[3] G. Gras, *Sur les l-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l*, Ann. Inst. Fourier 23, 3 (1973), pp. 1–48.

[4] — *Sur les l-classes d'idéaux des extensions non galoisiennes de Q de degré premier impair l à clôture galoisiennes diédrale de degré 2l*, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), pp. 677–685.

[5] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Wurzburg/Wien 1970.

[6] K. Iimura, *Dihedral extensions of Q of degree 2l which contain non-Galois extensions with class number not divisible by l*, Acta Arith., this volume, pp. 385–394.

[7] S. Kobayashi, *On the l-class rank in some algebraic number fields*, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), pp. 668–676.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY
2-1-1 Fukazawa, Setagaya-ku
Tokyo, Japan

Received on 18. 3. 1977 (924)

ACTA ARITHMETICA
XXXV (1979)

Добавление к работе: „Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана"

Acta Arith. 31 (1976), стр. 45–51

Ян Мозер (Братислава)

1. Харди и Литтлвуд ([1], 177–184) доказали следующую теорему: *отрезок*

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^{1/4+\varepsilon}),\quad T\geqslant T_0(\varepsilon),$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$. При этом, метод предложенный упоминавшимися учеными оставлял открытым вопрос о влиянии гипотезы Линделёфа на расстояния нечетных нулей функции $\zeta(\frac{1}{2}+it)$.

В этом направлении покажем, что имеет место

Теорема. *Если справедлива гипотеза Линделёфа, то отрезок*

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i(T+T^{1/8+\varepsilon}),\quad T\geqslant T_0(\varepsilon),$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$.

Пусть

$$S(a,b)=\sum_{0<a\leqslant n<b\leqslant 2a} e^{it\ln n},\quad b\leqslant\sqrt{\frac{t}{2\pi}}, \tag{1}$$

(ср. [3], стр. 33, 34) обозначает элементарную тригонометрическую сумму. В работе [4] мы показали, что при условии

$$|S(a,b)|<A(\Delta)\sqrt{a}\,t^{\Delta},\quad 0<\Delta<\tfrac{1}{4}, \tag{2}$$

отрезок

$$\tfrac{1}{2}+iT,\ \tfrac{1}{2}+i\big(T+T^{1/8+\Delta/2}\psi(T)\big),\quad T\geqslant T_0(\Delta,\psi), \tag{3}$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$ ($\psi(T)$ — сколь угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция).

Гипотеза Линделёфа ([5], стр. 97, 323) заключается в том, что

$$|\zeta(\tfrac{1}{2}+it)|<A(\varepsilon)t^{\varepsilon},\quad t\geqslant T_0(\varepsilon),$$

для любого $\varepsilon>0$. Далее напомним (см. [2], стр. 89), что для справедливости гипотезы Линделёфа необходимо и достаточно, чтобы при любом $x > 0$, $1 \leqslant x < t$,

$$(4) \qquad \Big|\sum_{n\leqslant x} e^{it\ln n}\Big| < A(\varepsilon)\sqrt{x}t^{\varepsilon}.$$

Из (1), (4) немедленно следует, что в случае справедливости гипотезы Линделёфа имеем

$$(5) \qquad |S(a, b)| < A(\varepsilon)\sqrt{a}\,t^{\varepsilon}.$$

Теперь полагая в (3), $\Delta = \varepsilon$, получаем утверждение теоремы.

2. В этой части получим уточнение $O(T^{\Delta}\ln T)$ остаточного члена в [4], (11). Вводя вместо [4], (35) соотношение

$$(35') \qquad \bar{n} = \left[\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\Delta}\right] \sim \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\Delta},$$

т.е.

$$(36') \qquad \ln\bar{n} \sim \Delta\ln\frac{T}{2\pi},$$

получается

$$(41') \qquad |S_1| < A(\Delta)T^{\Delta/2}\ln T,$$

и, следовательно, в силу [4], (46) имеет место

Лемма 3′.

$$\Big|\sum \frac{\operatorname{ctg}(\omega/2)}{\sqrt{n}}\sin\varphi\Big| < A(\Delta)T^{\Delta}\ln T.$$

Из этой леммы получаем

$$(51') \qquad |\tilde{W}(T, H)| < A(\Delta)T^{\Delta}\ln T.$$

Тепер, в силу (51′), из соотношения [4], (26), получается уточнение $O(T^{\Delta}\ln T)$ остаточного члена в [4], (11).

Литература

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), стр. 119–196.

[2] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Москва 1975.

[3] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43.

[4] — *Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. стр. 45–51.

[5] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.