{T}_3^1(\mathfrak{T}_3^2(\mathfrak{T}_2^3(\mathfrak{T}_1^3(X)] \mathrel{\hat{=}} \Theta^{-1}\mathfrak{T}_3^1\big(\mathfrak{T}_3^2(\Theta X)\big) \mathrel{\hat{=}} \mathfrak{T}_3^1\big(\mathfrak{T}_3^2(X)\big).$$

Wir haben damit die sechs Nachbarn von X_2^1, X_3^2, X_1^3 bestimmt. (Die offenen Fälle erledigen sich nach Hilfssatz 2(a) trivial:

$$\mathfrak{T}^2X_2^1 = \mathfrak{T}^3X_3^2 = \mathfrak{T}^1X_1^3 \mathrel{\hat{=}} X.)$$

X_2^1 ist nach (14) singulär, wegen $\Phi\Psi\Theta \mathrel{\hat{=}} I$ (vgl. (21)) sind daher auch $X_3^2 \mathrel{\hat{=}} \Psi X_2^1$ und $X_1^3 \mathrel{\hat{=}} \Phi^{-1}X_2^1$ (vgl. (17), (18)) singulär. Aus (19) bis (25) erkennt man, daß mit X auch die nächsten Nachbarn extremale Basen von G^* sind, es gibt daher unimodulare Transformationsmatrizen U, V, W, sodaß gilt

$$\text{(26a)} \quad \mathfrak{T}_3^1\mathfrak{T}_2^1(X) \mathrel{\hat{=}} \Phi X = XU, \quad \mathfrak{T}_1^2\mathfrak{T}_3^2(X) \mathrel{\hat{=}} \Psi X = XV,$$
$$\mathfrak{T}_2^3\mathfrak{T}_1^3(X) \mathrel{\hat{=}} \Theta X = XW,$$

$$\text{(26b)} \quad \mathfrak{T}_1^2\mathfrak{T}_1^3(X) \mathrel{\hat{=}} \Phi^{-1}X = XU^{-1}, \quad \mathfrak{T}_2^3\mathfrak{T}_2^1(X) \mathrel{\hat{=}} \Psi^{-1}X = XV^{-1},$$
$$\mathfrak{T}_3^1\mathfrak{T}_3^2(X) \mathrel{\hat{=}} \Theta^{-1}X = XW^{-1}.$$

Beachtet man (10) und die Definitionen (11) für Φ, Ψ, Θ, so läßt sich ohne Schwierigkeit mit den Beziehungen (7) bis (9) bestätigen

$$(27)\qquad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berücksichtigt man die Regel $\mathfrak{T}(DX) \mathrel{\hat{=}} D\mathfrak{T}(X)$ (Hilfssatz 2(c)), so zeigen die Ergebnisse (17), (18) und (26), daß fortgesetzte Anwendung beliebiger Operationen $\mathfrak{T}^i$ ausgehend von X stets – bis auf Spaltenvorzeichen – auf Matrizen der Form $\Phi^m\Psi^n\Theta^p X$ bzw. $\Phi^m\Psi^n\Theta^p X^1$, $m, n, p \in \mathbf{Z}$, führt und daß jede Matrix dieser Form als Ergebnis der Hintereinanderausführung einer geeigneten Folge von Operationen erhalten werden kann. Damit ist Hilfssatz 3 bewiesen.

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 1. Nach den Hilfssätzen 1 und 3 gibt es in G^* nur zwei Typen von extremalen Matrizen, nämlich solche mit regulärer Matrix $\Phi^m\Psi^n\Theta^p X$ und andere mit singulärer Matrix $\Phi^m\Psi^n\Theta^p X^1$. Wegen (7b) (vgl. auch (11)) treten nur zwei Werte für die Volumina auf, nämlich (vgl. (10), (14))

$$(28\text{a})\qquad V(\Phi^m\Psi^n\Theta^p P^0) = V(P^0) = 2^3\cdot c_2^{-1}(-c_1)\cdot 1,$$

$$(28\text{b})\qquad V(\Phi^m\Psi^n\Theta^p P^1) = V(P^1) = 2^3\cdot c_3 c_2^{-1}\cdot 1.$$

Dabei haben wir mit P^0 bzw. P^1 das zu X bzw. X^1 gehörige extremale Parallelepiped bezeichnet. Nun ist nach (6) $c_3 > -c_1$, daher folgt aus (1) und (28)

$$(29)\qquad k(G^*) = \sup\left\{\frac{1}{8}\,\frac{V(P)}{d(G^*)} \mid P \text{ extremal bezüglich } G^*\right\}$$

$$= \frac{1}{8}\max\left\{\frac{V(P^0)}{7}, \frac{V(P^1)}{7}\right\} = \frac{1}{8}\,\frac{V(P^1)}{7} = \frac{1}{7}c_3c_2^{-1}.$$

Unter Benützung von (6) und (7b) läßt sich dies in der behaupteten Form

$$k(G^*) = \frac{1}{7}c_3^2|c_1| = \frac{8}{7}\cos^2\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$$

schreiben. Damit ist der Beweis von Satz 1 erbracht.

4. Das lokale Verhalten von $k(G)$ in einer Umgebung von G^*. Es sei $\|\cdot\|$ die durch $\|A\| = \max\limits_{i,k}|a_{ik}|$ in der Menge der (3×3)-Matrizen erklärte Norm. In der Menge $\mathfrak{L}_3$ der Gitter des R^3 führen wir die übliche Topologie ein (vgl. Lekkerkerker [7], S. 124); es sei $G \in \mathfrak{L}_3$, A eine Basis von G und $\varepsilon > 0$; als ε-Umgebung von G bezeichnen wir die Menge der Gitter BZ^3 mit $\|B - A\| < \varepsilon$. Wir beweisen folgenden

Satz 2. *Die Funktion $k\colon \mathfrak{L}_3 \to [k_3, 1]$ nimmt für das kritische Gitter G^* ein lokales Minimum an (genauer: es gibt eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von G^*, sodaß*

$$k(G^*) < k(G)$$

für alle Gitter $G \in \mathfrak{U}$, die nicht diagonaläquivalent zu G^* sind).

Beweis. Es genügt, für eine bestimmte Basis X von G^* die Existenz eines $\varepsilon > 0$ nachzuweisen, sodaß für alle Gitter aus der ε-Umgebung von G^*, die nicht von der Form DG^* sind, gilt $k(G) > k(G^*)$. Wir haben im vorigen Abschnitt gefunden (vgl. (10)), daß

$$(31)\qquad X = (\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3) = \begin{pmatrix} 1-c_1 & -c_3 & 1 \\ 1-c_2 & -c_1 & 1 \\ 1-c_3 & -c_2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine extremale Basis in G^* ist. Sei nun wieder P^1 das zu $X^1 = T^1(X)$ gehörige Parallelepiped. Dann gilt, wie man sich mit Hilfe der Beziehungen (28b) sowie (7) und (9) des Abschnitts 3 überzeugt,

$$(32)\qquad V^* := V(P^1\cap R^3_+) = c_3c_2^{-1} = c_2 + 2c_3,$$

$$(33)\qquad d^* := d(G^*) = 7,$$

$$(34)\qquad k^* := k(G^*) = V^*/d^* = (c_2 + 2c_3)/7.$$

Wegen der Diagonalinvarianz von k genügt es, Gitter $G(\varepsilon)$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6) \in R^6$, $\max\{|\varepsilon_i|\}$ hinreichend klein, zu betrachten, die eine Basis

$$(35)\qquad X(\varepsilon) = (\tilde{\boldsymbol{x}}_1\ \tilde{\boldsymbol{x}}_2\ \tilde{\boldsymbol{x}}_3) = \begin{pmatrix} (1-c_1)+\varepsilon_1 & -c_3+\varepsilon_4 & 1 \\ (1-c_2)+\varepsilon_2 & -c_1+\varepsilon_5 & 1 \\ (1-c_3)+\varepsilon_3 & -c_2+\varepsilon_6 & 1 \end{pmatrix}$$

besitzen (vgl. (1)). Sei $d\colon R^6 \to R$ definiert durch

$$\begin{aligned} d(\varepsilon) := \det(X(\varepsilon)) &= c_1(c_1 - c_3) + c_2(c_2 - c_1) + c_3(c_3 - c_2) + \\ &\quad + \varepsilon_1(-c_1 + c_2) + \varepsilon_2(-c_2 + c_3) + \varepsilon_3(-c_3 + c_1) + \\ &\quad + \varepsilon_4(c_2 - c_3) + \varepsilon_5(c_3 - c_1) + \varepsilon_6(c_1 - c_2) + \\ &\quad + \varepsilon_1\varepsilon_5 + \varepsilon_2\varepsilon_6 + \varepsilon_3\varepsilon_4 - \varepsilon_1\varepsilon_6 - \varepsilon_2\varepsilon_4 - \varepsilon_3\varepsilon_5. \end{aligned}$$

Offenbar ist $d(\mathbf{0}) = \det(X(\mathbf{0})) = \det(X) = d(G^*) = 7$.

Also ist

$$(36)\qquad d(\varepsilon) = 7 + l(\varepsilon) + q(\varepsilon),$$

wobei q eine homogene quadratische Form in ε und l eine homogene Linearform in ε ist. Dabei können wir schreiben

$$(37)\qquad l(\varepsilon) = \boldsymbol{n}\varepsilon$$

mit

$$(8)\qquad \boldsymbol{n} = (-c_1+c_2,\ -c_2+c_3,\ -c_3+c_1,\ c_2-c_3,\ c_3-c_1,\ c_1-c_2)^t \in R^6.$$

Wir bilden aus (2) und (8) unter Verwendung der Beziehungen (7) bis (9) aus Abschnitt 3

$$(9)\qquad \begin{aligned} V^*\boldsymbol{n} = (c_2+2c_3)\boldsymbol{n} = (&c_1+2c_2+4c_3,\ c_1+3c_2+3c_3,\\ &-2c_1-5c_2-7c_3,\ -c_1-3c_2-3c_3,\\ &2c_1+5c_2+7c_3,\ -c_1-2c_2-4c_3)^t. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir folgende Nachbarmatrizen von X, wobei wir die Beziehungen (14), (17), (18), (26), (27) des Abschnitts 3 heranziehen und mehrfach Hilfssatz 2(c) anwenden:

(10)

$$\mathfrak{T}_2^1(X) = XU_1 = X\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = XU_1 =: Z_1,$$

$$\mathfrak{T}_3^2(X) \triangleq \Psi\mathfrak{T}_2^1(X) = XVX^{-1}XU_1 \triangleq X\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} =: XU_2 = Z_2,$$

$$\mathfrak{T}_1^3(X) \triangleq \Phi^{-1}\mathfrak{T}_2^1(X) = XU^{-1}X^{-1}XU_1 \triangleq X\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} =: XU_3 = Z_3,$$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{T}_2^1\mathfrak{T}_3^1\mathfrak{T}_2^1(X)\\ &= \mathfrak{T}_2^1(\Phi X) \triangleq \Phi\mathfrak{T}_2^1(X) = XUX^{-1}XU_1 \triangleq X\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix} =: XU_4 = Z_4,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{T}_3^2\mathfrak{T}_3^1\mathfrak{T}_2^1(X)\\ &= \mathfrak{T}_3^2(\Phi X) \triangleq \Phi\Psi\mathfrak{T}_2^1(X) = XUVX^{-1}XU_1 \triangleq X\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} =: XU_5 = Z_5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\mathfrak{T}_2^1\mathfrak{T}_2^3\mathfrak{T}_2^1(X)\\ &= \mathfrak{T}_2^1(\Psi^{-1}X) \triangleq \Psi^{-1}\mathfrak{T}_2^1(X) = XV^{-1}X^{-1}XU_1 \triangleq X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} =: XU_6 = Z_6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_1^3\mathfrak{T}_2^3\mathfrak{T}_2^1(X) &= \mathfrak{T}_1^3(\Psi^{-1}X) \triangleq \Psi^{-1}\Phi^{-1}\mathfrak{T}_2^1(X) = XV^{-1}U^{-1}X^{-1}XU_1\\ &\triangleq X\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = XU_7 = Z_7.\end{aligned}$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind die Diagonalelemente der so definierten Matrizen Z_i positiv, es folgt also aus (10) jeweils die Gleichheit:

$$Z_1 = \mathfrak{T}_2^1(X),\qquad Z_2 = \mathfrak{T}_3^2(X),\qquad \ldots,\qquad Z_7 = \mathfrak{T}_1^3\mathfrak{T}_2^3\mathfrak{T}_2^1(X).$$

Bezeichnen wir mit

$$Z_1(\varepsilon) := \mathfrak{T}^1\big(X(\varepsilon)\big),\qquad \ldots,\qquad Z_7(\varepsilon) := \mathfrak{T}^3\mathfrak{T}^3\mathfrak{T}^1\big(X(\varepsilon)\big)$$

die entsprechenden Nachbarn von $X(\varepsilon)$, dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, sodaß für alle

$$\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{W}_0 := \big\{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_6)^t \in R^6 \,\big|\, \max\{|\varepsilon_i|\} < \varepsilon_0\big\}$$

gilt

$$(11)\qquad Z_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = X(\boldsymbol{\varepsilon})U_1,\qquad Z_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = X(\boldsymbol{\varepsilon})U_2,\qquad \ldots,\qquad Z_7(\boldsymbol{\varepsilon}) = X(\boldsymbol{\varepsilon})U_7.$$

Für jedes solche $\boldsymbol{\varepsilon}$ gilt also nach (10) und (5)

$$(12)\qquad X(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} (1-c_1)+\varepsilon_1 & -c_3+\varepsilon_4 & 1\\ (1-c_2)+\varepsilon_2 & -c_1+\varepsilon_5 & 1\\ (1-c_3)+\varepsilon_3 & -c_2+\varepsilon_6 & 1\end{pmatrix},$$

$$Z_1(\boldsymbol{\varepsilon}) = X(\boldsymbol{\varepsilon})U_1 = X(\boldsymbol{\varepsilon})\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_3-\varepsilon_4 & \cdot & \cdot\\ \cdot & (-c_1+1)+\varepsilon_5 & \cdot\\ \cdot & \cdot & 1\end{pmatrix},$$

$$Z_2(\boldsymbol{\varepsilon}) = X(\boldsymbol{\varepsilon})U_2 = X(\boldsymbol{\varepsilon})\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-c_1)+\varepsilon_1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & 1 & \cdot\\ \cdot & \cdot & c_3-\varepsilon_3\end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}Z_3(\boldsymbol{\varepsilon}) &= X(\boldsymbol{\varepsilon})U_3 = X(\boldsymbol{\varepsilon})\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} (1-c_1+c_3)+\varepsilon_1-\varepsilon_4 & \cdot & \cdot\\ \cdot & (-c_1)+\varepsilon_5 & \cdot\\ \cdot & \cdot & (-1+c_3)-\varepsilon_3\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Z_4(\boldsymbol{\varepsilon}) &= X(\boldsymbol{\varepsilon})U_4 = X(\boldsymbol{\varepsilon})\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} (c_3-1)-\varepsilon_4 & \cdot & \cdot\\ \cdot & (1-c_2-2c_1+1)+\varepsilon_2+2\varepsilon_5 & \cdot\\ \cdot & \cdot & (-1+c_3+c_2)-\varepsilon_3-\varepsilon_6\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$Z_5(\varepsilon) = X(\varepsilon)\,U_5 = X(\varepsilon)\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & (1-c_2-c_1)+\varepsilon_2+\varepsilon_5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & (-1+c_3+c_2+1)-\varepsilon_3-\varepsilon_6 \end{pmatrix},$$

$$Z_6(\varepsilon) = X(\varepsilon)\,U_6 = X(\varepsilon)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1-c_1-c_3+1)+\varepsilon_1+\varepsilon_4 & \cdot & \cdot \\ \cdot & (1-c_2-2c_1+2)+\varepsilon_2+2\varepsilon_5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & (-c_2+1)+\varepsilon_6 \end{pmatrix},$$

$$Z_7(\varepsilon) = X(\varepsilon)\,U_7 = X(\varepsilon)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (2-c_1)+\varepsilon_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & (1-c_2-c_1+1)+\varepsilon_2+\varepsilon_5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & c_2-\varepsilon_6 \end{pmatrix}.$$

Es sei $P_i(\varepsilon)$ das zu $Z_i(\varepsilon)$ gehörige extremale Parallelepiped und $V_i(\varepsilon) := V\big(P_i(\varepsilon)\cap R^3_+\big)$. $V_i(\varepsilon)$ ergibt sich als Produkt der (ausnahmslos positiven) Diagonalelemente der extremalen Matrizen $Z_i(\varepsilon)$. Durch Ausmultiplizieren der Diagonalelemente erhält man im einzelnen mit Hilfe von 3.(7) bis 3.(9)

$$\begin{aligned}
V_1(\varepsilon) &= V^* + \varepsilon_4(-c_2-c_3) + \varepsilon_5(c_3) + t_1(\varepsilon),\\
V_2(\varepsilon) &= V^* + \varepsilon_1(c_3) + \varepsilon_3(-c_2-c_3) + t_2(\varepsilon),\\
V_3(\varepsilon) &= V^* + \varepsilon_1(c_1+c_2+c_3) + \varepsilon_3(-c_1-2c_2-3c_3) +\\
&\qquad + \varepsilon_4(-c_1-c_2-c_3) + \varepsilon_5(c_1+2c_2+2c_3) + t_3(\varepsilon),\\
V_4(\varepsilon) &= V^* + \varepsilon_2(c_1+c_2+c_3) + \varepsilon_3(-c_1-2c_2-2c_3) +\\
&\qquad + \varepsilon_4(-c_1-2c_2-3c_3) + \varepsilon_5(2c_1+2c_2+2c_3) +\\
&\qquad + \varepsilon_6(-c_1-2c_2-2c_3) + t_4(\varepsilon),\\
V_5(\varepsilon) &= V^* + \varepsilon_2(c_2+c_3) + \varepsilon_3(-c_3) + \varepsilon_5(c_2+c_3) + \varepsilon_6(-c_3) + t_5(\varepsilon), \qquad (13)\\
V_6(\varepsilon) &= V^* + \varepsilon_1(c_1+c_2+2c_3) + \varepsilon_2(-c_1-c_2) +\\
&\qquad + \varepsilon_4(c_1+c_2+2c_3) + \varepsilon_5(-2c_1-2c_3) + \varepsilon_6(c_1+3c_2+4c_3) + t_6(\varepsilon),\\
V_7(\varepsilon) &= V^* + \varepsilon_1(-c_1) + \varepsilon_2(c_1+2c_2+c_3) +\\
&\qquad + \varepsilon_5(c_1+2c_2+c_3) + \varepsilon_6(-c_1-3c_2-5c_3) + t_7(\varepsilon),\\
V^*\boldsymbol{n} &= (c_1+2c_2+4c_3,\ c_1+3c_2+3c_3,\ -2c_1-5c_2-7c_3,\\
&\qquad -c_1-3c_2-3c_3,\ 2c_1+5c_2+7c_3,\ -c_1-2c_2-4c_3)^t.
\end{aligned}$$

Daraus sieht man, daß $V_i(\varepsilon)$ dargestellt werden kann in der Form

$$V_i(\varepsilon) = V^* + l_i(\varepsilon) + t_i(\varepsilon), \tag{14}$$

wobei

$$l_i(\varepsilon) := \boldsymbol{n}^{(i)}\varepsilon = \sum_{j=1}^{6} n_j^{(i)}\varepsilon_j, \quad i = 1, 2, \ldots, 7,$$

homogene Linearformen und $t_i(\varepsilon)$ kubische bzw. quadratische Polynome in ε ohne linearen und konstanten Teil sind. Die Komponenten $n_1^{(i)}, \ldots, n_6^{(i)}$ der Vektoren $\boldsymbol{n}^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 7$ sind aus (13) direkt abzulesen.

Da für $\varepsilon \in W_0$ die in (11) angegebenen Matrizen extremal im Gitter $G(\varepsilon)$ mit der Basis $X(\varepsilon)$ sind, ist für diese ε

$$k\big(G(\varepsilon)\big) \geqslant \frac{V_i(\varepsilon)}{d(\varepsilon)}. \tag{15}$$

Die Behauptung von Satz 2 ist also bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß eine gewisse Umgebung $\mathfrak{U} \subseteq R^6 \cap \mathfrak{W}_0$ des Nullpunktes existiert, in der für jedes $\varepsilon \neq \mathbf{0}$

$$\frac{V_i(\varepsilon)}{d(\varepsilon)} > k^* = \frac{V^*}{7} \tag{16}$$

für wenigsten seinen Index $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$. Dies ist nach (6), (7) und (14) genau dann richtig, wenn

$$V^* + \boldsymbol{n}^{(i)}\varepsilon + t_i(\varepsilon) - \frac{V^*}{7}\big(7 + \boldsymbol{n}\varepsilon + q(\varepsilon)\big) > 0$$

oder

$$F_i(\varepsilon) := \Big(\boldsymbol{n}^{(i)} - \frac{V^*}{7}\boldsymbol{n}\Big)\varepsilon + \Big(t_i(\varepsilon) - \frac{V^*}{7}q(\varepsilon)\Big) > 0. \tag{17}$$

$T_i(\varepsilon) := t_i(\varepsilon) - \frac{V^*}{7}q(\varepsilon)$ sind dabei wieder kubische bzw. quadratische Polynome ohne linearen und konstanten Teil,

$$\boldsymbol{m}^{(i)} := \boldsymbol{n}^{(i)} - \frac{V^*}{7}\boldsymbol{n} \tag{18}$$

sind die Normalvektoren der durch F_i: $\mathfrak{W}_0 \to R$, $F_i(\varepsilon) := \boldsymbol{m}^{(i)}\varepsilon + T_i(\varepsilon)$ bestimmten stetig differenzierbaren Flächenstücke $\mathfrak{F}_i$ im Punkt $\mathbf{0}$; die Ursprungsebenen $\mathfrak{E}_i := \{\varepsilon \in R^6 \mid \boldsymbol{m}^{(i)}\varepsilon = 0\}$ sind die zugehörigen Tangentialebenen im Punkt $\mathbf{0}$.

Wie man aus (13) unmittelbar abliest, gilt

$$\sum_{i=1}^{7}\boldsymbol{n}^{(i)} = V^*\boldsymbol{n} \quad \Big(= \sum_{i=1}^{7}\frac{1}{7}V^*\boldsymbol{n}\Big);$$

mit (18) folgt daraus

$$\sum_{i=1}^{7} 1 \cdot \boldsymbol{m}^{(i)} = \boldsymbol{0}. \tag{19}$$

Wie man ohne prinzipielle Schwierigkeit nachprüft, ist

$$|\det(\boldsymbol{m}^{(2)}, \boldsymbol{m}^{(3)}, \ldots, \boldsymbol{m}^{(7)})| > 0. \tag{20}$$

Das System $\{\boldsymbol{m}^{(1)}, \boldsymbol{m}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{m}^{(7)}\}$ erweist sich durch das Bestehen von (19) und (20) als positive Minimalbasis des R^6. Bekanntlich gibt es daher zu jedem $\varepsilon \in R^6 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ einen Index $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, sodaß

$$\boldsymbol{m}^{(i)} \varepsilon > 0. \tag{21}$$

Bezeichnen wir für $i = 1, 2, \ldots, 7$ mit $H_i = \{\varepsilon \in R^6 | \; \boldsymbol{m}^{(i)} \varepsilon > 0\}$ den durch $\mathfrak{E}_i$ begrenzten offenen Halbraum und mit H_i^c dessen (abgeschlossenes) Komplement, so ist (21) offenbar gleichbedeutend mit

$$\bigcup_{i=1}^{7} H_i = R^6 \setminus \{\boldsymbol{0}\}. \tag{22}$$

Wir betrachten den Kegel

$$K_1 := \bigcap_{i \neq 1} H_i^c = \{\varepsilon \in R^6 | \; \boldsymbol{m}^{(2)} \varepsilon \leqslant 0, \ldots, \boldsymbol{m}^{(7)} \varepsilon \leqslant 0\}:$$

Wegen (22) ist

$$K_1 \setminus \{\boldsymbol{0}\} = \bigcap_{i \neq 1} H_i^c \cap \{\boldsymbol{0}\}^c = \big(\bigcup_{i \neq 1} H_i \cup \{\boldsymbol{0}\}\big)^c \subseteq H_1.$$

K_1 liegt also auf derselben Seite von $\mathfrak{E}_1$ wie $\boldsymbol{m}^{(1)}$ und hat mit H_1^c nur den Punkt $\boldsymbol{0}$ gemeinsam. Da die $\mathfrak{E}_i$ Tangentialebenen für $\mathfrak{F}_i$ in $\boldsymbol{0}$ sind, hat in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U} (\subseteq R^6 \cap \mathfrak{W}_0)$ von $\boldsymbol{0}$ auch die Menge

$$K_1' := \{\varepsilon \in R^6 | \; F_2(\varepsilon) = \boldsymbol{m}^{(2)} \varepsilon + T_2(\varepsilon) \leqslant 0, \ldots \\ \ldots, F_7(\varepsilon) = \boldsymbol{m}^{(7)} \varepsilon + T_7(\varepsilon) \leqslant 0\} \cap \mathfrak{U} \tag{23}$$

mit

$$H_1'^c := \{\varepsilon \in R^6 | \; F_1(\varepsilon) = \boldsymbol{m}^{(1)} \varepsilon + T_1(\varepsilon) \leqslant 0\} \cap \mathfrak{U} \tag{24}$$

genau den Punkt $\boldsymbol{0}$ gemeinsam.

Sei nun $\varepsilon \in \mathfrak{U} \setminus \{\boldsymbol{0}\}$. Dann ist entweder $F_1(\varepsilon) > 0$ oder dies ist nicht der Fall; dann ist aber (vgl. (24)) $\varepsilon \in H_1'^c \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ und wegen $H_1'^c \cap K_1' = \{\boldsymbol{0}\}$ notwendig $\varepsilon \notin K_1'$, d.h. es existiert nach Definition (23) von K_1' ein Index i, sodaß $F_i(\varepsilon) > 0$. Genau das wurde mit (17) behauptet. Damit ist der Beweis von Satz 2 erbracht.

Literaturverzeichnis

[1] W. S. Cassels, *An introduction to the geometry of numbers*, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959.

[2] P. Furtwängler, M. Zeisel, *Zur Minkowskischen Parallelepipedapproximation*, Monatshefte Math. Phys. 30 (1920), S. 177–198.

[3] P. Gruber, *Bemerkungen zum Umkehrproblem für den Minkowskischen Linearformensatz*, Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös, Sect. Math. 13 (1970), S.5–10.

[4] — *Über einige Resultate in der Geometrie der Zahlen*, Coll. Math. Soc. J. Bolyai 2, Number Theory, Debrecen (1968), S. 105–110.

[5] E. Hlawka, *Über Gitterpunkte in Parallelepipeden*, J. Reine Angew. Math. 87 (1950), S. 246–252.

[6] Chao Ko, *Note on the lattice points in a parallelepiped*, J. London Math. Soc. 12 (1937), S. 40–47.

[7] C. G. Lekkerkerker, *Geometry of numbers*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen & North-Holland Publ. Company, Amsterdam, 1969.

[8] H. Minkowski, *Zur Theorie der Kettenbrüche*, Ges. Abh. I.

[9] L. J. Mordell, *Note on an arithmetical problem on linear forms*, J. London Math. Soc. 12 (1937), S. 34–36.

[10] C. A. Rogers, *On theorems of Siegel and Hlawka*, Annals Math. 53 (1951), S. 531–540.

[11] J. Surányi, *Über einen Satz von Szekeres in der Geometrie der Zahlen*, Annales Univ. Sci. Budapest 3–4 (1960/61), S. 319–326.

[12] — *Lattice-point free rectangles*, Berichte aus dem Math. Forschungsinstitut Oberwolfach Bd. 5 (1971), S. 195–202.

[13] G. Szekeres, *On a problem of the lattice plane*, J. London Math. Soc. 12 (1937), S. 88–93.

[14] — *Note on lattice points within a parallelepiped*, ibid. 19 (1937), S. 36–39.

[15] P. Szüsz, *Beweis eines zahlengeometrischen Satzes von G. Szekeres*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956), S. 75–79.

[16] M. Zeisel, *Zur Minkowskischen Parallelepipedapproximation*, S.-B. Akad. Wiss. Wien math. nat. wiss. Kl. Abt. IIa 126 (1917), S. 1221–1247.

INSTITUT FÜR ANALYSIS, T. U., Wien

Eingegangen am 15. 3. 1977 (921)