ACTA ARITHMETICA
XXXV (1979)

Über natürliche Zahlen n mit der Eigenschaft $[(\alpha n, \beta n)] = 1$

von

H. G. Kopetzky (Leoben, Austria)

Die Wahrscheinlichkeit für die Beziehung $(m, n) = 1$, wenn m und n zufällig gewählte natürliche Zahlen sind, ist bekanntlich $6\pi^{-2}$ [3]. Estermann [2] und Watson [7] haben gezeigt, daß dieser Wert gleich bleibt, falls $m = [\alpha n]$ ist und α irrational ist. Watson hat darüberhinaus den Fall eines rationalen α untersucht. In Weiterführung dieser Ergebnisse wird im folgenden gezeigt, daß die Wahrscheinlichkeit für die Beziehung $([\alpha n], [\beta n]) = 1$ genau dann $6\pi^{-2}$ ist, wenn die Folge der Gitterpunkte $\{([\alpha n], [\beta n])\}$ gleichverteilt in Z^2 ist (Definition dieser Gleichverteilung siehe [6]). Weiters wird ein entsprechender Wert hergeleitet, wenn α irrational und β eine beliebige reelle Zahl ist, wobei dieser Wert, falls er ungleich $6\pi^{-2}$ ist, nur von der Koeffizienten a, b, c der linearen Relation $a\alpha + b\beta = c$ abhängt.

Wir bedienen uns dabei unter anderem der folgenden naheliegenden, bei ähnlichen Problemen (vgl. [1], [2]) verwendeten Überlegung: Mit $Q(x, \alpha, \beta)$ werde die Anzahl der $n \leqslant x$ mit $([\alpha n], [\beta n]) = 1$ bezeichnet, die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit ist dann per definitionem $\lim\limits_{x\to\infty}\big(Q(x, \alpha, \beta)/x\big)$, falls der Grenzwert existiert. Anstatt diesen Grenzwert direkt zu untersuchen, betrachtet man zuerst $\lim\limits_{x\to\infty}\big(Q_k(x, \alpha, \beta)/x\big)$. $Q_k(x, \alpha, \beta)$ sei dabei die Anzahl der $n \leqslant x$ mit $([\alpha n], [\beta n], k!) = 1$. Ist nun $R_k(x, \alpha, \beta) = Q_k(x, \alpha, \beta) - Q(x, \alpha, \beta)$, so zeigt man dann, daß $\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\big(R_k(x, \alpha, \beta)/x\big)$ für entsprechend großes k beliebig klein gemacht werden kann. Da stets $R_k(x, \alpha, \beta) \geqslant 0$ ist, erhält man, falls die Grenzwerte existieren,

$$\lim_{x\to\infty}\big(Q(x, \alpha, \beta)/x\big) = \lim_{k\to\infty}\lim_{x\to\infty}\big(Q_k(x, \alpha, \beta)/x\big).$$

Führt man die Möbius-Funktion ein, so ergibt sich

$$Q_k(x, \alpha, \beta) = \sum_{n\leqslant x}\ \sum_{d|([\alpha n],[\beta n],k!)} \mu(d) = \sum_{d|k!} \mu(d) S(x, d, \alpha, \beta),$$

wobei $S(x, d, \alpha, \beta)$ die Anzahl der $n \leqslant x$ mit $d\,|\,([\alpha n], [\beta n])$ bezeichnet.

Für festes k ist die letzte Summe endlich, daher gilt

$$\lim_{x\to\infty}\big(Q_k(x,\alpha,\beta)/x\big) = \sum_{d|k!}\mu(d)\lim_{x\to\infty}\big(S(x,d,\alpha,\beta)/x\big),$$

falls die Grenzwerte existieren.

Wir werden uns im weiteren bei α und β auf positive Zahlen beschränken. Wie üblich sei $\{x\} = x-[x]$ (auch für negative x).

Satz 1. *Es sei α irrational und β eine beliebige reelle Zahl. Dann existier $\lim_{x\to\infty}\big(Q(x,\alpha,\beta)/x\big)$. Es gilt in diesem Fall*

(i) *Sind $1,\alpha,\beta$ linear unabhängig über den Rationalzahlen, so ist*

$$\lim_{x\to\infty}\big(Q(x,\alpha,\beta)/x\big) = 6\pi^{-2}.$$

(ii) *Sind $1,\alpha,\beta$ linear abhängig und α,β linear unabhängig, wobeit $a\alpha+b\beta = c$, a, b, c, ganze Zahlen, $(a,b,c)=1$ sein möge, so ist*

$$\lim_{x\to\infty}\big(Q(x,\alpha,\beta)/x\big) = 6\pi^{-2}\prod_{p|c}\frac{p^2}{p^2-1}\sum_{t|c}\mu(t)G(t),$$

p durchläuft dabei die Primzahlen.

(iii) *Sind α,β linear abhängig, $a\alpha+b\beta = 0$, $(a,b)=1$, so ist*

$$\lim_{x\to\infty}\big(Q(x,\alpha,\beta)/x\big) = \sum_{t=1}^{\infty}\mu(t)G(t).$$

In diesen Ausdrücken ist

$$G(t) = \begin{cases}\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{ab}\left\{\dfrac{a}{t}\right\}\left\{\dfrac{b}{t}\right\}, & \text{für}\quad \left\{\dfrac{a}{t}\right\}+\left\{\dfrac{b}{t}\right\}\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{1}{t^2}-\dfrac{1}{ab}\left(1-\left\{\dfrac{a}{t}\right\}\right)\left(1-\left\{\dfrac{b}{t}\right\}\right), & \text{sonst},\end{cases}$$

falls $ab\neq 0$ ist, und

$$G(1) = 1,\qquad G(t) = \frac{1}{t^2}+\frac{1}{bt}\left(1-\left\{\frac{b}{t}\right\}\right)\qquad \text{für}\quad t>1,$$

falls $a=0$ ist.

Der Beweis verwendet zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *$\lim_{x\to\infty}\big(S(x,d,\alpha,\beta)/x\big)$ existiert, falls eine der Zahlen irrational ist und hat, falls $1,\alpha,\beta$ linear unabhängig sind, den Wert d^{-2}. Ist $a\alpha+b\beta = c$, $(a,b,c)=1$, dann ist dieser Grenzwert gleich $d^{-2}(c,d)^2\times$ $\times G\big((c,d)\big)$, wobei wie üblich $(0,d)=d$ sei.*

Beweis. Die Beweise für die im folgenden verwendeten Resultate über Gleichverteilung findet man in [8]. $d\,|\,[\alpha n]$ ist gleichwertig mit $\left\{\dfrac{\alpha}{d}n\right\}\in[0,d^{-1})$. $S(x,d,\alpha,\beta)$ ist also die Anzahl der $n\leqslant x$, sodaß der Punkt $\left(\left\{\dfrac{\alpha}{d}n\right\},\left\{\dfrac{\beta}{d}n\right\}\right)$ im Quadrat $[0,d^{-1})\times[0,d^{-1})$ ist. Die Folge der Punkte $\left(\left\{\dfrac{\alpha}{d}n\right\},\left\{\dfrac{\beta}{d}n\right\}\right)$ ist gleichverteilt mod. Eins, wenn $1,\alpha,\beta$ linear unabhängig sind; daher ist dann

$$\lim_{x\to\infty}\big(S(x,d,\alpha,\beta)/x\big) = d^{-2}.$$

Ist $a\alpha+b\beta = c$, $(a,b,c)=1$, so liegen die Punkte $\left(\left\{\dfrac{\alpha}{d}n\right\},\left\{\dfrac{\beta}{d}n\right\}\right)$ auf endlich vielen parallelen Geraden $ad'x+bd'y=\nu$, $d' = d/(c,d)$, ν durchläuft dabei $(a+b)d'$ ganzzahlige Werte. Sind nicht beide Zahlen α und β rational, so liegen diese Punkte auf den Geraden sogar gleichmäßig dicht, d.h. im Grenzwert entfällt auf ein Geradenstück eine seiner Länge proportionale Anzahl von Punkten. Um den Beweis zu beenden, müssen wir daher das Verhältnis der Summe der Längen der in das Quadrat $[0,d^{-1})\times[0,d^{-1})$ fallenden Geradenabschnitte zur Summe der Längen der in das Quadrat $[0,1)\times[0,1)$ fallenden Geradenabschnitte berechnen. Es sei $a' = a/(c,d)$ und $b' = b/(c,d)$. Da nur das Verhältnis benötigt wird, genügt es, wenn wir die Länge der Projektionen dieser Abschnitte auf die x-Achse betrachten. Wir behandeln zuerst den Fall $ab\neq 0$ und setzen dabei gleiches Vorzeichen von a und b voraus. Haben a und b verschiedenes Vorzeichen, so verläuft die Rechnung analog. O.B.d.A. können wir nun $0<a\leqslant b$ verlangen. Um die Gesamtlänge der Projektionen der Geraden in $[0,d^{-1})\times[0,d^{-1})$ zu berechnen, betrachten wir vorerst das Rechteck $[0,d^{-1})\times\big[0,([b']+1)/bd'\big)$. Durch beide Eckpunkte auf der y-Achse geht dann jeweils eine der Geraden. Wegen $a\leqslant b$ ist die Summe der Längen der in dieses Rechteck fallenden Geradenabschnitte gleich der Summe der Längen der in den Streifen zwischen $x=0$ und $x=d^{-1}$ fallenden Geradenabschnitte der Geraden mit $\nu = 0,1,\ldots,[b']$, da die über das Rechteck hinausgehenden Abschnitte dieser Geraden denselben Anteil ausmachen wie jene Abschnitte im Rechteck, die zu einem $\nu\neq 0,1,\ldots$ $\ldots,[b']$ gehören. Man enthält also in diesem Rechteck für die Gesamtlänge der Projektionen den Wert $([b']+1)/d$. Von diesem Wert muß nun die Gesamtlänge der Projektionen im Rechteck $[0,d^{-1})\times\big[d^{-1},$ $([b']+1)/bd'\big)$ abgezogen werden, um die gesuchte Gesamtlänge der Projektionen im Quadrat $[0,d^{-1})\times[0,d^{-1})$ zu erhalten. Die Anzahl der Geraden, die die Gerade $y=d^{-1}$ mit $x\in[0,d^{-1})$ schneiden ist $[a'+b']-$ $-[b']$. Die Länge der Projektion des Anteils einer solchen Geraden im

letzten Rechteck ist

$$\big(([b']+1)/bd'-1/d\big)\,(b/a) = (1-\{b'\})/ad'.$$

Nun ist noch zu beachten, ob eine weitere Gerade einen Beitrag zum letzten Rechteck liefert. Dies kann nur die Gerade mit $\nu = [a'+b']+1$, falls sie die Gerade $y = ([b']+1)/bd'$ mit $x \in [0, d^{-1})$ schneidet. Die Bedingung dafür ist $[a'+b'] = [a']+[b']$. Die Projektion des Abschnitts dieser Geraden hat denn die Länge $\{a'\}/ad'$. Für die Gesamtlänge der Projektionen der Geradenabschnitte im Quadrat $[0, d^{-1})\times[0, d^{-1})$ ergibt sich damit

$$([b']+1)/d-\big([a']\,(1-\{b'\})+\{a'\}\big)/ad' = (a'b'-\{a'\}\,\{b'\})/ad'$$

falls $[a'+b'] = [a']+[b']$ bzw. $\{a'\}+\{b'\}\leqslant 1$ ist. Ist andererseits $\{a'\}+$ $+\{b'\}>1$, so erhält man dann

$$([b']+1)/d-([a']+1)\,(1-\{b'\})/ad' = \big(a'b'-(1-\{a'\})\,(1-\{b'\})\big)/ad'.$$

Nun benötigen wir noch die Gesamtlänge der Projektionen der in das Quadrat $[0,1)\times[0,1)$ fallenden Geradenabschnitte. Dafür erhält man den Wert bd', da man wiederum anstelle der Abschnitte im Quadrat die insgesamt gleichlangen Abschnitte der Geraden, die die y-Achse mit $y\in[0,1)$ schneiden, im Streifen zwischen $x=0$ und $x=1$ betrachten kann. Die Anzahl dieser Geraden ist aber bd'. Führt man noch $G(t)$ aus Satz 1 ein, so ist damit der Beweis für diesen Fall erledigt.

Sei nun $ab=0$. Wir setzen dann $a=0$ und $b\neq 0$, d.h. ein rationales β, voraus. Die Geraden sind parallel zur x-Achse. Die Anzahl der Geraden, die einen Anteil zum Quadrat $[0, d^{-1})\times[0, d^{-1})$ liefern, ist $[b']+1$, falls $[b']\neq b'$ und b', wenn $[b'] = b'$. Die Anzahl der Geraden, die einen Beitrag zum Einheitsquadrat liefern, ist wieder bd'. Das gesuchte Verhältnis ist daher

$$([b']+1)/bdd' = 1/d^2+(1-\{b'\})/bdd',$$

falls $[b']\neq b'$, und $1/d^2$, wenn $[b'] = b'$ ist. Mit dem in Satz 1 definierten $G(t)$ ergibt sich sofort die Behauptung.

HILFSSATZ 2. *Es gilt für beliebiges* $\varepsilon > 0$

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\big(R_k(x, a, \beta)/x\big) < \varepsilon \quad \textit{für} \quad k > k_\varepsilon.$$

Beweis. Den Beweis findet man, wenn $\beta = 1$ ist, in [2], wobei sogar a rational sein kann. Betrachtet man dort die Anzahl der Gitterpunkte mit relativ primen Koordinaten (x, y) im Parallelogramm $0 < x\leqslant u$, $ax < y \leqslant ax+1$ anstatt im Parallelogramm $0<x\leqslant u$, $ax-1<y\leqslant ax$, so erhält man in derselben Weise

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\big(R'_k(x, a, 1)/x\big) < \varepsilon \quad \text{für} \quad k > k_\varepsilon.$$

$R'_k(x, a, 1)$ ist dabei definiert wie $R_k(x, a, 1)$, wenn man nur die Anzahl der $n\leqslant x$ mit $(n, [an]+1) = 1$ anstelle der Anzahl der $n\leqslant x$ mit $(n, [an]) = 1$ betrachtet. Auf diese beiden Resultate führen wir nun unseren Fall zurück. O.B.d.A. sei $\beta < a$; im Fall daß eine der Zahlen rational ist, wählt man dementsprechend a oder β rational. Als erstes zerlegt man die Menge der natürlichen Zahlen in irgendeiner Weise in endlich viele Mengen $M_1, \ldots, M_\nu$, derart, daß für alle $i = 1, \ldots, \nu$ gilt $[am]\neq[an]$, falls $m\in M_i$, $n\in M_i$ ist. Diese Mengen M_i zerlegt man nun weiter in zwei Mengen M'_i und M''_i, und zwar soll für $n\in M_i$ gelten $n\in M'_i$, falls $[\beta[an]/a] = [\beta n]$ und $n\in M''_i$, falls $[\beta[an]/a] = [\beta n]-1$. Nur diese zwei Fälle sind wegen $\beta < a$ möglich. Setzt man $m = [an]$, so wird für $n\in M'_i$

$$([an], [\beta n]) = \left(m, \left[\frac{\beta}{a}m\right]\right)$$

und für $m\in M''_i$

$$([an], [\beta n]) = \left(m, \left[\frac{\beta}{a}m\right]+1\right).$$

Die Menge der m ist dabei jeweils Teilmenge von $N\cup\{0\}$. Offensichtlich gilt dann aber

$$R_k(x, a, \beta)\leqslant hR_k\left(ax, \frac{\beta}{a}, 1\right)+h'R'_k\left(ax, \frac{\beta}{a}, 1\right),$$

wobei h, h' nur von a und β abhängen. Daraus ergibt sich nun sofort

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\big(R_k(x, a, \beta)/x\big) < \varepsilon \quad \text{für} \quad k > k_\varepsilon.$$

Für den Beweis von Satz 1 erhält man nun unter Berücksichtigung von

$$\sum_{d=1}^{k}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{k}\right)$$

und

$$\sum_{\substack{d=1\\(d,r)=1}}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}\left(\sum_{d|c}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2}\prod_{p|c}\frac{p^2}{p^2-1}, \qquad p \text{ Primzahl},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Q_k(x, a, \beta)}{x} = \frac{6}{\pi^2}+O\left(\frac{1}{k}\right),$$

falls $1, a, \beta$ linear unabhängig sind, und im Fall der linearen Abhängigkeit, wenn $c \neq 0$ ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Q_k(x,\alpha,\beta)}{x} = \sum_{d|k!}\mu(d)\,(c,d)^2 d^{-2} G\big((c,d)\big)$$
$$= \sum_{\delta|c} G(\delta)\,\delta^2 \sum_{\substack{d|k!\\(c,d)=\delta}} \frac{\mu(d)}{d^2}$$
$$= \frac{6}{\pi^2}\prod_{p|c}\frac{p^2}{p^2-1}\sum_{\delta|c}\mu(\delta)G(\delta)+O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Ist $c = 0$, so wird wegen $(0, d) = d$, wenn für $d > D$ $\{a/d\}+\{b/d\}<1$ gilt, $\{a/d\}\cdot\{b/d\} = ab/d^2$ und damit $G(d) = 0$ für $d > D$.

Gemäß den eingangs gemachten Bemerkungen sind damit die Behauptungen des Satzes bewiesen.

Satz 2. *Es gilt*

$$\lim_{x\to\infty}\big(Q(x,\alpha,\beta)/x\big) = 6\pi^{-2}$$

genau dann, wenn entweder

(i) $1, \alpha, \beta$ *über den rationalen Zahlen linear unabhängig sind, oder wenn*

(ii) *bei linearer Abhängigkeit von* $1, \alpha, \beta$ *und linearer Unabhängigkeit von* α, β *in* $a\alpha+b\beta = c$ $(a, b, c$ *ganz*, $(a, b, c) = 1)$ $c\neq 0$ *ist, und entweder* $c|a$, $a \neq 0$ *oder* $c|b$, $b\neq 0$ *gilt; bei rationalem* β *also speziell, falls* $\beta = 1/b$ *ist.*

In den genannten Fällen, und nur in diesen, ist die Folge der Gitterpunkte $([\alpha n], [\beta n])$ *gleichverteilt in* Z^2.

Beweis. Daß der Grenzwert in diesen Fällen $6\pi^{-2}$ ist, folgt unmittelbar aus Satz 1. Die Umkehrung ergibt sich, wenn man beachtet, daß auf Grund der Möbius'schen Umkehrformel genau dann

$$\Big(\sum_{d|c}\mu(d)d^{-2}\Big)^{-1}\sum_{d|c}\mu(d)G(d) = 1$$

gilt, wenn $G(d) = d^{-2}$ ist. Aus den Ausdrücken für $G(d)$ in Satz 1 folgt sofort, falls α und β irrational sind, daß dies nur möglich ist, wenn $\{a/d\} = 0$ oder $\{b/d\} = 0$ für alle Teiler d von c, insbesondere also auch für $d = c$. Weiters würde sich bei rationalem β und irrationalem α aus $[b/d+1]/bd = d^{-2}$ dann $d|b$ ergeben, also auch $c|b$. Wegen $(0, b, c) = 1$ muß daher $c = 1$ sein. In den noch verbleibenden Fällen ist der Grenzwert rational, also $\neq 6\pi^{-2}$ (vgl. auch die folgende Bemerkung 1).

In [6] wird bewiesen, daß die Folge der Gitterpunkte $([\alpha n], [\beta n])$ genau in den genannten Fällen gleichverteilt in Z^2 ist.

Bemerkung 1. Wir sind überhaupt nicht auf den Fall eingegangen, daß α und β rational sind. Ähnlich wie oben lassen sich auch hier Ergebnisse herleiten. Die Punkte $\left(\left\{\frac{\alpha}{d}n\right\}, \left\{\frac{\beta}{d}n\right\}\right)$ fallen dann mit endlich vielen Punkten eines Gitters (Schnitt zweier Geradenscharen) zusammen. Die Ergebnisse sind im allgemeinen Fall kompliziert, die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit hat aber jedenfalls einen rationalen Wert. Ohne Beweis sei z.B. angeführt, daß wenn $\alpha = p/q$ und $\beta = r/s$ und speziell $(ps, rq) = 1$ ist,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{Q(x,\alpha,\beta)}{x} = \frac{1}{qs}\sum_{i=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{s-1}\frac{\varphi(|m_{ij}|)}{|m_{ij}|}$$

mit $m_{ij} = jp-ir$ ist. Der Beweis hiefür läßt sich auch analog wie in [7] führen.

Bemerkung 2. Die Wahrscheinlichkeit, daß für zwei zufällig gewählte Zahlen m und n (m, n) l-frei ist, ist $1/\zeta(2l)$ [4]. In ähnlicher Weise wie oben und in [5] kann man nun zeigen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß $([\alpha n], [\beta n])$ l-frei ist, gleich $1/\zeta(2l)$ ist, wenn $1, \alpha, \beta$ linear unabhängig sind. Im Falle der linearen Abhängigkeit sind die Ergebnisse des obigen Satzes dann in entsprechender Weise zu modifizieren.

Bemerkung 3. Die Verallgemeinerung der vorliegenden Ergebnisse auf mehr als zwei Dimensionen gelingt ohne Schwierigkeiten, falls die Zahlen $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu$ linear unabhängig über den Rationalzahlen sind. Die eingangs gemachten Bemerkungen lassen sich sofort übertragen. Die Verallgemeinerung von Hilfssatz 2 beweist man mit vollständiger Induktion: Ein n, das in $R_k(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_\nu)$ mitgezählt wird, wird zumindest in $R_k(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu-1})$ oder $R_k(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_\nu)$ mitgezählt. Wegen der Gleichverteilung mod. Eins der entsprechenden ν-dimensionalen Folge ergibt sich für die fragliche Wahrscheinlichkeit dann der Wert $1/\zeta(s)$. Bestehen allerdings lineare Relationen zwischen den α_i, $i = 1, \ldots, \nu$, so dürfte eine Verallgemeinerung schwierig sein, da die Berechnungen zur Verallgemeinerung von Hilfssatz 1 auf Grund verschiedenster Fallunterscheidungen schon für niedere Dimensionen sehr aufwendig werden.

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdös and G. G. Lorentz, *On the probability that n and g(n) are relatively prime*, Acta Arith. 5 (1958), S. 35–44.

[2] T. Estermann, *On the number of primitive lattice points in a parallelogram*, Canad. J. Math. 5 (1953), S. 456–459.

[3] G. H. Hardy und E. M. Wright, *Einführung in die Zahlentheorie*, München 1958.

[4] P. J. McCarthy, *On a certain family of arithmetic functions*, Amer. Math. Monthly 65 (1958), S. 568–590.

[5] J. P. McCarthy, *The probability that $(n, f(n))$ is r-free*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), S. 368–369.
[6] H. Niederreiter, *On a class of sequences of lattice points*, J. Number Theory 4 (1972), S. 477–502.
[7] G. L. Watson, *On integers n relatively prime to* $[\alpha n]$, Canad. J. Math. 5 (1953), S. 451–455.
[8] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Math. Ann. 77 (1916), S. 313–352.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
MONTANUNIVERSITÄT LEOBEN
Leoben, Austria

Eingegangen am 26. 8. 1976
und in revidierter Form am 3. 2. 1977 (872)

ACTA ARITHMETICA
XXXV (1979)

Remarks on Hua's estimate of complete trigonometrical sums

by

O. Körner and H. Stähle (Ulm)

1. Introduction. We are concerned with trigonometrical sums of the form

$$S_f(q) = \sum_{a \bmod q} e^{2\pi i f(a)/q},$$

where q is an integer > 1 and $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0$ is a polynomial with integral coefficients such that $(a_1, \ldots, a_k, q) = 1$.

Many problems in analytical number theory (e.g. Waring's problem extended to polynomial values) make it desirable to have precise estimates of $S_f(q)$ for large q. Since $S_f(q) = 0$ for $k = 1$, and since the case $k = 2$ can be settled by the theory of Gaussian sums, it is supposed in the sequel that $k \geqslant 3$.

For the special polynomial $f(x) = x^k$ Hardy and Littlewood [2] proved among other things that

$$|S_f(q)| \leqslant c(k) q^{1-1/k} \tag{1}$$

with a positive constant $c(k)$ depending only on k. Furthermore their results show that the estimate (1) is best possible except for the constant $c(k)$, if there is no restriction for q; namely for each k there exist infinitely many q with $S_f(q) = q^{1-1/k}$. The question arises whether (1) remains true for general f. It will be shown that an affirmative answer to this question can be given by means of the methods of Hua [3]–[6], e.g. in this way it is easy to see that (1) still holds with $c(k) = \exp(3^k)$ in the case $k > 8$. This estimate can be improved slightly. More precisely, for general f with $k \geqslant 3$ we shall deduce the following

Theorem 1. *We have*

$$|S_f(q)| \leqslant [k(k-1)]^{v(q,k)} q^{1-1/k},$$

where $v(q, k)$ denotes the number of all primes p with $p \mid q$ and $p <$ $\max\{2^k, (k-1)^{2k/(k-2)}\}$.

The proof rests essentially on Hua's inductive procedure [3] by which