[12] S. Lang, *Algebraic numbers*, Addison Wesley, 1964.
[13] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonction méromorphes*, Gauthiers Villars, Paris 1929 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).
[14] — *Eindeutige analytische Funktionen*, 2te Auflage, Springer Verlag, Berlin, 1953 (die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 46).
[15] C. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. 2, 7(1938), p. 205–248.
[16] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, Boston 1963.
[17] C. J. Smyth, *Closed sets of algebraic numbers in complete fields*, Mathematika 17 (1970), p. 199–205.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE CAEN
14032 Caen Cedex, France

Reçu le 12. 12. 1977
et dans la forme modifiée le 6. 2. 1978 (1009)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Sur les extensions cycliques de degré p^n d'un corps local

par

FRANÇOISE BERTRANDIAS (Grenoble)

On note K un corps local, de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle p, et L une extension galoisienne de K, dont le groupe de Galois est cyclique et a pour ordre une puissance de p.

L'anneau B des entiers de L est un module sur son ordre associé $\mathcal{O}$ dans l'algèbre $K[G]$ (§1). On se propose d'étudier le $\mathcal{O}$-module B lorsque la ramification de l'extension $L|K$ est totale et presque maximale (§2). On est amené à étudier l'ensemble B' des éléments de B de trace nulle sur les corps intermédiaires entre L et K, comme module sur son ordre associé $\mathcal{O}'$ (§3 et §4). On en déduit une caractérisation des extensions $L|K$ telles que le $\mathcal{O}$-module B soit libre, caractérisation qui s'exprime par une propriété arithmétique des nombres de ramification de l'extension (§5).

1. Préliminaires sur la notion d'ordre associé

1.1. Définition. Soient A un anneau de Dedekind, et K son corps des fractions. On note E une K-algèbre de dimension finie, et M un E-module libre à un générateur.

Soit N un réseau de M, c'est-à-dire un sous A-module de type fini, engendrant M. L'ensemble $\mathcal{O}$ des éléments λ de E tels que $\lambda N \subset N$ est un ordre de A dans E, qu'on appelle l'ordre associé à N dans E [10]. N est muni d'une structure de $\mathcal{O}$-module.

1.2. Module des entiers d'une extension galoisienne. Soit L une extension galoisienne finie de K, de groupe de Galois G, et soit B la clôture intégrale de A dans L.

On sait que L possède une K-base formée des conjugués d'un même élément (théorème de la „base normale"). Par suite, L est un $K[G]$-module libre à un générateur. On peut donc appliquer les résultats du §1.1, en posant: $E = K[G]$, $M = L$, $N = B$, et introduire l'ordre associé $\mathcal{O}$ à B dans $K[G]$.

L'étude du $\mathcal{O}$-module B a donné lieu à de nombreux travaux qui ont montré que B peut ou non être un $\mathcal{O}$-module libre ou projectif [9].

H. W. Leopoldt [8] a montré que si l'on fait les 2 hypothèses $K = \boldsymbol{Q}$, corps des rationnels, et G abélien, B est un $\mathcal{O}$-module libre. Par contre, si l'on supprime l'une de ces hypothèses, on trouve des exemples où B n'est pas un $\mathcal{O}$-module projectif (cf. [1], [2], [3]).

On se propose ici l'étude du $\mathcal{O}$-module B lorsque K est un corps local, et lorsque l'extension $L|K$ est cyclique de degré p^n, et vérifie certaines conditions de ramification, précisées dans le paragraphe suivant.

2. Extensions cycliques de ramification presque maximale

2.1. Notations. K désigne un corps local, de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle $p \neq 0$. On note v_K la valuation normalisée de K, $e = v_K(p)$ l'indice absolu de ramification de K, et ω une uniformisante de K.

Soit L une extension cyclique de degré p^n de K, n désignant un entier $\geqslant 1$. On note G le groupe de Galois de l'extension $L|K$.

Pour tout entier i compris entre 1 et $n-1$, on désigne par L_i le corps des invariants du sous-groupe G^{p^i} de G. On pose:

$$e_i = \frac{1}{p^{n-i}} \sum_{g \in G^{p^i}} g.$$

On voit que e_i est un idempotent de l'algèbre $K[G]$, et que $p^{n-i} e_i$ coïncide avec la trace de l'extension $L|L_i$.

On note A (resp. B, B_i) l'anneau des entiers de K (resp. L, L_i).

On désigne par $\mathcal{O}$ l'ordre associé à B dans $K[G]$.

2.2. Nombres de ramification. On suppose l'extension $L|K$ *totalement ramifiée*, et on note $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la suite des nombres inférieurs de ramification de $L|K$. On sait ([11]) que cette suite vérifie les conditions suivantes:

(1) $$t_i \leqslant \frac{p^i e}{p-1}, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, n,$$

(2) $$t_i \equiv t_1 \bmod p, \quad \text{pour tout } i = 1, 2, \ldots, n.$$

On note a le reste de la division de t_i par p $(0 \leqslant a \leqslant p-1)$.

On montre facilement (cf. [11]) que la suite des nombres de ramification de l'extension $L_h|K$ (pour un entier h compris entre 1 et $n-1$) est la suite $(t_i)_{1 \leqslant i \leqslant h}$.

2.3. Ramification presque maximale. On montre ([4]):

Proposition 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) $e_i \in \mathcal{O}$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$,

(2) $e_i B = B_i$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$,

(3) $t_i \geqslant \dfrac{p^i e}{p-1} - 1$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$,

(4) $t_i = \dfrac{p^i e - a}{p-1}$ *pour tout* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Définition (cf. [7]). Si les conditions équivalentes de la proposition 1 sont vérifiées, on dit que la ramification de l'extension $L|K$ est *presque maximale*.

Remarque 1 (cf. [8], [7]). Toute extension cyclique L de degré p^n de $K = \boldsymbol{Q}_p$, corps des nombres p-adiques, a une ramification presque maximale.

Remarque 2. Si la ramification de l'extension $L|K$ est presque maximale, la ramification de l'extension $L_h|K$ (pour tout entier h compris entre 1 et $n-1$) est presque maximale.

Dans tout ce qui suit, on supposera la ramification de l'extension $L|K$ totale et presque maximale.

2.4. Décomposition en somme directe. Notons:

$$K[G]' = K[G](1 - e_{n-1}),$$
$$\mathcal{O}' = \mathcal{O}(1 - e_{n-1}),$$
$$B' = (1 - e_{n-1})B.$$

On désigne par φ: $K[G] \to K[G/G^{p^{n-1}}]$ le K-homomorphisme d'algèbres qui induit sur G l'application canonique $G \to G/G^{p^{n-1}}$; la restriction de φ à $K[G]e_{n-1}$ est un isomorphisme; cet isomorphisme identifie les deux lois externes de $K[G]e_{n-1}$ et de $K[G/G^{p^{n-1}}]$ module de L_{n-1}. On notera $\mathcal{O}_{n-1}$ l'ordre associé à B_{n-1} dans $K[G/G^{p^{n-1}}]$.

On montre facilement:

Proposition 2. (i) *Le $\mathcal{O}$-module B se décompose en somme directe:*

$$B = B' \oplus B_{n-1}.$$

(ii) *B' est le sous-module des éléments de B de trace nulle sur L_{n-1}; $\mathcal{O}'$ est l'ordre associé à B' dans $K[G]'$.*

(iii) *$\mathcal{O}e_{n-1}$ est l'ordre associé à B_{n-1} dans $K[G]\, e_{n-1}$; φ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}e_{n-1}$ sur $\mathcal{O}_{n-1}$.*

La proposition 2 ramène l'étude du $\mathcal{O}$-module B à celle du $\mathcal{O}'$-module B' et du $\mathcal{O}_{n-1}$-module B_{n-1}; en particulier on en déduit:

Corollaire. *Le $\mathcal{O}$-module B est libre si et seulement si le $\mathcal{O}'$-module B' et le $\mathcal{O}_{n-1}$-module B_{n-1} sont libres.*

Dans les paragraphes suivants (§3 et §4), on étudie le $\mathcal{O}'$-module B'.

3. Description de B' et de $\mathcal{O}'$. Ce paragraphe contient l'énoncé de résultats démontrés dans [4]. Aux hypothèses précédentes sur la ramification de l'extension $L|K$, on doit adjoindre, si $n > 1$, l'hypothèse: $e \not\equiv 0 \bmod p$. Dans tout ce qui suit, on supposera donc vérifiées les conditions suivantes:

(1) *l'extension $L|K$ est totalement ramifiée,*

(2) *la ramification est presque maximale,*

(3) *l'indice absolu de ramification de K est premier à p (lorsque $n > 1$).*

3.1. Notations. Pour tout réel x, $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x; on note $\{x\} = x-[x]$.

Pour tout entier i tel que $0 \leqslant i < p^n$ on note $i_1, i_2, \ldots, i_n$, les entiers définis par

$$i = i_1+pi_2+\ldots+p^{n-1}i_n,$$

$$0 \leqslant i_h \leqslant p-1 \quad \text{pour} \quad h = 1, 2, \ldots, n.$$

Par la suite, on considèrera des entiers i tels que $p^{n-1} \leqslant i < p^n$, on aura donc: $i_n \geqslant 1$.

On note:

$$S(i) = i_1+i_2+\ldots+i_n,$$

$$\varepsilon(i) = 1+\left[\frac{S(i)-1}{p-1}\right],$$

$$T(i) = i_1t_1+i_2t_2+\ldots+i_nt_n,$$

$$T'(i) = T(i)+a\varepsilon(i).$$

On montre les propriétés suivantes:

(1) $S(i+j) \equiv S(i)+S(j) \bmod p-1$,

(2) $T'(i) \equiv a\big(S(i)+\varepsilon(i)\big) \bmod p$,

(3) Si $S(i)+\varepsilon(i) \equiv x \bmod p$, alors $S(i) \equiv x-1 \bmod p-1$, si $x \not\equiv 0 \bmod p$, et $S(i) \equiv 0 \bmod p-1$, si $x \equiv 0 \bmod p$,

(4) $(p-1)\varepsilon(i)-S(i)+1 = (p-1)\left(1-\left\{\frac{S(i)-1}{p-1}\right\}\right)$,

(5) $T'(i) = \dfrac{p^ie}{p-1}+\dfrac{(p-2)a}{p-1}-a\left\{\dfrac{S(i)-1}{p-1}\right\}$,

(6) $T'(i) < T'(j)$, si $p^{n-1} \leqslant i < j < p^n$,

(7) On suppose $a \neq 0$. Quel que soit l'entier x, non congru à a modulo p, il existe un entier i unique tel que:

$$p^{n-1} \leqslant i < p^n, \quad \text{et} \quad T'(i) \equiv x \bmod p^n.$$

3.2. La base (b_i) de $K[G]'$. Soit σ un générateur du groupe cyclique G. On pose:

$$b_i = (\sigma-1)^{i_1}(\sigma^p-1)^{i_2}\ldots(\sigma^{p^{n-1}}-1)^{i_n}.$$

On montre que la famille $(b_i)_{p^{n-1}\leqslant i<p^n}$ est une K-base de $K[G]'$.

On note:

$$b_ib_j = \sum_{p^{n-1}\leqslant h<p^n} \gamma_{i,j}^h b_h, \quad \text{avec} \quad \gamma_{i,j}^h \in A,$$

la table de multiplication de l'algèbre $K[G]'$ par rapport à la base (b_i); on montre que les coefficients $\gamma_{i,j}^h$ sont des entiers rationnels.

Notons, pour tout couple i, j d'entiers compris entre p^{n-1} et p^n-1,

$$s(i,j) = \begin{cases} i+j, & \text{si} \quad i+j < p^n, \\ i+j-(p-1)p^{n-1}, & \text{si} \quad p^n \leqslant i+j < 2p^n-p^{n-1}, \\ i+j-2(p-1)p^{n-1}, & \text{si} \quad i+j \geqslant 2p^n-p^{n-1}. \end{cases}$$

On montre que les coefficients $\gamma_{i,j}^h$ vérifient les congruences suivantes dans l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers rationnels:

(a) *si* $i+j < p^n$,

$$\gamma_{i,j}^h \equiv \begin{cases} 1 \bmod p & \text{si} \quad h = s(i,j), \\ 0 \bmod p & \text{si} \quad h \neq s(i,j),\ h \geqslant s(i,j)-(p-1)p^{n-2}, \\ 0 \bmod p^2 & \text{si} \quad h < s(i,j)-(p-1)p^{n-2}; \end{cases}$$

(b) *si* $p^n \leqslant i+j < 2p^n-2p^{n-1}$

$$\gamma_{i,j}^h \equiv \begin{cases} -p \bmod p^2 & \text{si} \quad h = s(i,j), \\ 0 \bmod p^2 & \text{si} \quad h \neq s(i,j),\ h < s(i,j)+p^{n-1}, \\ 0 \bmod p & \text{si} \quad h \geqslant s(i,j)+p^{n-1}; \end{cases}$$

(c) *si* $2p^n-2p^{n-1} \leqslant i+j < 2p^n-p^{n-1}$

$$\gamma_{i,j}^h \equiv \begin{cases} -p \bmod p^2 & \text{si} \quad h = s(i,j), \\ 0 \bmod p^2 & \text{si} \quad h \neq s(i,j),\ h \geqslant s(i,j)+2p^{n-1}-p^n, \\ 0 \bmod p^3 & \text{si} \quad h < s(i,j)+2p^{n-1}-p^n; \end{cases}$$

(d) *si* $i+j \geqslant 2p^n-p^{n-1}$

$$\gamma_{i,j}^h \equiv \begin{cases} p^2 \bmod p^3 & \text{si} \quad h = s(i,j), \\ 0 \bmod p^3 & \text{si} \quad h \neq s(i,j),\ h < s(i,j)+p^{n-1}, \\ 0 \bmod p^2 & \text{si} \quad h \geqslant s(i,j)+p^{n-1}. \end{cases}$$

3.3. A-base de B'. On pose:

$$\nu(i) = \left[\frac{T'(i)}{p^n}\right].$$

PROPOSITION 3. *Il existe un élément θ' de B' tel que la famille $(b_i\theta'/\omega^{\nu'(i)})_{p^{n-1}\leqslant i<p^n}$ soit une A-base de B'.*

On note, pour tout couple i, j d'entiers compris entre p^{n-1} et p^n-1,

$$\nu'(i+j) = \begin{cases} \nu(i+j) & \text{si} \quad i+j<p^n, \\ e+\nu\big(s(i,j)\big) & \text{si} \quad p^n\leqslant i+j<2p^n-p^{n-1}, \\ 2e+\nu\big(s(i,j)\big) & \text{si} \quad i+j\geqslant 2p^n-p^{n-1}. \end{cases}$$

PROPOSITION 3'. *Soit j un entier compris entre p^{n-1} et p^n-1. Il existe un élément θ' de B' tel que la famille*

$$(b_ib_j\theta'/\omega^{\nu'(i+j)})_{p^{n-1}\leqslant i<p^n}$$

soit une A-base de B'.

3.4. A-base de $\mathcal{O}'$

PROPOSITION 4. *$\mathcal{O}'$ admet pour A-base la famille $(b_i/\omega^{n(i)})_{p^{n-1}\leqslant i<p^n}$, où*

$$n(i) = \operatorname{Min}\{\nu'(i+j)-\nu(j);\ p^{n-1}\leqslant j<p^n\}.$$

Notation. Pour tout réel x, $\mathcal{E}(x)$ désigne l'ensemble des entiers h positifs tels que, si l'entier h' vérifie: $1\leqslant h'<h$, on ait: $\{h'x\}>\{hx\}$.

PROPOSITION 5. *Pour tout entier i compris entre p^{n-1} et p^n-1, on a:*

$$n(i) = \left[\frac{T(i)}{p^n}\right]+\delta_i,$$

où δ_i vaut 0 ou 1; δ_i vaut 1 si et seulement si l'une des deux conditions (a) *où* (b) *suivantes est vérifiée:*

$$\text{(a)} \qquad 1-\frac{a}{p^n}\big(\varepsilon(i)-1\big)<\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\},$$

$$\text{(b)} \qquad 1-\frac{a}{p^n}\,\varepsilon(i)\leqslant\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\}<1-\frac{a}{p^n}\big(\varepsilon(i)-1\big), \ \textit{et:}$$

$$(p-1)\varepsilon(i)-S(i)+1 \qquad \textit{appartient à}\ \mathcal{E}\left(\frac{a}{p}\right).$$

3.5. Evaluation de $n(i)+\nu(j)$. Pour tout couple i, j d'entiers compris entre p^{n-1} et p^n-1 on pose:

$$\delta'_{i,j} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad \left\{\dfrac{S(i)-1}{p-1}\right\}+\left\{\dfrac{S(j)-1}{p-1}\right\}\leqslant\dfrac{p-3}{p-1}, \\ 1, & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On montre:

$$\nu'(i+j)-n(i)-\nu(j) = \left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\}+\left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\}+\frac{a}{p^n}\big(\varepsilon(i)-1+\delta'_{i,j}\big)-\left\{\frac{T'\big(s(i,j)\big)}{p^n}\right\}-\delta_i.$$

On en déduit les propriétés suivantes:

(1) L'égalité $n(i)+\nu(j) = \nu'(i+j)$ a lieu si et seulement si:

$$\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\}+\left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\}+\frac{a}{p^n}\big(\varepsilon(i)-1+\delta'_{i,j}\big) = \left\{\frac{T'\big(s(i,j)\big)}{p^n}\right\}+\delta_i.$$

(2) L'égalité $n(i)+\nu(j) = \nu'(i+j)$ a lieu si et seulement si:

$$\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\}+\left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\}+\frac{a}{p^n}\big(\varepsilon(i)-1+\delta'_{i,j}\big)<1+\delta_i.$$

3.6. Développement en fraction continue de a/p. Définition de N. Si a est différent de 0, on note:

$$\frac{a}{p} = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots}} = [a_1, a_2, \dots, a_N], \qquad \text{avec} \qquad a_N>1$$

le développement de a/p en fraction continue. On désigne par $q_0 = 1$, $q_1 = a_1, \dots, q_i = a_iq_{i-1}+q_{i-2}, \dots, q_N = p$, les dénominateurs des réduites successives.

Si a est égal à 0, on pose: $N = 0$.

On vérifie que $N = 1$ (resp. $N = 2$) équivaut à $a = 1$ (resp. a divise $p-1$, $a\neq 1$).

L'ensemble $\mathcal{E}(a/p)$, défini §3.4, est décrit, si $a\neq 0$, par

$$\mathcal{E}\left(\frac{a}{p}\right) = \{p\}\cup\left\{q_{2i}+xq_{2i+1};\ 0\leqslant i<\frac{N-1}{2}\ \text{et}\ 0\leqslant x\leqslant a_{2i+2}\right\}.$$

Si a est nul, $\mathcal{E}\left(\dfrac{a}{p}\right)$ est vide.

On montre la propriété suivante:

(1) Si $N\leqslant 2$, on a $n(i) = \nu(i)$ pour tout entier i compris entre p^{n-1} et p^n-1.

4. Etude du $\mathcal{O}'$-module B'

4.1. Conditions pour que B' soit libre sur $\mathcal{O}'$. Si B' est un $\mathcal{O}'$-module libre, il est nécessairement libre à un générateur. Donc B' est un $\mathcal{O}'$-module libre si, et seulement si, il existe un élément ξ de B' qui engendre B' sur $\mathcal{O}'$, c'est-à-dire tel que: $B' = \mathcal{O}'\xi$.

On note $M(\xi)$ la matrice de l'homomorphisme de A-modules $\lambda \mapsto \lambda\xi$ défini dans $\mathcal{O}'$ et à valeur dans B', dans les bases $(b_i/\omega^{n(i)})$ de $\mathcal{O}'$ et $(b_i\theta'/\omega^{\nu(i)})$ de B'.

On montre facilement:

PROPOSITION 6. *Le $\mathcal{O}'$-module B' est libre si et seulement s'il existe un élément ξ de B' tel que le déterminant de la matrice $M(\xi)$ soit une unité de A.*

Notons, pour tout ξ de B', $\xi = \sum_{p^{n-1}\leqslant j<p^n} x_j b_j\theta'/\omega^{\nu(j)}$, avec x_j dans A; on a:

$$M(\xi) = \sum_{p^{n-1}\leqslant j<p^n} x_j M(b_j\theta'/\omega^{\nu(j)}).$$

L'étude des matrices $M(b_j\theta'/\omega^{\nu(j)})$ dans le paragraphe suivant, permettra de montrer, dans les paragraphes 4.3 et 4.4, que l'existence d'un générateur de B' dépend de la valeur de N.

4.2. La matrice $M(b_j\theta'/\omega^{\nu(j)})$. Soit j un entier compris entre p^{n-1} et p^n-1, fixé. Pour tout entier i compris entre p^{n-1} et p^n, on pose:

$$b_ib_j/\omega^{n(i)+\nu(j)} = \sum_{p^{n-1}\leqslant h<p^n} \mu_{i,j}^h b_h/\omega^{\nu(h)},$$

avec $\mu_{i,j}^h$ dans A.

On a: $M(b_j\theta'/\omega^{\nu(j)}) = (\mu_{i,j}^h)_{p^{n-1}\leqslant h,i<p^n}$, où h est l'indice des lignes et i l'indice des colonnes.

PROPOSITION 7. *Les valuations des coefficients $\mu_{i,j}^h$ vérifient les conditions suivantes:*

(i) $v_K(\mu_{i,j}^{s(i,j)}) = 0$, *si et seulement si:*

$$\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\} + \left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\} + \frac{a}{p^n}\left(\varepsilon(i)-1+\delta'_{i,j}\right) < 1+\delta_i.$$

(ii) $v_K(\mu_{i,j}^h) \geqslant v_K(\mu_{i,j}^{s(i,j)})$, *pour tout entier h: $p^{n-1}\leqslant h < p^n$.*

(iii) *On suppose que $v_K(\mu_{i,j}^{s(i,j)}) = 0$. Pour que $v_K(\mu_{i,j}^h) > 0$ pour tout entier h différent de $s(i,j)$, il suffit que l'on ait:*

$$\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\} + \left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\} + \frac{a}{p^n}\left(\varepsilon(i)-1-\frac{1}{p-1}+\delta'_{i,j}\right) + \frac{e}{p-1} \geqslant 1+\delta_i.$$

Démonstration. Les coefficients $\mu_{i,j}^h$ sont liés aux coefficients $\gamma_{i,j}^h$ de la table de multiplication de l'algèbre $K[G]'$ (cf. §3.2) par:

$$\mu_{i,j}^h = \gamma_{i,j}^h\,\omega^{\nu(h)-n(i)-\nu(j)}.$$

On en déduit:

$$v_K(\mu_{i,j}^{s(i,j)}) = \nu'(i+j)-n(i)-\nu(j);$$

l'assertion (i) résulte alors de la propriété (2) du § 3.5.

Posons

$$\Delta_{i,j}^h = v_K(\mu_{i,j}^h) - v_K(\mu_{i,j}^{s(i,j)});$$

on a:

$$\Delta_{i,j}^h = v_K(\gamma_{i,j}^h) + \nu(h) - \nu'(i+j).$$

Supposons $i+j<p^n$ et $h\neq s(i,j)$. On a:

$$\Delta_{i,j}^h = v_K(\gamma_{i,j}^h) + \nu(h) - \nu\big(s(i,j)\big).$$

Si $h < s(i,j)-(p-1)p^{n-2}$,

$$v_K(\gamma_{i,j}^h) \geqslant 2e > \nu\big(s(i,j)\big);\quad \text{d'où } \Delta_{i,j}^h > 0.$$

Si $h \geqslant s(i,j)-(p-1)p^{n-2}$,

$$v_K(\gamma_{i,j}^h) \geqslant e;$$

d'autre part on a:

$$\nu\big(k-(p-1)p^{n-2}\big)-\nu(k)$$

$$\geqslant -\frac{e}{p} - \left\{\frac{T'\big(k-(p-1)p^{n-2}\big)}{p^n}\right\} + \left\{\frac{T'(k)}{p^n}\right\} - \frac{a}{p^n(p-1)}$$

pour tout entier k compris entre p^{n-1} et p^n-1. On en déduit $\Delta_{i,j}^h \geqslant 0$, et $\Delta_{i,j}^h > 0$ si $e > 1$.

Supposons $i+j\geqslant p^n$ et $h\neq s(i,j)$.

(a) Cas où $s(i,j) < p^n-p^{n-1}$. Si $h < s(i,j)+p^{n-1}$,

$$\Delta_{i,j}^h \geqslant e + \nu(h) - \nu\big(s(i,j)\big);$$

$\nu\big(s(i,j)\big)$ est strictement majoré par $\nu(p^n-p^{n-1}) = e$, et $\nu(h)$ minoré par $\nu(p^{n-1}) \geqslant \left[\frac{e}{p-1}\right]$; on a donc $\Delta_{i,j}^h > 0$.

Si $h \geqslant s(i,j)+p^{n-1}$,

$$\Delta_{i,j}^h \geqslant \nu(h) - \nu\big(s(i,j)\big);$$

d'autre part:

$$\nu(k+p^{n-1})-\nu(k)$$

$$= \frac{e}{p-1} - \frac{a}{p^n}\left(\frac{1}{p-1} - \left[1-\left\{\frac{k}{p-1}\right\}\right]\right) - \left\{\frac{T'(k+p^{n-1})}{p^n}\right\} + \left\{\frac{T'(k)}{p^n}\right\},$$

pour tout entier k compris entre p^{n-1} et p^n-1; par suite $\Delta^h_{i,j} \geqslant 0$, et $\Delta^h_{i,j} > 0$ pour tout $h > s(i,j)+p^{n-1}$ si et seulement si

$$\frac{e}{p-1} - \frac{a}{p^n}\left(\frac{1}{p-1} - \left[1-\left\{\frac{s(i,j)}{p-1}\right\}\right]\right) + \left\{\frac{T'(s(i,j))}{p^n}\right\} \geqslant 1.$$

On en déduit la condition suffisante du (iii), en utilisant la propriété (1) du §3.5.

(b) Cas où $s(i,j) \geqslant p^n - p^{n-1}$. C'est le cas où $2p^n - 2p^{n-1} \leqslant i+j < 2p^n - p^{n-1}$.

Si $h < s(i,j)+2p^{n-1}-p^n$,

$$\Delta^h_{i,j} \geqslant 2e + \nu(h) - \nu(s(i,j)) > 0.$$

Si $h \geqslant s(i,j)+2p^{n-1}-p^n$,

$$\Delta^h_{i,j} \geqslant e + \nu(s(i,j)+2p^{n-1}-p^n) - \nu(s(i,j));$$

or, pour tout entier k compris entre $p^n - p^{n-1}$ et p^n-1, on a:

$$e+\nu(k+2p^{n-1}-p^n)-\nu(k) = \frac{e}{p-1} - \frac{a}{p^n}\left(\frac{1}{p-1} - \left[1-\left\{\frac{k}{p-1}\right\}\right]\right) - \\ - \left\{\frac{T'(k+2p^{n-1}-p^n)}{p^n}\right\} + \left\{\frac{T'(k)}{p^n}\right\}.$$

On en déduit $\Delta^h_{i,j} \geqslant 0$, puis la condition suffisante du (iii) comme ci-dessus.

Ceci achève la démonstration de la proposition 7.

4.3. Le cas $N \leqslant 4$

PROPOSITION 8. *Si $N \leqslant 4$, le $\mathcal{O}'$-module B' est libre.*

Démonstration. Si $N \leqslant 2$, on sait (cf. §3.6, (1)) que $n(i) = \nu(i)$, pour tout entier i compris entre p^{n-1} et p^n-1. Il en résulte: $B' = \mathcal{O}'\theta'$, et donc B' est un $\mathcal{O}'$-module libre.

Supposons $N = 3$ ou $N = 4$. Soit j l'unique entier compris entre p^{n-1} et p^n-1 tel que:

$$\left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\} = \frac{1}{p^{n-1}}\left\{q_2\frac{a}{p}\right\}$$

(cf. propriété (7) du §3.1). Ceci équivaut à la congruence suivante, modulo p^n:

$$T'(j) \equiv 1, \text{ si } N = 3, \quad \text{ et } \quad T'(j) \equiv a_4, \text{ si } N = 4.$$

On se propose de montrer que $\xi = b_j\theta'/\omega^{\nu(j)}$, où θ' est un élément de B' vérifiant la proposition 3′, engendre B' sur $\mathcal{O}'$.

LEMME. *ξ engendre B' sur $\mathcal{O}'$ si et seulement si, pour tout entier i compris entre p^{n-1} et p^n-1, on a l'inégalité:*

$$\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\} + \left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\} + \frac{a}{p^n}(\varepsilon(i)-1+\delta'_{i,j}) < 1+\delta_i. \tag{1}$$

Démonstration du lemme. ξ est un générateur du $\mathcal{O}'$-module B' si et seulement si $(b_ib_j\theta'/\omega^{n(i)+\nu(j)})_{p^{n-1}\leqslant i<p^n}$ est une A-base de B'; d'après la proposition 3′, ceci est équivalent à: $n(i)+\nu(j) = \nu'(i+j)$ pour tout i compris entre p^{n-1} et p^n. D'où, en utilisant la propriété (2) du §3.5, le résultat annoncé.

Montrons que les inégalités (1) sont vérifiées.

(a) Supposons $\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\} > 1 - \frac{a}{p^n}(\varepsilon(i)-1)$. Dans ce cas $\delta_i = 1$, d'après la proposition 5; le premier membre de l'inégalité (1) est majoré par $1+(n+1)\frac{p-1}{p^n}$, ce qui entraîne l'inégalite (1), car l'hypothèse (a) entraîne $\varepsilon(i) > 1$, et donc $n > 1$.

(b) Supposons $\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\} < 1 - \frac{a}{p^n}\varepsilon(i)$. Dans ce cas $\delta_i = 0$, d'après la proposition 5. Si

$$\left\{\frac{T'(i)}{p^n}\right\} = \left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\} + \frac{a}{p^n}\varepsilon(i) < 1 - \left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\},$$

l'inégalité (1) est satisfaite.

Supposons: $\left\{\frac{T'(i)}{p^n}\right\} \geqslant 1 - \left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\}$; on a $T'(i) \equiv -x \bmod p^n$ avec $x = 1$, si $N = 3$, et $1 \leqslant x \leqslant a_4$, si $N = 4$. On en déduit:

$$S(i)+\varepsilon(i) \equiv p - q_2 \bmod p, \quad \text{si} \quad N = 3,$$

$$S(i)+\varepsilon(i) \equiv yq_3 \bmod p, \quad \text{si} \quad N = 4, \quad \text{avec } 1 \leqslant y \leqslant a_4.$$

On en déduit (propriété (3) du §3.1):

$$\left\{\frac{S(i)-1}{p-1}\right\} = \frac{p-q_2-2}{p-1}, \text{ si } N = 3; \quad \left\{\frac{S(i)-1}{p-1}\right\} = \frac{yq_3-2}{p-1}, \text{ si } N = 4.$$

D'autre part on a: $S(j)+\varepsilon(j) \equiv q_2 \bmod p$, d'après le choix de j; il en résulte

$$\left\{\frac{S(j)-1}{p-1}\right\} = \frac{q_2-2}{p-1}.$$

On trouve donc:

$$\left\{\frac{S(i)-1}{p-1}\right\}+\left\{\frac{S(j)-1}{p-1}\right\}=\begin{cases}\dfrac{p-4}{p-1}, & \text{si}\quad N=3.\\[2mm] \dfrac{yq_3+q_2-4}{p-1}, & \text{avec}\quad 1\leqslant y\leqslant a_4,\ \text{si } N=4.\end{cases}$$

Il en résulte $\delta'_{i,j}=0$, ce qui entraîne l'inégalité (1).

(c) Supposons

$$1-\frac{a}{p^n}\,\varepsilon(i)\leqslant\left\{\frac{T(i)}{p^n}\right\}<1-\frac{a}{p^n}\big(\varepsilon(i)-1\big).$$

Si $(p-1)\varepsilon(i)-S(i)+1$ appartient à $\mathscr{E}\left(\dfrac{a}{p}\right)$, on a: $\delta_i=1$, ce qui entraîne l'inégalité (1).

Supposons que $(p-1)\varepsilon(i)-S(i)+1$ n'appartienne pas à $\mathscr{E}\left(\dfrac{a}{p}\right)$; on a:

$$\big((p-1)\varepsilon(i)-S(i)+1\big)a\equiv -T'(i)+a \bmod p$$

(d'après la propriété (2) du §3.1). On en déduit, à l'aide de la propriété (4) du §3.1:

$$0<(p-1)\left(1-\left\{\frac{S(i)-1}{p-1}\right\}\right)\frac{a}{p}\leqslant\frac{a}{p}.$$

Par suite:

$$(p-1)\left(1-\left\{\frac{S(i)-1}{p-1}\right\}\right)=1+xq_1+yq_2+zq_3,$$

où x, y, z vérifient les conditions suivantes:

$$0<x\leqslant a_2,\quad 0<y<a_3,\quad z=0\quad \text{si}\quad N=3,$$

$$0<x\leqslant a_2,\quad 0\leqslant y\leqslant a_3,\quad 0\leqslant z<a_4,\quad (y,z)\neq(0,0),\quad \text{si}\quad N=4.$$

On trouve

$$\left\{\frac{S(i)-1}{p-1}\right\}=\frac{p-2-xq_1-yq_2-zq_3}{p-1};$$

on en déduit:

$$\left\{\frac{S(i)-1}{p-1}\right\}+\left\{\frac{S(j)-1}{p-1}\right\}=\frac{p-4-xq_1-(y-1)q_2-zq_3}{p-1}<\frac{p-3}{p-1}.$$

Par suite, $\delta'_{i,j}=1$, ce qui entraîne l'inégalité (1).

Ceci achève la démonstration de la proposition 8.

4.4. Le cas $N\geqslant 5$

PROPOSITION 9. *Si $N\geqslant 5$, le $\mathcal{O}'$-module B' n'est pas libre.*

Démonstration. On se propose de montrer que quel que soit l'élément ξ de B' la matrice $M(\xi)$, définie §4.1, a un déterminant nul modulo ω.

On pose: $N=2k+1$ (resp. $N=2k+2$) si N est impair (resp. pair).

On sait (§3.1, propriété (7)) qu'il existe un entier i unique, compris entre p^{n-1} et p^n-1, tel que l'on ait:

$$\left\{\frac{T'(i)}{p^n}\right\}=\frac{1}{p^{n-1}}\left\{\big(1-(q_{2k-2}+xq_{2k-1}+q_{2k})\big)\frac{a}{p}\right\},$$

l'entier x prenant les valeurs: $0, 1, \ldots, a_{2k}, -a_{2k}$. On notera cet entier i_x.

La matrice $M(\xi)$ est combinaison linéaire, à coefficients dans A, des matrices $M(b_j\theta'/\omega^{\nu(j)})$, où $j=p^{n-1},\ldots,p^n-1$. On va déterminer, pour chaque colonne d'indice i_x, les entiers j tels que les coefficients de la matrice correspondante soient, dans cette colonne, non tous nuls modulo ω.

LEMME 1. *L'entier δ_{i_x} est égal à 0.*

Démonstration. On a: $\left\{(q_{2k-2}+xq_{2k-1}+q_{2k})\dfrac{a}{p}\right\}<\dfrac{a}{p}$, et donc:

$$\left\{\frac{T'(i_x)}{p^n}\right\}<\frac{a}{p^n};$$

on en déduit:

$$\left\{\frac{T(i_x)}{p^n}\right\}=\left\{\frac{T'(i_x)}{p^n}\right\}-\frac{a}{p^n}\,\varepsilon(i_x)+1,$$

et

$$1-\frac{a}{p^n}\,\varepsilon(i_x)<\left\{\frac{T(i_x)}{p^n}\right\}<1-\frac{a}{p^n}\big(\varepsilon(i_x)-1\big).$$

Comme

$$S(i_x)+\varepsilon(i_x)\equiv\frac{1}{a}T'(i_x)\equiv 1-(q_{2k-2}+xq_{2k-1}+q_{2k})\bmod p,$$

on a:

$$(p-1)\varepsilon(i_x)-S(i_x)+1=q_{2k-2}+xq_{2k-1}+q_{2k}.$$

On voit facilement que $q_{2k-2}+xq_{2k-1}+q_{2k}$ n'appartient pas à $\mathscr{E}\left(\dfrac{a}{p}\right)$; donc, d'après la proposition 5, δ_{i_x} vaut 0.

LEMME 2. *Soit un entier j compris entre p^{n-1} et p^n-1. Pour que $v_K(\mu_{i_x,j}^{s(i_x,j)}) = 0$, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\} = \frac{1}{p^{n-1}}\left\{(q_{2k-2}+x'q_{2k-1})\frac{a}{p}\right\},$$

avec

$$x \leqslant x' \leqslant a_{2k}, \quad si \quad 0 \leqslant x \leqslant a_{2k},$$
$$x' = 0, \quad si \quad x = -a_{2k}.$$

Démonstration. D'aprés la proposition 7 et le lemme 1, les entiers j cherchés sont ceux qui vérifient l'inégalité:

$$(1) \qquad \left\{\frac{T(i_x)}{p^n}\right\}+\left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\}+\frac{a}{p^n}(\varepsilon(i)-1+\delta'_{i_x,j}) < 1.$$

En remplaçant $\left\{\frac{T(i_x)}{p^n}\right\}$ par sa valeur, on montre que l'inégalité (1) entraine: $\delta'_{i_x,j} = 0$, et qu'elle équivaut au système:

$$(2) \qquad \left\{\frac{S(i_x)-1}{p-1}\right\}+\left\{\frac{S(j)-1}{p-1}\right\} \leqslant \frac{p-3}{p-1},$$

$$(3) \qquad \left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\} < \frac{1}{p^{n-1}}\left\{(q_{2k-2}+xq_{2k-1}+q_{2k})\frac{a}{p}\right\}.$$

Comme $S(i_x) \equiv -(q_{2k-2}+x_{j2k-1}+q_{2k}) \bmod p-1$, (2) équivaut à:

$$(2') \qquad \left\{\frac{S(j)-1}{p-1}\right\} \leqslant \frac{q_{2k-2}+xq_{2k-1}+q_{2k}-2}{p-1}.$$

D'autre part, on montre que (3) est équivalent à:

$$(3') \qquad \left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\} = \frac{1}{p^{n-1}}\left\{(aq_{2k-2}+x'q_{2k-1}+yq_{2k}+zq_{2k+1})\frac{a}{p}\right\}$$

avec $\alpha = 1$, si $0 \leqslant x \leqslant a_{2k}$ (resp. $\alpha = 1$ ou 2, si $x = -a_{2k}$),
$x \leqslant x' \leqslant a_{2k}$, si $0 \leqslant x \leqslant a_{2k}$ (resp. $0 \leqslant x' \leqslant a_{2k}$, si $x = -a_{2k}$),
$0 \leqslant y < a_{2k+1}$,
$z = 0$, si $N = 2k+1$, et $0 \leqslant z < a_{2k+2}$, si $N = 2k+2$,
$x' = x$ entraîne $y = 0$, ou $y = 1$, $z \geqslant 1$ et $N = 2k+2$ si $0 \leqslant x \leqslant a_{2k}$
(resp. $x' = 0$ entraîne $y = 0$ et $z = 0$ si $x = -a_{2k}$ et $\alpha = 2$).

L'égalité (3') entraîne:

$$\left\{\frac{S(j)-1}{p-1}\right\} = \frac{aq_{2k-2}+x'q_{2k-1}+yq_{2k}+zq_{2k+1}-2}{p-1}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité (2'):

$y = 0$ et $z = 0$, si $0 \leqslant x \leqslant a_{2k}$ (resp. $x' = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et $\alpha = 1$, si $x = -a_{2k}$).

Il est clair que les entiers j définis par l'égalité (3'), et tels que x', y, z vérifient les conditions ci-dessus, satisfont à l'inégalité (1).

LEMME 3. *Soit un entier j tel que:*

$$v_K(\mu_{i_x,j}^{s(i_x,j)}) = 0.$$

Si l'entier h, compris entre p^{n-1} et p^n-1, est différent de $s(i_x, j)$, on a:

$$v_K(\mu_{i_x,j}^h) \geqslant 1.$$

Démonstration. Soit j un entier tel que $v_K(\mu_{i_x,j}^{s(i_x,j)}) = 0$; d'après la proposition 7 et le lemme 1, pour que $v_K(\mu_{i_x,j}^h) \geqslant 1$ pour tout entier h différent de $s(i_x, j)$, il suffit que l'on ait:

$$\left\{\frac{T(i_x)}{p^n}\right\}+\left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\}+\frac{a}{p^n}\left(\varepsilon(i)-1-\frac{1}{p-1}+\delta'_{i_x,j}\right)+\frac{e}{p-1} \geqslant 1.$$

On montre facilement que cette inégalité s'écrit:

$$\left\{\frac{T'(i_x)}{p^n}\right\}+\left\{\frac{T'(j)}{p^n}\right\}+\frac{e}{p-1}-\frac{a}{p^{n-1}(p-1)} \geqslant 0,$$

inégalité qui est évidemment vérifiée, puisque $e \geqslant a$.

La proposition 9 se déduit des lemmes 2 et 3. En effet, considérons les colonnes d'indice i_x de la matrice $M(\xi)$, où x prend les valeurs $0, 1, \ldots \ldots, a_{2k}$ et $-a_{2k}$; un entier h, compris entre p^{n-1} et p^n-1, ne peut être l'indice d'une ligne de la matrice $M(\xi)$ dont les coefficients, dans les colonnes d'indice i_x, ne sont pas tous nuls modulo ω, que si l'on a: $h = s(i_x, j)$, où l'entier j vérifie la condition du lemme 2. On voit que ces lignes sont au nombre de $a_{2k}+1$, alors que les colonnes d'indice i_x sont au nombre de $a_{2k}+2$. Par suite, le déterminant de la matrice $M(\xi)$ est nul modulo ω; ceci étant valable quel que soit l'élément ξ de B', B' n'est pas libre sur $\mathcal{O}'$.

4.5. Structure du $\mathcal{O}'$-module B'. Les propositions 8 et 9 entraînent:

THÉORÈME 1. *B' est un $\mathcal{O}'$-module libre si et seulement si l'entier N est inférieur ou égal à 4.*

5. Structure du $\mathcal{O}$-module B

5.1. Condition pour que le $\mathcal{O}$-module B soit libre. L'étude précédente permet de caractériser les extensions $L|K$ telles que le $\mathcal{O}$-module B soit libre.

Rappelons que B est l'anneau des entiers d'une extension cyclique L

de degré p^n d'un corps local K, $\mathcal{O}$ étant son ordre associé dans l'algèbre $K[G]$; on suppose la ramification de l'extension totale et presque maximale, et, si $n > 1$, l'indice absolu de ramification de K premier à p. On obtient:

THÉORÈME 2. *Le $\mathcal{O}$-module B est libre si et seulement si l'entier N est inférieur ou égal à 4.*

Démonstration. On sait (corollaire de la proposition 2) que le $\mathcal{O}$-module B est libre si et seulement si le $\mathcal{O}'$-module B' et le $\mathcal{O}_{n-1}$-module, B_{n-1} sont libres.

Le théorème 1 montre donc: si $N \geqslant 5$, le $\mathcal{O}$-module B n'est pas libre.

Supposons $N \leqslant 4$. Si $n = 1$, B_{n-1}, qui coïncide avec A, est évidemment libre sur $\mathcal{O}_{n-1}$, lui aussi égal à A; le théorème 1 montre donc que B est libre sur $\mathcal{O}$ (on retrouve ici un résultat de [3] et [6]). Supposons que, pour toute extension cyclique $L|K$ de degré p^{n-1}, de ramification totale et presque maximale, et telle $N \leqslant 4$, l'anneau des entiers de L soit libre sur son ordre associé. Soit alors une extension $L|K$ cyclique de degré p^n, de ramification totale et presque maximale, avec $N \leqslant 4$; on sait (§2.2, §2.3) que $L_{n-1}|K$ a une ramification totale et presque maximale, et a pour nombres de ramification les $n-1$ premiers nombres de ramification de l'extension $L|K$; par suite B_{n-1} est libre sur $\mathcal{O}_{n-1}$, d'aprés l'hypothèse de récurrence, et donc B est libre sur $\mathcal{O}$, d'aprés le théorème 1.

Remarque. Si $K = \boldsymbol{Q}_p$, toute extension cyclique L de degré p^n de K vérifie les conditions d'application du théorème 2 (cf. §2.3); B est donc un $\mathcal{O}$-module libre: on retrouve ici un résultat démontré dans [8] et [7].

COROLLAIRE 1. *Le $\mathcal{O}$-module B est projectif si et seulement si $N \leqslant 4$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'anneau $\mathcal{O}$ est semi-local ([5]), et donc que tout $\mathcal{O}$-module projectif de rang défini est libre.

5.2. Application aux corps de nombres. Soient K un corps de nombres, L une extension cyclique de degré p^n de K, A (resp. B) l'anneau des entiers de K (resp. L). Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A au dessus de p, de ramification totale et presque mascimale dans l'extension $L|K$; on note $\mathfrak{p}B = \mathfrak{P}^{p^n}$, où $\mathfrak{P}$ est un idéal de B. On désigne par: $L_\mathfrak{P}$ un complété de L pour la valuation $\mathfrak{P}$-adique, $K_\mathfrak{p}$ le complété de K dans $L_\mathfrak{P}$ pour la valuation $\mathfrak{p}$-adique, $A_\mathfrak{p}$ (resp. $B_\mathfrak{P}$) l'anneau de valuation de $K_\mathfrak{p}$ (resp. $L_\mathfrak{P}$). On note a le reste commun modulo p des nombres inférieurs de ramification de l'extension $L_\mathfrak{P}|K_\mathfrak{p}$, et N le nombre de quotients incomplets du développement en fraction continue de a/p. On désigne par $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$) l'ordre associé à B (resp. $B_\mathfrak{P}$).

On sait ([3]) que si B est un $\mathcal{O}$-module projectif, $B_\mathfrak{P}$ est un $\mathcal{O}_\mathfrak{P}$-module projectif. Le théorème 2 entraîne donc:

COROLLAIRE 2. *Si l'entier N est supérieur ou égal à 5, B n'est pas un $\mathcal{O}$-module projectif.*

Bibliographie

[1] A.-M. Bergé, *Sur l'arithmétique d'une extension cyclique totalement ramifiée d'un corps local*, C. R. Acad. Sc. Paris, 281 (1975), p. 67–70.

[2] F. Bertrandias et M.-J. Ferton, *Sur l'anneau des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps local*, ibid. 274 (1972), p. 1330–1333.

[3] F. Bertrandias, J. P. Bertrandias et M.-J. Ferton, *Sur l'anneau des entiers d'une extension cyclique de degré premier d'un corps local*, ibid. 274 (1972), p. 1388–1391.

[4] F. Bertrandias, *Entiers d'une p-extension cyclique d'un corps local*, ibid. 286 (1978), p. 1083–1086.

[5] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Chapitres 2 et 4, Hermann, Paris 1961.

[6] M.-J. Ferton, *Sur l'anneau des entiers d'extensions cycliques de degré p et d'extensions diédrales de degré 2p d'un corps local*, Thèse de doctorat de troisième cycle, Grenoble 1972.

[7] H. Jacobinski, *Über die Hauptordnung eines Körpers als Gruppenmodul*, J. Reine Angew. Math. 213 (1964), p. 151–164.

[8] H. W. Leopoldt, *Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers*, ibid. 201 (1959), p. 119–149.

[9] J. Martinet, *Bases normales et constante de l'équation fonctionnelle des fonctions L d'Artin*, Séminaire Bourbaki, 1973/74, n°450.

[10] I. Reiner, *Maximal orders*, Academic Press, London 1975.

[11] J.-P. Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris 1962.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES PURES – INSTITUT FOURIER
UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICINE DE GRENOBLE
associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 St. Martin d'Heres, France

Reçu le 14. 1. 1978
et dans la forme modifiée le 30. 3. 1978 (1024)