[23] H.-H. Ostmann, *Additive Zahlentheorie I*, Springer, Berlin—Göttingen—Heidelberg 1956.
[24] A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen I, II, III*, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922), S. 77–98, 250–251; 4 (1926), S. 224.
[25] I. I. Pjateckii-Shapiro, *Über die Verteilung von Primzahlen in Folgen der Form* $[f(n)]$, Math. Sb. 33 (1953), S. 559–566.
[26] G. J. Rieger, *Über die natürlichen und primen Zahlen der Gestalt* $[n^c]$ *in arithmetischer Progression*, Arch. Math. 18 (1967), S. 35–44.
[27] W. Schwarz, *Einführung in Siebmethoden der analytischen Zahlentheorie*, Bibliographisches Institut, Mannheim—Wien—Zürich 1974.
[28] A. Selberg, *On elementary methods in prime number theory and their limitations*, In: *Den 11-te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim 1949*, Johan Grundt Tanums Forlag, Oslo 1952; S. 13–22.
[29] D. Shanks, *On numbers of the form* n^4+1, Math. Comp. 15 (1961), S. 186–189.
[30] D. Wolke, *Multiplikative Funktionen auf schnell wachsenden Folgen*, J. Reine Angew. Math. 251 (1971), S. 54–67.
[31] E. M. Wright, *A class of representing functions*, J. London Math. Soc. 29 (1954), S. 63–71.
[32] J.-M. Deshouillers, *Nombres premiers de la forme* $[n^c]$, C. R. Acad. Sci. Paris 282 (1976), S. A131–A133.
[33] D. Nordon, *Nombres premiers de la forme* $[un^2]$, Arch. Math. 28 (1977), S. 395–400.

Eingegangen am 4. 8. 1976 (867)

ACTA ARITHMETICA
XXXV (1979)

Об основных единицах алгебраических полей n-го порядка

Э. Т. Аванесов (Кисловодск)

Рассмотрим диофантово уравнение

$$x^n+\sum_{i=1}^{n} p_i x^{n-i} y^i = 1, \tag{1}$$

где $n \geqslant 3$, p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — целые рациональные числа.

На основании известных результатов Бейкера [1] для возможных целых решений (x, y) уравнения (1) справедлива следующая оценка

$$\max(|x|, |y|) < \exp(n^{\nu^2} M^{\nu n^3}),$$

где $\nu = 32n\tau^2/(\tau-n-1)$, $\tau > n+1$ — произвольно, $M = \max\limits_i |p_i|$.

С алгебраической точки зрения решение уравнения (1) сводится к разысканию в кольце $O(\lambda)$, где λ — произвольный корень неприводимого уравнения

$$\lambda^n = p_1\lambda^{n-1} - p_2\lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} p_{n-1}\lambda + (-1)^{n-1} p_n, \tag{2}$$

имеющего дискриминант D_λ, единиц специального двучленного вида $\varepsilon = x+y\lambda$.

Без ограничения общности можно рассматривать кольцо $O(\lambda)$ со степенным базисом $\{1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}\}$.

Тогда в силу теоремы Дирихле для любой единицы $\varepsilon = x_0+x_1\lambda+ +\ldots+x_{n-1}\lambda^{n-1}$ кольца $O(\lambda)$

$$\varepsilon = \zeta\varepsilon_1^{\alpha_1}\varepsilon_2^{\alpha_2}\ldots\varepsilon_{s+t-1}^{\alpha_{s+t-1}}, \tag{3}$$

где ζ — некоторый содержащийся в $O(\lambda)$ корень из 1, s — число вещественных корней, t — число пар комплексных корней уравнения (2); $n = s+2t$, все x_i — целые, α_i $(i = 1, 2, \ldots, s+t-1)$ — произвольные целые рациональные числа, ε_i $(i = 1, 2, \ldots, s+t-1)$ составляют систему основных единиц кольца $O(\lambda)$.

Таким образом задача нахождения целых решений (1) или двучленных единиц $O(\lambda)$, что одно и то же с алгебраической точки зрения, опирается на определение основных единиц этого же кольца.

Известные ([2], [3], [5], [6]) методы получения основных единиц алгебраических полей касаются, главным образом, случая $n = 3$ и определяют последовательность действий, необходимых для их нахождения.

Производимые в этих работах конструкции носят, в основном, описательный характер, а распространение их на произвольные поля более высокой степени либо практически невозможно, либо обусловлено чрезвычайной громоздкостью аппарата.

С другой стороны, в [7] установлены оценки максимума модулей логарифмов независимых единиц.

Цель предлагаемой работы:

1) получение явных оценок компонент x_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ единиц $x_0 + x_1\lambda + \ldots + x_{n-1}\lambda^{n-1}$, не являющихся степенями какой-либо единицы кольца $O(\lambda)$.

Определяемый таким путем набор единиц позволяет во многих случаях осуществить непосредственное построение системы основных единиц кольца.

2) Рассмотрение для найденных оценок некоторых непосредственных приложений в теории диофантовых уравнений и в решении задачи о тождественности двух алгебраических полей n-го порядка.

Очевидно, возможно и дальнейшее понижение полученных оценок.

1. Отношение компонент x_i. Рассмотрим случай, когда $n = s$, $t = 0$. Приводимые далее рассуждения распространяются и на всякие другие случаи.

Пусть λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — корни (2) и $\varepsilon = x_0 + \ldots + x_{n-1}\lambda^{n-1}$ единица кольца $O(\lambda)$, тогда её норма равна

$$\operatorname{Norm}\varepsilon = \prod_{i=1}^{n} (x_0 + x_1\lambda_i + \ldots + x_{n-1}\lambda_i^{n-1}) = \pm 1.$$

Обозначим:

$$
\begin{aligned}
\xi^{(1)} &= x_0 + x_1\lambda_1 + \ldots + x_{n-1}\lambda_1^{n-1},\\
\xi^{(2)} &= x_0 + x_1\lambda_2 + \ldots + x_{n-1}\lambda_2^{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\xi^{(n)} &= x_0 + x_1\lambda_n + \ldots + x_{n-1}\lambda_n^{n-1}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Следуя [2], [3], введем в рассмотрение последовательности $\{1\}^{(k)}$, где $\xi^{(k)} > 1$, $|\xi^{(i)}| < 1$, $i \neq k$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

Как указано в [2], [3], последовательности $\{1\}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяют такие „наименьшие" единицы ε_k, каждая из которых не является степенью какой-либо единицы кольца $O(\lambda)$.

Имеет место

Лемма 1. *Справедлива формула (принято $p_0 = 1$)*

$$\sum_{\substack{1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_j \leqslant n \\ a_m \neq k}} \lambda_{a_1}\lambda_{a_2}\ldots\lambda_{a_j} = f_{j-1}(\lambda_k) = \sum_{l=0}^{j-1} (-1)^{j+l} p_{j-1-l}\lambda_k^l;$$

$$j = 1, 2, \ldots, n.$$

Непосредственное вычисление дает:

$$A_{k,m} = (-1)^{k+m-1} W_{n-1} f_m(\lambda_k),$$

где $A_{k,m}$ — алгебраические дополнения k-й строки определителя Δ системы (4); $m = 0, 1, \ldots, n-1$; $W_{n-1} = \prod_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n \\ i, j \neq k}} (\lambda_i - \lambda_j)$ — определитель Вандермонда, и в силу неприводимости (2) будет $f_m(\lambda_k) \neq 0$, а значит, и все $A_{k,m} \neq 0$.

Из сравнения решений системы неравенств

$$-1 < \xi^{(i)} < 1, \quad i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n$$

с решениями системы

$$\xi^{(i)} = 0, \quad i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $|\Delta| = 2^{-t}\sqrt{|D_\lambda|} \neq 0$, вытекает

Лемма 2. *Отношение компонент x_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ единицы ε_k, не являющейся степенью какой-либо единицы из $O(\lambda)$, приближенно равно отношению алгебраических дополнений $A_{k,m}$ $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$.*

Составив отношение $A_{k,m}$, находим с учетом лемм 1 и 2:

Теорема 1. *Пусть единица $\varepsilon_k = x_0 + x_1\lambda + \ldots + x_{n-1}\lambda^{n-1} \in \{1\}^k$ не является степенью какой-либо единицы. Имеет место приближенное равенство*

$$x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_{n-2} : x_{n-1} \approx \frac{p_n}{\lambda_k} : \Big(-\sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i p_{n-2-i}\lambda_k^i\Big) :$$

$$: \Big(\sum_{j=0}^{n-3} (-1)^j p_{n-3-j}\lambda_k^j\Big) : \ldots : \big((-1)^{n-2}(p_1 - \lambda_k)\big) : (-1)^{n-1}.$$

Отметим, что для практических расчетов интересен следующий факт, устанавливаемый аналогично теореме 1.

Теорема 1*. *Пусть $n = 3$, $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = A$. Тогда* (см. [6]) *для положительной обратной основной единицы*

$$\varepsilon = x_0 + x_1\sqrt[3]{A} + x_2(\sqrt[3]{A})^2 > 1$$

кольца $O(\sqrt[3]{A})$ *со степенным базисом* $\{1, \sqrt[3]{A}, (\sqrt[3]{A})^2\}$ *справедливо приближенное равенство*

$$x_0 : x_1 : x_2 \approx (\sqrt[3]{A})^2 : \sqrt[3]{A} : 1.$$

Замечание. С возрастанием $\xi^{(k)}$ растет и степень точности приближенного равенства в теореме 1.

2. Оценка x_i через x_{n-1}. Нижеследующие леммы 3-6 используются при выводе оценок этого параграфа, доказательства их ввиду элементарности опускаем.

Лемма 3. *Общий член последовательности*

$$u_1 = 0, \quad u_{k+1} = u_k + (k-1), \quad k = 1, 2, \ldots$$

задается формулой:

$$u_k = \tfrac{1}{2}(k-1)(k-2), \quad k = 1, 2, \ldots$$

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\prod_{i=1, i\neq k}^{n} (\lambda_k - \lambda_i) = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{n} (-1)^j j p_j \lambda_k^{n-j}.$$

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\prod_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant n \\ i,j\neq k}} (\lambda_i - \lambda_j) = \frac{\lambda_k \sqrt{|D_\lambda|}}{\sum\limits_{l=1}^{n} (-1)^l l p_l \lambda_k^{n-l}}.$$

Лемма 6. *Пусть*

$$S(k, i) = \sum_{1\leqslant \alpha_0\leqslant \alpha_1\leqslant \ldots\leqslant \alpha_{i-1}\leqslant n-k+i} \lambda_{\alpha_0}\lambda_{\alpha_1}\ldots\lambda_{\alpha_{i-1}};$$

$$i = 1, 2, \ldots, k-2, k-1; \quad k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Тогда

$$\sum_{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}} 1 = C_{n-k+i}^{i},$$

где символ C_a^b *означает число сочетаний из* a *элементов по* b, *причем для определенности принято* $C_{n-k}^0 = 1$.

Предварительно находим оценку x_0 через x_{n-1}, для чего из системы неравенств

$$-1 < \xi^{(i)} < 1, \quad i \neq k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

исключаем неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$.

Последовательно получаемые в процессе исключения укороченные системы неравенств мы располагаем таким образом, чтобы первыми были неравенства, имеющие преимущество в так называемом „лексикографическом” смысле.

Тогда для исключения, например, неизвестного x_i умножаем первое неравенство на $\lambda_{i+1}\prod_{j=1}^{i-1}(\lambda_j - \lambda_{i+1})$, второе неравенство на $\lambda_i\prod_{j=1}^{i-1}(\lambda_j - \lambda_i)$ и т.д.

В полученной после i-го шага системе на первом месте будет неравенство

$$\Big|\prod_{1\leqslant j<l_0\leqslant i+1} (\lambda_j - \lambda_{l_0})\Big\{x_0 + x_{i+1}\prod_{m=1}^{i+1}\lambda_m(\lambda_1 + \ldots + \lambda_{i+1}) +$$
$$+ x_{i+2}\prod_{m=1}^{+1}\lambda_m(\lambda_1^2 + \ldots) + \ldots\Big\}\Big| < F_i,$$

где форма F_i имеет $2^{\frac{1}{2}i(i+1)}$ слагаемых, каждое из которых степени $\frac{1}{2}i(i+1)$.

Полагая $i = 1, 2, \ldots, n-2$ и принимая во внимание леммы 3–5, находим:

$$\left|x_0 + \frac{p_n}{\lambda_k}x_{n-1}\right| < \frac{2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}{\sqrt{|D_\lambda|}}\left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i i p_i \lambda_k^{n-i}\right| |\lambda_k|^{\frac{1}{2}n(n-3)}. \tag{6}$$

При выводе оценки x_{n-l} через x_{n-1} разбиваем процесс исключения остальных неизвестных на 2 цикла:

1-й цикл — исключение неизвестных $x_0, x_1, \ldots, x_{n-l-1}$.

2-й цикл — исключение неизвестных $x_{n-l+1}, \ldots, x_{n-2}$.

На i-м шаге 1 цикла мы получаем следующую систему (выписываем два первых неравенства):

$$\Big|\prod_{1\leqslant j<l_0\leqslant i+1}(\lambda_j - \lambda_{l_0})\Big(x_i + x_{i+1}\sum_{m=1}^{i+1}\lambda_m + x_{i+2}\sum_{1\leqslant m_1\leqslant m_2\leqslant i+1}\lambda_{m_1}\lambda_{m_2} + \ldots\Big)\Big| < F_i^{(1)},$$

$$\Big|\prod_{\substack{1\leqslant j<l_0\leqslant i+2 \\ l_0\neq i+1}}(\lambda_j - \lambda_{l_0})\Big(x_i + x_{i+1}\sum_{\substack{m=1 \\ m\neq i+1}}^{i+2}\lambda_m + \ldots\Big)\Big| < F_i^{(2)}.$$

Умножая соответственно на $\prod_{j=1}^{i}(\lambda_j - \lambda_{i+2})$ и $\prod_{j=1}^{i}(\lambda_j - \lambda_{i+1})$, исключим x_i, и т.д.

Завершение 1 цикла приведет к следующему „первому” неравенству

$$\Big|\prod_{1\leqslant j<l_0\leqslant n-l+1}(\lambda_j - \lambda_{l_0})\Big(x_{n-l} + x_{n-l+1}\sum_{m=1}^{n-l+1}\lambda_m + \tag{7}$$
$$+ x_{n-l+2}\sum_{1\leqslant m_1\leqslant m_2\leqslant n-l+1}\lambda_{m_1}\lambda_{m_2} + \ldots\Big)\Big| < F_{n-l}^{(1)}.$$

Умножив (7) на $\prod_{j=1}^{n-l}(\lambda_j-\lambda_{n-l+2})\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n-l+1}}^{n-l+2}\lambda_m$, мы тем самым увеличим число слагаемых в правой части дополнительно в $C_{n-l+1}^1=n-l+1$ раз и повысим степень $F_{n-l}^{(1)}$ на дополнительную единицу.

Далее следует произвести умножение 1-го неравенства на

$$\prod_{j=1}^{n-l+1}(\lambda_j-\lambda_{n-l+3})\sum_{1\leqslant m_1\leqslant m_2\leqslant n-l+2}\lambda_{m_1}\lambda_{m_2},$$

что будет соответствовать увеличению количества слагаемых правой части дополнительно в C_{n-l+2}^2 раз и повышению степени на две дополнительные единицы.

Повторяя процедуру $l-2$ раз, получим:

$$(8)\qquad \Big|x_{n-l}+x_{n-1}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^{l+i}p_{l-1-i}\lambda_k^i\Big|<$$

$$<\frac{2^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}\prod_{i=0}^{l-2}C_{n-l+i}^i}{\sqrt{|D_\lambda|}}\Big|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i ip_i\lambda_k^{n-i}\Big|\cdot|\lambda_k|^{\frac{1}{2}\{(n-2)(n-3)+(l-1)(l-2)\}-1},$$

$l=2,3,\ldots,n-1$.

Заметив, что $\max\limits_{\lambda}|\lambda|<1+\dfrac{M}{|p_0|}\leqslant 2M$, получим окончательно:

Теорема 2. *Пусть* $\varepsilon_k=x_0+x_1\lambda+\ldots+x_{n-1}\lambda^{n-1}\in\{1\}^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,n)$ — *единица кольца* $O(\lambda)$, *не являющаяся степенью никакой другой единицы того же кольца, тогда имеют место следующие неравенства, выражающие* x_{n-l} $(l=2,3,\ldots,n)$ *через* x_{n-1}:

$$(9)\qquad \Big|x_{n-l}+x_{n-1}\sum_{i=0}^{l-1}(-1)^{l+i}p_{l-1-i}\lambda_k^i\Big|<\frac{2^{(n-1)(n-3)+\frac{1}{2}(l-1)(l-2)}\prod_{i=0}^{l-2}C_{n-l+i}^i}{\sqrt{|D_\lambda|}}\times$$

$$\times\Big|\sum_{j=1}^{n}(-1)^j jp_j\lambda_k^{n-j}\Big|M^{\frac{1}{2}\{(n-1)(n-4)+(l-1)(l-2)\}};\qquad l=2,3,\ldots,n-1,$$

$$\Big|x_0+\frac{p_n}{\lambda_k}x_{n-1}\Big|<\frac{2^{n^2-3n+1}}{\sqrt{|D_\lambda|}}\Big|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i ip_i\lambda_k^{n-i}\Big|\cdot M^{\frac{1}{2}n(n-3)}.$$

3. Оценка x_{n-1}. Опишем вокруг какой-либо точки O решетки $[1,\lambda,\ldots,\lambda^{n-1}]$ n-мерную сферу возможно большого радиуса r_n, не содержащую ни на своей поверхности, ни внутри себя, кроме точки O, других точек решетки.

Обозначим через R_n радиус n-мерной сферы, описанной из точки O так, что внутри ее будет содержаться „n" базисных точек решетки, и по крайней мере, один основной параллелепипед решетки.

С помощью несложных рассуждений, использующих идеи из [3], легко выводится следующая формула

$$(10)\qquad R_n=\frac{n}{2}\sqrt{(n-1)a_n^2+\left(\frac{2^n v_0^{(n)}}{a_n^{n-1}}\right)^2}=n\sqrt{\frac{n-1}{n}r_n^2+\frac{n^{n-1}\cdot(v_0^{(n)})^2}{r_n^{2n-2}}},$$

где $a_n=2r_n/\sqrt{n}$ — ребро вписанного n-мерного куба, $v_0^{(n)}$ — обём основного параллелепипеда решетки. Отсюда находим:

$$(10^*)\qquad R_n^{(k)}=R_n^{\frac{1}{2}(n-1)^2},$$

здесь $R_n^{(k)}$ — радиус n-мерной сферы, содержащей основной параллелепипед в последовательности $\{1\}^{(k)}$.

Непосредственно устанавливается, что

$$(11)\qquad r_n=r_n'-\delta\leqslant 1,$$

где $\delta>0$ — сколь угодно мало,

$$r_n'=\min_{i\neq j}\{|\lambda^i-\lambda^j|\};\qquad i,j=0,1,\ldots,n-1.$$

Пусть $W=\{w_i\}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — система линейно независимых элементов кольца $O(\lambda)$.

Если $w_i=x_0+x_1\lambda+\ldots+x_{n-1}\lambda^{n-1}\in\{1\}^{(k)}$, то это означает, что $\xi^{(k)}>1$.

С другой стороны, из (10*) получаем:

$$(12)\qquad \xi^{(k)}\leqslant R_n^{(k)}.$$

Имеем систему неравенств

$$|x_{n-1-i}+A_ix_{n-1}|<B_i\qquad (i=1,2,\ldots,n-1),$$

где A_i, B_i, соответственно приняты из (6) и (8).

Составим и оценим выражение

$$|x_{n-1}(\lambda_k^{n-1}-A_1\lambda_k^{n-2}-\ldots-A_{n-2}\lambda_k-A_{n-1})|=$$

$$=\Big|\sum_{i=0}^{n-1}x_i\lambda_k^i-(x_0+A_{n-1}x_{n-1})-$$

$$-(x_1+A_{n-2}x_{n-1})\lambda-\ldots-(x_{n-2}+A_1x_{n-1})\lambda_k^{n-1}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant|x_0+x_1\lambda_k+\ldots+x_{n-1}\lambda_k^{n-1}|+\sum_{i=1}^{n-1}|x_{n-1-i}+A_ix_{n-1}|\,|\lambda_k|^{n-1-i}<$$

$$<|\xi^{(k)}|+\sum_{i=1}^{n-1}B\ |\lambda_k|^{n-1-i},$$

откуда

$$(13)\qquad |x_{n-1}| < X_{n-1}^{(k)} = \frac{R_n^{(k)} + \sum_{i=1}^{n-1} B_i |\lambda_k|^{n-1-i}}{\left|\lambda_k^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-1} A_i \lambda_k^{n-1-i}\right|},$$

где знаменатель равен

$$\left|n\lambda_k^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (n-i) p_i \lambda_k^{n-1-i}\right|,$$

а второе слагаемое числителя

$$\sum_{i=1}^{n-1} B_i |\lambda_k|^{n-1-i} = \frac{2^{\frac12(n-1)(n-2)}}{\sqrt{|D_\lambda|}} \left|\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i i p_i \lambda_k^{n-i}\right| \times$$

$$\times |\lambda_k|^{\frac12(n-1)(n-4)} \left\{|\lambda_k|^{n-2} + \sum_{l=2}^{n-1} |\lambda_k|^{n-l+\frac12(l-1)(l-2)} \prod_{i=0}^{l-2} C_{n-l+i}^i\right\}.$$

Тем самым доказана

Теорема 3. *Компонента x_{n-1} для любого w_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ из выбранной системы W линейно независимых элементов кольца $O(\lambda)$ удовлетворяет неравенству* (13).

4. Приложения. С помощью теорем 1 и 2 устанавливается следующий алгоритм, позволяющий находить единицы $x_0 + x_1\lambda + \ldots + x_{n-1}\lambda^{n-1}$ кольца $O(\lambda)$, принадлежащие последовательности $\{1\}^{(k)}$ и не являющиеся степенью никакой другой единицы.

1. Компоненте x_{n-1} придаются последовательные целые неотрицательные значения $x_{n-1} = 0, 1, 2, \ldots$

2. Соответствующие значения для $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}$ определяются из неравенств (9) с учетом теоремы 1.

3. Пусть ε_k — первая полученная таким образом единица, причем $\xi^{(k)} > 1$. Чтобы убедиться в том, что единица действительно будет „минимальной", нужно произвести дополнительный расчет, для чего продолжим вычисление на 1 шаге, следуя неравенству (13), где положим $R_n^{(k)} = \xi^{(k)}$. Среди всех найденных при этом условии единиц искомой окажется та единица, которая не является степенью другой.

Сочетание теорем 1–3 с § 3 работы [4] определяет алгоритм для решения задачи о тождественности двух алгебраических полей n-го порядка.

1. Пусть λ и μ — соответственно какие-либо из корней неприводимых уравнений (2) и

$$(2^*)\qquad \mu^n = q_1\mu^{n-1} - q_2\mu^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} q_{n-1}\mu + (-1)^{n-1} q_n$$

дискриминантов D_λ и D_μ.

2. Для произвольного k составляем применительно к кольцу $O(\lambda)$ последовательности $\{1\}^{(k)}$.

Находим элементы $\{1\}^{(k)}$ исходя из следующих соображений: компонента x_{n-1} принимает последовательные целые неотрицательные значения

$$x_{n-1} = 0, 1, \ldots, [R_n^{(k)}],$$

где $R_n^{(k)}$ определено из (10*), символ $[X]$ означает целую часть числа X; компоненты x_i $(i = 0, 1, \ldots, n-2)$ находятся из неравенств (9) с учетом теоремы 1.

3. В силу определения $R_n^{(k)}$ будет определена система n линейно независимых элементов кольца $O(\lambda)$.

4. Для кольца $O(\mu)$ вычисляем последовательности $\{1\}^{(k)}$, полагая $k = 1, 2, \ldots, s+t$.

5. В случае тождественности $O(\lambda)$ и $O(\mu)$ в какой-либо из этих последовательностей найдется система n линейно независимых элементов таких, что $\xi_\lambda^{(k)} = \xi_\mu^{(k)}$; а прочие $\xi_\lambda^{(i)}$ равны $\xi_\mu^{(j)}$, может быть не соответственно, а в каком-либо ином порядке.

6. Приравняв соответствующие элементы, получим линейную систему n уравнений с целыми рациональными коэффициентами, из которой определяются переходные функции от (2) к (2*) или от (2*) к (2).

Непосредственно из теорем 1–2 вытекает

Следствие 1. *Для возможных целых решений (x, y) уравнения* (1) *при $n = s$, $t = 0$ таких, что неравенство $|x + y\lambda_i| > 1$ выполняется только для одного значения индекса $i = 1, 2, \ldots, n-1$ или n, справедливы неравенства*

$$|x| < \frac{2^{n^2-3n+1}}{\sqrt{|D_\lambda|}} \left|\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j p_j \lambda_i^{n-j}\right| M^{\frac12 n(n-3)},$$

$$|y| < \frac{2^{\frac12(n-3)(3n-4)} (n-2)!}{\sqrt{|D_\lambda|}} \left|\sum_{j=1}^{n} (-1)^j j p_j \lambda_i^{n-j}\right| \cdot M^{n^2-5n+5}.$$

Уточнение руссуждений §§ 1–3 при $n = 3$ приводит к следующим частным случаям.

Следствие 1*. *Для возможных целых решений (x, y) уравнения* (1) *при $n = 3$, $D_\lambda > 0$ таких, что неравенство $|x + y\lambda_i| > 1$ выполняется только для одного значения индекса $i = 1, 2$ или 3, справедливы нера-*

венства

$$|x| < \sqrt{\left|1 - \frac{4p_3}{p_1\lambda_i^2 - (p_1^2 - p_2)\lambda_i + 3p_3}\right|},$$

$$|y| < 2\sqrt{\left|\frac{\lambda_i}{p_1\lambda_i^2 - (p_1^2 - p_2)\lambda_i + 3p_3}\right|}.$$

Следствие 1**. *Для возможных целых решений (x, y) уравнения (1) при $n = 3$, $D_\lambda < 0$ таких, что $|x + y\lambda| > 1$, где λ — действительное, выполняются неравенства*

$$|x| < 1 + \sqrt{\left|1 - \frac{4p_3}{p_1\lambda^2 - (p_1^2 - p_2)\lambda + 3p_3}\right|},$$

$$|y| < 2\sqrt{\left|\frac{\lambda}{p_1\lambda^2 - (p_1^2 - p_2)\lambda + 3p_3}\right|}.$$

Замечание. Вопрос о решениях уравнения (1) в случае $n = 3$, для которых

1) при $D_\lambda < 0$ будет $|x + y\lambda| < 1$,

2) при $D_\lambda > 0$ неравенство $|x + y\lambda_i| < 1$ выполняется только для одного значения индекса $i = 1, 2$ или 3,

остается открытым.

Теорема 3*. *Компонента z_i для любого $w_i = x_i + y_i\lambda + z_i\lambda^2$ $(i = 1, 2, 3)$ из выбранной системы W линейно независимых элементов кольца $O(\lambda)$ удовлетворяет неравенству*

$$|z_i| < \frac{R_3^{(k)} + \dfrac{4}{\sqrt{|D_\lambda|}}|p_1\lambda^2 - 2p_2\lambda + 3p_3|}{|3\lambda^2 - 2p_1\lambda + p_2|},$$

где $R_3^{(k)} = (1296 M^4 V_0^{(3)})^2$.

Цитированная литература

[1] A. Baker, *Contributions to the theory of diophantine equations*, Philos. Trans. Roy. Soc. London, A263, 1139 (1968), стр. 173–208.

[2] W. Berwick, *Algebraic number-fields with two independent units*, Proc. London Math. Soc. 34 (1932), стр. 360–379.

[3] К. К. Биллевич, *О единицах алгебраических полей третьего и четвертого порядков*, Мат. сб. 40 (82), 1 (1956), стр. 123–136.

[4] — *О тождественности двух алгебраических полей n-го порядка*, ДАН СССР, 112 № 4 (1957), стр. 571–574.

[5] H. Godwin, *The determination of units in totally real cubic fields*, Proc. Cambr. Philos. Soc. 56 (1960), стр. 318–321.

[6] Б. Н. Делоне и Д. К. Фадеев, *Теория иррациональностей третьей степени*, Москва–Ленинград 1940.

[7] В. Г. Спринджук, *Об оценке решений уравнения Туэ*, ИАН СССР, 36.4 (1972), стр. 712–741.

Поступило 8. 10. 1976
и в исправленной форме 22. 12. 1976 (883)