**References**

[1] G. Fellegara, *Gli ovaloidi in uno spazio tridimensionale di Galois di ordine 8*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Fis. Mat. Natur 32 (1962), pp. 170–176.
[2] B. Segre, *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two*, Acta Arith. 5 (1959), pp. 315–332.
[3] J. Tits, *Ovoides et groupes de Suzuki*, Arch. Math. 13 (1962), pp. 187–198.

*Received on 19. 10. 1976* (885)

ACTA ARITHMETICA
XXXV (1979)

# Fast konstante Folgen

von

H. Rindler (Wien)

In dieser Arbeit geben wir einen Beweis eines Resultats von Rauzy, [2], über gleichverteilte Folgen mod 1, der sich auf den Fall der Gleichverteilung in kompakten Gruppen übertragen läßt. Wir zeigen ein analoges Resultat für $\boldsymbol{R}^n$, in $\boldsymbol{Z}$ ist die Situation anders. Allgemeines zur Theorie der Gleichverteilung findet man in [1].

Sei

$M$ die Menge aller glv. Folgen mod 1,

$C$ die Menge aller Folgen $(c_n)$ mit $(x_n) \in M \Rightarrow (c_n + x_n) \in M$,

$C^0$ die Menge aller Folgen $(c_n)$: $\exists a > 1$ mit $c_n = c_m$, wenn für ein $k \in \boldsymbol{N}$ gilt: $a^{k-1} \leqslant n, m < a^k$.

Sei

$$d(u, v) = \min\{|u - v - k|, k \in \boldsymbol{Z}\}, \quad u, v \in \boldsymbol{R},$$

$$g\big((c_n), (d_n)\big) = \overline{\lim}(1/N) \sum_{n \leqslant N} d(c_n, d_n).$$

Theorem 0 (Rauzy). *Folgende Bedingungen sind äquivalent*

(i) $(c_n) \in C$;

(ii) *Für* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, *sodaß für jede Indexfolge* $n_k$ *mit* $n_{k+1}/n_k \to a$, $1 < a < 1 + \delta$:

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}(1/n_k) \sum_{h \leqslant k} \inf_{y \in \boldsymbol{R}} \sum_{n_h \leqslant n < n_{h+1}} d(c_n, y) < \varepsilon;$$

(iii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (d_n) \in C^0$ *mit* $g\big((c_n), (d_n)\big) < \varepsilon$.

Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist einfach zu zeigen. (iii) $\Rightarrow$ (i) folgt sofort aus Lemma 1. Der nichttriviale Teil des Beweises ist die Implikation (i) $\Rightarrow$ (ii). Wir benötigen dazu Lemmata 2–4.

Lemma 1. $C^0 \subseteq C$.

Beweis. Sei $h_k(x) = e^{2\pi ikx}$, $(c_n) \in C^0$, dann gilt

$$(1/N) \sum_{n \leqslant N} h_k(c_n + x_n)$$
$$= (1/N) \sum_{n<N} \big(h_k(c_n) - h_k(c_{n+1})\big) \sum_{j \leqslant n} h_k(x_j) + h_k(c_N)(1/N) \sum_{j \leqslant N} h_k(x_j).$$

Der 1. Ausdruck auf der rechten Seite geht gegen 0, da $(c_n) \in C^0$. Aus dem Weyl'schen Kriterium folgt daher: $(x_n) \in M \Leftrightarrow (c_n + x_n) \in M$.

Lemma 2. *Sei $M_k$ eine Indexfolge, $M_{k-1} < M_k$, $M_{k-1}/M_k \to 1$, dann gilt für jede Bijektion $p: N \to N$ mit $M_{k-1} \leqslant n < M_k \Rightarrow M_{k-1} \leqslant p(n) < M_k$*

(i) $(x_n) \in M \Leftrightarrow (x_{p(n)}) \in M$,

(ii) $(c_n) \in C \Leftrightarrow (c_{p(n)}) \in C$.

Beweis. Es genügt (i) zu zeigen:

$$(1/N) \sum_{n \leqslant N} h(x_n) = (1/N) \sum_{n \leqslant N} h(x_{p(n)}), \quad \text{für} \quad N = M_k;$$

für $M_{k-1} \leqslant N < M_k$ ist der Unterschied beider Summen von der Größenordnung $(M_k - M_{k-1})/M_k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Lemma 3. *Für $z_1, z_2, \ldots, z_m$ gelte:*

$$\sum_{n \leqslant m} d(z_n, z_t) \geqslant b \quad \text{für} \quad 1 \leqslant t \leqslant m,$$

*dann gibt es eine Permutation $p$ mit: $\sum_{n<m} d(z_{p(n)}, z_{p(n+1)}) \geqslant b$.*

Beweis. Sei $S_1 = \sum_{t \leqslant m} \sum_{n \leqslant m} d(z_n, z_t)$, $S_2 = \sum_{p \in \mathfrak{S}(m)} \sum_{i<n} d(z_{p(i)}, z_{p(i+1)})$, dann gilt $S_2 = (m-1)!mb$ und Lemma 3 folgt, da $\mathfrak{S}(m)$ $m!$ Elemente hat.

Lemma 4. $(c_n) \in C \Rightarrow \lim (1/N) \sum_{n<N} d(c_n, c_{n+1}) = 0$.

Beweis. Siehe [4], Prop. 5 (Dort wurde ein analoges Resultat für kompakte metrische Gruppen Gegezeigt. Für $G = \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ ist der Beweis einfach).

Wir nehmen nun an, daß für eine Folge $(c_n)$ Theorem 0, (ii) nicht gilt. Es gibt daher ein $c > 0$, sodaß für alle $m \in N$ eine Indexfolge $n_h$ und ein $k$ existiert (wir setzen $N_m = n_k$) mit:

(1) $$\sum_{h<k} \inf_{y \in \boldsymbol{R}} \sum_{n_h \leqslant n < n_{h+1}} d(c_n, y) \geqslant cn_k, \quad \forall h \text{ gilt: } 1 < n_{h+1}/n_h \leqslant 1 + 1/m.$$

(2) Wir können annehmen, daß $N_{m-1}/N_m \to 0$ $(n \to \infty)$.

Wegen Lemma 3 gibt es eine Permutation $p_m$: $n_h \leqslant n < n_{h+1} \Rightarrow$ $\Rightarrow n_h \leqslant p_m(n) < n_{h+1}$ mit:

(3) $$\sum_{n<N_m} d(c_{p_m(n)}, c_{p_m(n+1)}) \geqslant cN_m.$$



Definiert man nun $p: N \to N$ durch $p(n) = p_m(n)$, $N_{m-1} \leqslant k < N_m$, dann gilt wegen (2) und (1)

(4) $$\overline{\lim_{N \to \infty}} (1/N) \sum_{n<N} d(c_{p(n)}, c_{p(n+1)}) \geqslant c.$$

Lemma 4 $\Rightarrow (c_{p(n)}) \notin C$ und wegen Lemma 2 auch $(c_n) \notin C$. ∎

Ist nun $G$ eine kompakte metrische Gruppe, sind $M(G)$, $C(G)$, ... u.s.w. analog definiert (auf $G$ existiert eine biinvariante Metrik), dann kann man dieselbe Fragestellung wie in Theorem 0 untersuchen.

Theorem 1. *Theorem 0 läßt sich auf kompakte metrische Gruppen übertragen.*

Beweis. Lemma 1 folgt aus dem Weyl'schen Kriterium ([1], Ch. 4, Th. 1.2) Lemma 2 und Lemma 3 gelten allgemein, Lemma 4 siehe [4], Prop. 5; $C(G)$ ist für nicht-abelsche Gruppen zwar etwas anders definiert, der Beweis läßt sich unter Benützung einer invarianten Metrik sofort übertragen und wird sogar kürzer).

Wir betrachten nun die Fälle $G = \boldsymbol{R}^n$, $\boldsymbol{Z}$.

Bezeichnet $M(\boldsymbol{Z})$ die Menge aller Folgen ganzer Zahlen $(x_n)$ mit $(x_n)$ ist glv. mod$m$ für $m = 1, 2, 3, \ldots$ so zeigt das Beispiel $(c_n) = (n!)$, daß hier kein Analogon zu Theorem 1 gilt. Für $M(\boldsymbol{R})$ der Menge aller Folgen $(x_n)$, mit $(x_n)$ ist glv. mod$x$ für alle $x > 0$ und für $M(\boldsymbol{R}^n)$ (analog definiert) gilt aber:

Theorem 2. *Die Aussage von Theorem 0 bleibt richtig für $G = \boldsymbol{R}^n$, wenn $d$ eine beschränkte invariante Metrik ist.*

Beweis. (A) $n = 1$: Wir setzten $M = M(\boldsymbol{R})$, $M_x = M(\boldsymbol{R}/x\boldsymbol{Z})$, $x > 0$, $C = C(\boldsymbol{R})$, $C_x = C(\boldsymbol{R}/x\boldsymbol{Z})$, $d_x(u, v) = \min\{|u - v - kx|, \ k \in \boldsymbol{Z}\}$, $d(u, v) = \min\{|u - v|, 1\}$ und definieren entsprechend $g\big((c_n), (d_n)\big)$ bzw. $g_x$.

Lemma 5. *$C \subseteq C_x$ für alle $x > 0$.*

Beweis. Sei $(c_n) \in C$, $(x_n) \in M_x$ gegeben. $\exists (y_n) \in M$, $y_n \equiv x_n (\mathrm{mod}\, x)$ ([3], Th. 2). $(c_n) \in C \Rightarrow (c_n + x_n) \in M \Rightarrow (c_n + y_n) \in M_x \Rightarrow (c_n + x_n) \in M_x$.

Lemma 6. *Beim Beweis non Theorem 2 können wir annehmen $(c_n) \in \boldsymbol{Z}$.*

Beweis. Sei $d_n = c_n - [c_n]$, $\Rightarrow d_n \equiv c_n (\mathrm{mod}\, 2) \Rightarrow (d_n) \in C_2$; (Th.0)$\Rightarrow$ $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists (e_n) \in C_2^0$, $g_2\big((d_n), (e_n)\big) < \varepsilon \Rightarrow g\big((d_n), (e_n)\big) < \varepsilon$, denn $d\big((d_n), (e_n)\big)$ $= d_2\big((d_n), (e_n)\big)$. Da $C$ eine Gruppe bzgl. koordinatenweiser Addition ist $\big((x_n) \in M \Rightarrow (-x_n) \in M\big)$ liegt $([c_n]) = (c_n - d_n)$ in $C$ und Lemma 6 folgt unmittelbar.

Lemma 7. *Sei $s_i \in \boldsymbol{Z}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $s_i \neq 0$*

$$A = \Big\{z\colon 0 \leqslant z \leqslant 1, \ \sum_{i \leqslant m} d_z(s_i, 0) < mu/2\Big\}$$

*dann gilt für das Maß von $A$:*

$$|A| < 6u|\log u|.$$

Beweis. 1) $m = 1$: Sei $s_1 = s$, $A_{s,n} = \{z\colon (s-u)/n < z < (s+u)/n\}$, dann gilt $A_s = A(2u) = \bigcup_n A_{s,n} \cap [0, 1]$. Wesentlich sind nur die $A_{s,n}$ mit $u \leqslant s/n \leqslant 1$ und es gilt:

$$|A_s| \sim 2 \sum_{s\leqslant n\leqslant s/u} 1/n \sim 2u|\log u|.$$

Für $u \leqslant u_0$ gilt daher $|A_s| < 3u|\log u|$.

2) Für $m > 1$ sei $A_i = A_{s_i}$ wie in 1). $z \in A \Rightarrow z \in A_i$ für mindesten $m/2$ der $A_i$, daher gilt:

$$(m/2)|A| \leqslant \sum_i |A_i| < 3m|\log u|u.$$

Wir benötigen Lemma 7 für den Fall $u = 1/40$ $(\leqslant u_0)$

(5) Für $u = 1/40$ gilt $|A| < 2/3$.

Sei nun $E_{m,N,\varepsilon} = \{z\colon 0 \leqslant z \leqslant 1$, für $\forall k \geqslant N$, für $\forall a$ mit $1 < a < 1+1/m$ gibt es eine Folge $(d_n)$, $d_n = d_j$ für $a^h \leqslant n$, $j < a^{h+1}$, $h = 1, 2, 3, \ldots$, sodaß $\sum_{n\leqslant k} d_z(c_n, d_n) < k\varepsilon$ gilt$\}$.

Aus Theorem 1, (iii) und Lemma 5 folgt

(6) $\bigcup_{m,N} E_{m,N,\varepsilon} = [0, 1]$ für $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m, N\colon |E_{m,N,\varepsilon}| > 2/3$.

Bei festem $a$ gilt: $d_n = d_k$, $k = k(z, h)$. Sei

$$\sum_{a^h\leqslant n<a^{h+1}} d_z(c_n, d_k) = (a^{h+1}-a^h)u(z),$$

dann gilt für mindestens $(a^{h+1}-a^h)/2$ der $n$:

$$d_z(c_n, d_k) \leqslant 2u(z).$$

Daher gilt für alle $z, x \in E_{m,N,\varepsilon}$:

$$d_z(d_{k(z,h)}, d_{k(x,h)}) \leqslant 2u(z)+2u(x).$$

Hält man ein $x$ fest und wählt man $d_n = d_k$, $k = k(x, h) = k(h)$ folgt:

(7) Für $z \in E_{m,N,\varepsilon}$ gilt $\sum_{n\leqslant j} d_z(c_n, d_n) < 5j\varepsilon$, $j \geqslant N$, $1 < a < 1+1/m$.

Beachtet man nun, daß $\sum_{n\leqslant k} d(c_n, d_n) = \sum_{n\leqslant k} d\big((c_n-d_n), 0\big)$ gilt, und $c_n$ wegen Lemma 6 ganz gewählt werden kann, daher auch $d_n$ ganz gewählt werden kann (wie man leicht sieht), ist die Summe gleich der Anzahl der $(c_n-d_n) \neq 0$ $(d(c_n, d_n) \leqslant 1!)$ und Lemma 7 gemeinsam mit (5)–(7) liefert daher

(8) Für $k \geqslant N$, $1 < a < 1+1/m$ gilt $\sum_{n\leqslant k} d(c_n, d_n) < 400k\varepsilon$.



Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt der Fall (A) aus Lemma 1 für $G = \boldsymbol{R}$.

(B) $G = \boldsymbol{R}^n$, $n > 1$: Ist $(x_n)$ gleichverteilt in $\boldsymbol{R}^n$, dann gilt für jeden nichttrivialen Charakter $h$ $h(x_n)$ ist glv. in $M\big(h(\boldsymbol{R}^n)\big) = M(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$, umgekehrt gibt es zu jeder glv. Folge in $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ ein glv. Urbild ([3], Th. 1, und Bemerkung am Ende der Arbeit), daher gilt $h(c_n) \in C(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})$. Betrachtet man nur jene Charaktere die von der $k$-ten Komponente von $\boldsymbol{R}^n$ abhängen $(1 \leqslant k \leqslant n)$, folgt, daß die Projektion der Folge $(c_n)$ auf die $k$-te Komponente in $C(\boldsymbol{R})$ liegt. (A) $n$-mal angewandt liefert den Fall (B).

Ist $G$ eine lokalkompakte Gruppe und $M(G)$ die Menge aller gleichverteilten Folgen im Sinne von Hartman d.h.:

Für alle irreduziblen unitären, stetigen nichttrivialen Darstellungen $D$ von $G$ gilt

$$\lim_N (1/N) \sum_{n\leqslant N} D(x_n) = 0$$

dann kann ein zu Theorem 1 analoges Resultat nur gelten, wenn es für jedes $x \neq 1$ ein $D$ gibt mit $D(x) \neq D(1)$. Z. b. gilt für die Gruppe aller projektiven Transformationen: Jede Folge ist Hartman-glv. (es gibt kein nicht-triviales $D$).

### Literaturverzeichnis


[1] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, John Wiley & Sons, New York 1974.

[2] G. Rauzy, *Étude de quelques ensembles de fonction définis par des propriétés de moyenne*, Séminaire de Théorie des Nombres, Univ. do Bordeaux, 1972/73, Exp. 20.

[3] H. Rindler, *Uniformly distributed sequences in quotient groups*, Acta Sci. Math. 38 (1976), S. 153–156.

[4] — *Ein Problem aus der Theorie der Gleichverteilung I*, Monatshsh. für Math. 78 (1974), S. 51–67.


MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT WIEN
Wien, Austria

*Eingegangen am 26. 10. 1976* (887)