

- [3] G. Gras, *Sur les l-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l*, Ann. Inst. Fourier 23, 3 (1973), pp. 1-48.
- [4] — *Sur les l-classes d'idéaux des extensions non galoisiennes de Q de degré premier impair l à clôture galoisiennes diédrale de degré 2l*, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), pp. 677-685.
- [5] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Würzburg/Wien 1970.
- [6] K. Iimura, *Dihedral extensions of Q of degree 2l which contain non-Galois extensions with class number not divisible by l*, Acta Arith., this volume, pp. 385-394.
- [7] S. Kobayashi, *On the l-class rank in some algebraic number fields*, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), pp. 668-676.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
 TOKYO METROPOLITAN UNIVERSITY
 2-1-1 Fukazawa, Setagaya-ku
 Tokyo, Japan

Received on 18. 3. 1977

(924)

Добавление к работе: „Об одной теореме Харди-Литтлвуда
 в теории дзета-функции Римана”

Acta Arith. 31 (1976), стр. 45-51

Ян Мозер (Братислава)

1. Харди и Литтлвуд ([1], 177-184) доказали следующую теорему:
 отрезок

$$\frac{1}{2} + iT, \frac{1}{2} + i(T + T^{1/4+\varepsilon}), \quad T \geq T_0(\varepsilon),$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$. При этом, метод предложенный упоминавшимися учеными оставлял открытым вопрос о влиянии гипотезы Линделёфа на расстояния нечетных нулей функции $\zeta(\frac{1}{2} + it)$.

В этом направлении покажем, что имеет место

ТЕОРЕМА. Если справедлива гипотеза Линделёфа, то отрезок

$$\frac{1}{2} + iT, \frac{1}{2} + i(T + T^{1/8+\varepsilon}), \quad T \geq T_0(\varepsilon),$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$.

Пусть

$$(1) \quad S(a, b) = \sum_{0 < a \leq n < b \leq 2a} e^{it \ln n}, \quad b \leq \sqrt{\frac{t}{2\pi}},$$

(ср. [3], стр. 33, 34) обозначает элементарную тригонометрическую сумму. В работе [4] мы показали, что при условии

$$(2) \quad |S(a, b)| < A(\Delta) \sqrt{at^d}, \quad 0 < \Delta < \frac{1}{4},$$

отрезок

$$(3) \quad \frac{1}{2} + iT, \frac{1}{2} + i(T + T^{1/8+4/2} \psi(T)), \quad T \geq T_0(\Delta, \psi),$$

содержит нечетный нуль функции $\zeta(s)$ ($\psi(T)$ — сколько угодно медленно возрастающая к $+\infty$ функция).

Гипотеза Линделёфа ([5], стр. 97, 323) заключается в том, что

$$|\zeta(\frac{1}{2} + it)| < A(\varepsilon) t^\varepsilon, \quad t \geq T_0(\varepsilon),$$

для любого $\varepsilon > 0$. Далее напомним (см. [2], стр. 89), что для

справедливости гипотезы Линделёфа необходимо и достаточно, чтобы при любом $x > 0$, $1 \leq x < t$,

$$(4) \quad \left| \sum_{n \leq x} e^{it \ln n} \right| < A(\varepsilon) \sqrt{x t^\varepsilon}.$$

Из (1), (4) немедленно следует, что в случае справедливости гипотезы Линделёфа имеем

$$(5) \quad |S(a, b)| < A(\varepsilon) \sqrt{a t^\varepsilon}.$$

Теперь полагая в (3), $\Delta = \varepsilon$, получаем утверждение теоремы.

2. В этой части получим уточнение $O(T^d \ln T)$ остаточного члена в [4], (11). Вводя вместо [4], (35) соотношение

$$(35') \quad \bar{n} = \left[\left(\frac{T}{2\pi} \right)^d \right] \sim \left(\frac{T}{2\pi} \right)^d,$$

т.е.

$$(36') \quad \ln \bar{n} \sim d \ln \frac{T}{2\pi},$$

получается

$$(41') \quad |S_1| < A(\Delta) T^{\Delta/2} \ln T,$$

и, следовательно, в силу [4], (46) имеет место

ЛЕММА 3'.

$$\left| \sum \frac{\operatorname{ctg}(\omega/2)}{\sqrt{n}} \sin \varphi \right| < A(\Delta) T^{\Delta} \ln T.$$

Из этой леммы получаем

$$(51') \quad |\tilde{W}(T, H)| < A(\Delta) T^{\Delta} \ln T.$$

Теперь, в силу (51'), из соотношения [4], (26), получается уточнение $O(T^d \ln T)$ остаточного члена в [4], (11).

Литература

- [1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), стр. 119–196.
- [2] А. А. Карацуба, *Основы аналитической теории чисел*, Москва 1975.
- [3] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43.
- [4] — *Об одной теореме Харди-Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, *ibid.* стр. 45–51.
- [5] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

Les volumes IV et suivants sont à obtenir chez
Volumes from IV on are available at
Die Bände IV und folgende sind zu beziehen durch
Томы IV и следующие можно получить через

Ars Polona, Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

Les volumes I–III sont à obtenir chez
Volumes I–III are available at
Die Bände I–III sind zu beziehen durch
Томы I–III можно получить через

Johnson Reprint Corporation, 111 Fifth Ave., New York, N. Y.

BOOKS PUBLISHED BY THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES INSTITUTE OF MATHEMATICS

- S. Banach, *Oeuvres*, vol. I, 1967, 381 pp.; vol. II, 1979, 470 pp.
- S. Mazurkiewicz, *Travaux de topologie et ses applications*, 1969, 380 pp.
- W. Sierpiński, *Oeuvres choisies*, vol. I, 1974, 300 pp.; vol. II, 1975, 780 pp.; vol. III, 1976, 688 pp.
- J. P. Schauder, *Oeuvres*, 1978, 487 pp.

MONOGRAFIE MATEMATYCZNE

27. K. Kuratowski i A. Mostowski, *Teoria mnogości*, 3rd ed., 1978, 470 pp.
41. H. Rasiowa and R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*, 3rd ed., revised, 1970, 520 pp.
43. J. Szarski, *Differential inequalities*, 2nd ed., 1967, 256 pp.
44. K. Borsuk, *Theory of retracts*, 1967, 251 pp.
45. K. Maurin, *Methods of Hilbert spaces*, 2nd ed., 1972, 570 pp.
47. D. Przeworska-Rolewicz and S. Rolewicz, *Equations in linear spaces*, 1968, 380 pp.
50. K. Borsuk, *Multidimensional analytic geometry*, 1969, 443 pp.
51. R. Sikorski, *Advanced calculus. Functions of several variables*, 1969, 460 pp.
52. W. Ślebodziński, *Exterior forms and their applications*, 1970, 427 pp.
53. M. Krzyżański, *Partial differential equations of second order I*, 1971, 562 pp.
54. M. Krzyżański, *Partial differential equations of second order II*, 1971, 407 pp.
57. W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, 1974, 630 pp.
58. C. Bessaga and A. Pełczyński, *Selected topics in infinite-dimensional topology*, 1975, 353 pp.
59. K. Borsuk, *Theory of shape*, 1975, 379 pp.
60. R. Engelking, *General topology*, 1977, 626 pp.

BANACH CENTER PUBLICATIONS

- Vol. 1. *Mathematical control theory*, 1976, 166 pp.
- Vol. 2. *Mathematical foundations of computer science*, 1977, 259 pp.
- Vol. 3. *Mathematical models and numerical methods*, 1978, 391 pp.
- Vol. 4. *Approximation theory*, 1979, 314 pp.
- Vol. 5. *Probability theory*, 1979, 289 pp.
- Vol. 6. *Mathematical statistics*, in print.
- Vol. 7. *Discrete mathematics*, in print.
- Vol. 8. *Spectral theory*, in print.