[14] W. M. Schmidt, *Metrical theorems of fractionnal parts of sequences*, Trans. Amer. Soc. 110 (1964), p. 493–518.
[15] — *A theorem in diophantine approximations*, J. Number Theory 5 (1975), p. 245–251.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUE ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, France

Reçu le 2. 12. 1977 (1007)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Fonctions à caractéristique bornée et P.V. éléments

par

MARTHE GRANDET-HUGOT (Caen)

L'étude des nombres de Pisot est étroitement liée à celle de certaines familles de fractions rationnelles. Ces fractions rationnelles peuvent être considérées comme des fonctions à caractéristique bornée à l'intérieur du disque-unité. Un critère de rationalité établi par D. Cantor [5] a été utilisé par Amara [1] pour l'étude d'ensembles de nombres algébriques généralisant les nombres de Pisot.

Dans un précédent article [10], nous avons étendu certains de ces résultats à des ensembles de P. V. éléments sur un corps de nombres algébriques. Nous proposons ici, d'utiliser systématiquement la notion de fonction à caractéristique bornée pour établir certaines propriétés relatives à divers types de P. V. éléments.

La méthode utilisée a l'avantage d'être générale. Elle donnerait des résultats plus intéressants en ce qui concerne la répartition des suites $(\lambda\theta^n)_{n\in N}$, si l'on connaissait une condition suffisante pour qu'une fonction soit à caractéristique bornée et que cette condition s'exprime au moyen des coefficients de son développement en série entière a l'origine. En fait la seule condition connue de ce type concerne les fonctions de la classe H^2.

1. Fonctions a caractéristique bornée. Soit f une fonction complexe à variable complexe, holomorphe à l'origine et méromorphe à l'intérieur du disque-unité. A une telle fonction Nevanlinna associe les fonctions suivantes:

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta, \qquad N(r,f) = \int_0^r \frac{n(t)}{t}\,dt$$

où $n(t)$ désigne le nombre de pôles de f intérieurs au disque $\{z \in C;\ |z| \leqslant t\}$. On appelle *caractéristique* de f, la fonction:

$$T(r,f) = m(r,f)+N(r,f)$$

c'est une fonction croissante de r et si elle tend vers une limite finie lorsque r tend vers 1, on dit que f est à *caractéristique bornée* à l'intérieur du disque-unité. La caractérisation suivante permet d'étendre facilement cette définition à un domaine quelconque:

Pour qu'une fonction holomorphe à l'origine et méromorphe à l'intérieur du disque-unité soit à caractéristique bornée, il faut et il suffit qu'elle soit quotient de deux fonctions holomorphes bornées à l'intérieur du disque-unité.

Les fonctions appartenant à la classe H^p, $p > 0$, sont à caractéristique bornée, de même pour les fonctions à partie réelle bornée.

Ces considérations ont permis à D. Cantor [5] de démontrer le lemme et le théorème suivants:

LEMME 1.1. *Soit f une fonction régulière à l'origine et à caractéristique bornée à l'intérieur du disque $D(r) = \{z \in C;\ |z| < r\}$, on considère son développement de Taylor au voisinage de l'origine:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

soit D_n le déterminant de Kronecker d'ordre n, alors:

$$\lim r^n |D_n|^{2/n} = 0.$$

THÉORÈME 1.2. *Soit f une fonction à caractéristique bornée à l'intérieur du disque-unité, si son développement en série de Taylor au voisinage de l'origine est à coefficients entiers rationnels, alors f est une fraction rationnelle et ses pôles sont des inverses d'entiers algébriques.*

La notion de fonction à caractéristique bornée peut s'étendre à des fonctions définies dans un corps valué complet et à valeurs dans ce corps. Nous ne considérerons ici que des corps valués localement compacts. Le fait qu'un tel corps soit à valuation discrète nous conduit à poser les deux définitions suivantes:

DÉFINITION 1.3. Soit Ω un corps valué complet, à valuation discrète, nous dirons qu'une fonction f méromorphe dans le disque $D(r) = \{x \in \Omega;\ |x| < r\}$, est *à caractéristique bornée* dans ce disque, si elle est le quotient de deux fonctions s et t, analytiques dans ce disque et telles que:

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n \quad \text{où} \quad s_n = O(r^{-n}),$$

$$t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n \quad \text{où} \quad t_n = O(r^{-n}).$$

DÉFINITION 1.4. Soit Ω un corps valué complet, à valuation discrète, nous dirons qu une fonction f, méromorphe dans le disque $\hat{D}(r) = \{x \in \Omega;\ |x| \leqslant r\}$, est *à caractéristique bornée* dans ce disque si elle est le quotient de deux fonctions s et t, analytiques dans $\hat{D}(r)$, alors, avec les notations de la définition précédente:

$$s_n = o(r^{-n}) \quad \text{et} \quad t_n = o(r^{-n}).$$

Une démonstration de type analogue à celle de Cantor [5] conduit au lemme suivant:

LEMME 1.5. *Soit Ω un corps valué complet, à valuation discréte, soit f une fonction régulière à l'origine et à caractéristique bornée dans $D(r)$ (resp. $\hat{D}(r)$). Soit D_n le déterminant de Kronecker d'ordre n relatif à son développement en série entière autour de l'origine, alors:*

$$r^n |D_n|^{2/n} = O(1) \quad (\textit{resp. } o(1)).$$

Ce lemme nous permettra d'obtenir un critère de rationalité pour une fonction définie sur un ensemble d'adèles d'un corps de nombres algébriques ou de séries formelles.

2. Application aux P. V. élément sur un corps de séries formelles. Soit F_q un corps fini à q éléments, soit $\mathscr{Z} = \mathrm{GF}[q; t]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sur F_q et soit $\mathscr{F} = \mathrm{GF}(q; t)$ on corps des quotients, la complétion de $\mathscr{F}$ pour la valeur absolue v sera notée $\mathscr{F}_v$, $\mathscr{Z}_v$ désignera l'anneau de valuation correspondant et $\mathscr{I}_v$ l'idéal de valuation.

Dans $\mathscr{F}_\infty$ le lemme 1.5 conduit au résultat suivant:

THÉORÈME 2.1. *Soit f une fonction à caractéristique bornée sur $\mathscr{Z}_\infty$, on suppose que son développement en série entiére au voisinage de l'origine, est à coefficients dans $\mathscr{Z}$; alors f est une fraction rationnelle:*

$$f(x) = \frac{A(x)}{Q(x)} \quad \text{où} \quad A \in \mathscr{Z}[x],\ Q \in \mathscr{Z}[x],\ Q(0) = 1.$$

Preuve. Soit D_n le déterminant de Kronecker d'ordre n de f, alors $D_n \in \mathscr{Z}$ et:

$$\lim_{n\to\infty} |D_n|_\infty = 0$$

par conséquent D_n est nul à partir d'un certain rang et f est une fraction rationnelle, la deuxième affirmation résulte du fait que $\mathscr{Z}$ est un anneau de Fatou.

Ce résultat permet de retrouver la caractérisation des P. V. éléments telle qu'elle a été énoncée par Bateman et Duquette [2], nous désignerons par $\mathscr{S}_\infty$ l'ensemble de ces éléments.

Un élément θ de $\mathscr{F}_\infty$, $|\theta|_\infty > 1$, appartient à $\mathscr{S}_\infty$ si il est entier algébrique sur $\mathscr{Z}$, et si tous ses conjugués, dans le corps de décomposition de son polynôme minimal, sont de valeur absolue strictement inférieure à 1.

Soit α un élément de $\mathscr{F}_\infty$, considérons sa décomposition d'Artin:

$$\alpha = E(\alpha) + \varepsilon(\alpha) \quad \text{où } E(\alpha) \in \mathscr{Z} \text{ et } |\varepsilon(\alpha)|_\infty < 1$$

alors:

THÉORÈME 2.2 (cf. [2]). *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément θ de $\mathscr{F}_\infty$, $|\theta|_\infty > 1$, appartienne à $\mathscr{S}_\infty$ est qu'il existe $\lambda \in \mathscr{F}_\infty$*

tel que:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(\lambda\theta^n) = 0$$

alors $\lambda \in \mathscr{F}(\theta)$.

En effet, posons, au voisinage de l'origine:

$$f(x) = E(\lambda\theta^n)x^n = \frac{\lambda}{1-\theta x} - \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda\theta^n)x^n$$

cette fonction se prolonge en une fonction à caractéristique bornée sur $\mathscr{X}_\infty$ c'est donc une fraction rationnelle donc $\theta \in \mathscr{S}_\infty$ et $\lambda \in \mathscr{F}(\theta)$.

Considérons maintenant un ensemble T de valeurs absolues de $\mathscr{F}$, on désigne par $\mathscr{A}_T$ l'anneau des T-adèles de $\mathscr{F}$ et l'on pose:

$$\mathscr{F}^T = \{x \in \mathscr{F};\ |x|_v \leqslant 1 \text{ pour } v \notin T\}.$$

$\mathscr{F}^T$ est un anneau de Fatou isomorphe à un sous-anneau de $\mathscr{A}_T$ (que nous noterons également $\mathscr{F}^T$).

Nous dirons qu'une fonction définie sur une partie de $\mathscr{A}_T$ est à caractéristique bornée si ses composantes sont à caractéristique bornée. Nous pouvons alors énoncer et démontrer le théorème suivant:

Théorème 2.3. *Soit*:

$$D = \hat{D}_w(r_w) \prod_{\substack{v\in T\\ v\neq w}} D_v(r_v), \qquad r_w \prod_{\substack{v\in T\\ v\neq w}} r_v \geqslant 1$$

où $r_v = 1$ sauf pour un nombre fini de v. Soit f une fonction régulière à l'origine et à caractéristique bornée dans D, dont le développement en série entière au voisinage de l'origine est à coefficients dans $\mathscr{F}^T$; alors f est une fraction rationnelle:

$$f(x) = \frac{A(x)}{Q(x)} \quad \text{où} \quad A \in \mathscr{F}^T[x],\ Q \in \mathscr{F}^T[x],\ Q(0) = 1.$$

Preuve. On remarque que le fait que w appartienne ou non à T n'intervient pas dans la démonstration. D'après le lemme 1.5:

$$r_v^n |D_n|_v^{2/n} = O(1) \quad \text{si} \quad v \in T,$$
$$r_w^n |D_n|_w^{2/n} = o(1)$$

de plus, sauf pour un nombre fini de valeurs absolues on a:

$$|D_n|_v \leqslant 1$$

d'où:

$$|D_n|_w \cdot \prod_{\substack{v\in T\\ v\neq w}} |D_n|_v = o(1), \qquad \Big(r_w \prod_{\substack{v\in T\\ v\neq w}} r_v\Big)^{-n^2} = o(1)$$

et, puisque $D_n \in \mathscr{F}^T$, il en résulte que D_n est nul à partir d'un certain rang donc f est une fraction rationnelle de la forme indiquée puisque $\mathscr{F}^T$ est un anneau de Fatou.

Si T est un ensemble fini, nous le noterons alors I, cette propriété permet de caractériser les P. V. élément de $\mathscr{A}_I$:

Définition 2.4. Soit I un ensemble fini de valeurs absolues de $\mathscr{F}$, nous désignons par $\mathscr{S}_I^w$ l'ensemble des éléments algébriques θ de $\mathscr{A}_I$ possèdant les propriétés suivantes:

1. $|\theta|_v > 1$ pour $v \in I$,
2. θ est zéro d'un polynôme P, de degré s, dont les autres zéros, dans une extension de $\mathscr{F}_v$ où il est décomposable, vérifient:

$$|\theta^{(j)}|_v \leqslant 1 \quad \begin{cases} j = 1, \ldots, s \text{ si } v \notin I, \\ j = 2, \ldots, s \text{ si } v \in I; \end{cases}$$

$$|\theta^{(j)}|_w < 1 \quad \begin{cases} j = 1, \ldots, s \text{ si } w \notin I, \\ j = 2, \ldots, s \text{ si } w \in I. \end{cases}$$

On voit immédiatement que ces conditions impliquent que θ est entier algébrique sur $\mathscr{F}^I$.

Pour tout élément a de $\mathscr{A}_I$ il existe une décomposition d'Artin unique:

$$a = E(a) + \varepsilon(a), \quad E(a) \in \mathscr{F}^I, \quad |\varepsilon(a)|_v < 1 \quad \text{pour} \quad v \in I.$$

Nous pouvons caractériser les ensembles $\mathscr{S}_I^w$ de la manière suivante:

Théorème 2.5. *Un élément θ de $\mathscr{A}_I$, $|\theta|_v > 1$ pour tout $v \in I$, appartient à $\mathscr{S}_I^w$ si et seulement si il existe un élément inversible λ de $\mathscr{A}_I$ tel que*:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_w(\lambda\theta^n) = 0 \quad \textit{si} \quad w \in I,$$

$$\lim_{n\to\infty} |E(\lambda\theta^n)|_w = 0 \quad \textit{si} \quad w \notin I$$

alors, $\lambda \in \mathscr{F}^I(\theta)$.

Preuve. Pour la partie directe du théorème, il suffit de prendre $\lambda = 1$.

Pour démontrer la réciproque, nous considérons la fonction f définie au voisinage de l'origine par:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\lambda\theta^n)x^n$$

nous allons montrer qu'elle se prolonge en une fonction à caractéristique bornée sur $\mathscr{X}_w \prod_{\substack{v\in I\\ v\neq w}} \mathscr{I}_v$, ce qui nous conduira au résultat voulu par application du théorème 2.3. En effet:

$$f(x) = \frac{\lambda}{1-\theta x} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(\lambda\theta^n) x^n$$

et la fonction définie par $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(\lambda\theta^n)$ est holomorphe et bornée sur l'ensemble indiqué. De plus:

$$\lambda = \lim_{x\to\theta^{-1}} f(x)(1-\theta x)$$

donc $\lambda \in \mathscr{F}^I(\theta)$.

Remarque. Si J est un ensemble fini de valeurs absolues de $\mathscr{F}$, on peut définir et caractériser de manière analogue des ensembles:

$$\mathscr{S}_I^J = \bigcap_{w\in I} \mathscr{S}_I^w.$$

Par ailleurs on démontre comme cela a été fait dans [8] pour l'ensemble $\mathscr{S}_\infty$ que ces ensembles sont partout denses dans $\{x \in \mathscr{A}_I;\ |x|_v > 1, \forall v \in I\}$. Soit α un élément de cet ensemble, il suffit de considérer la suite des polynômes définie par:

$$P_0(x) = x - E(\alpha),$$
$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - E\big(\alpha P_{n-1}(\alpha)\big)$$

si $w \in I$, ces polynômes sont associés à une suite d'éléments de $\mathscr{S}_I^w$ tendant vers α, et si $w \notin I$, on considère des polynômes construits de la même manière mais la décomposition d'Artin est prise dans $\mathscr{A}_{I'}$, où $I' = I \cup \{w\}$.

3. Fonctions à caractéristique bornée dans les adèles d'un corps de nombres. Nous désignerons par S l'ensemble des nombres de Pisot et par T, l'ensemble des nombres de Salem (cf. [16]). Du théorème 1.2 et des propriétés bien connues de ces nombres, on déduit facilement le résultat suivant:

THÉORÈME 3.1. *Soit α un nombre réel, $\alpha > 1$, ce nombre appartient à $S \cup T$ si et seulement si il existe un réel λ tel que si l'on pose:*

$$\lambda\alpha^n = u_n + \varepsilon_n \quad \text{où} \quad u_n \in z \text{ et } \varepsilon_n \in]-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}]$$

la fonction f définie au voisinage de l'origine par:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$$

soit prolongeable en une fonction à caractéristique bornée à l'intérieur du disque-unité. Alors $\lambda \in Q(\alpha)$.

Dans ce cas α est un nombre de Pisot si et seulement si la suite $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ a un nombre fini de points d'accumulation. On sait également que, si α est un nombre de Salem, la suite $(\varepsilon_n)_{n\in N}$ n'est pas équirépartie dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ [16].

Nous allons maintenant énoncer quelques résultats de ce type concernant des nombres de Pisot ou Salem sur un corps de nombres algébriques.

Soit K un corps de nombres algébriques de degré s sur Q, soit T un ensemble de valeurs absolues de K contenant l'ensemble S_∞ des valeurs absolues archimédiennes. Nous désignerons par A_T l'anneau des T-adèles de K.

Soit v une valeur absolue de K, K_v désignera la complétion de K pour cette valeur absolue, Z_v est l'anneau de valuation et I_v l'idéal de valuation.

Posons:

$$K^T = \{x \in K;\ |x|_v \leqslant 1 \text{ pour } v \notin T\}.$$

K^T est isomorphe à un sous-anneau de A_T, que nous noterons également K^T, de plus, c'est un anneau de Fatou (cf. [3]).

Alors, tout élément α de A_T admet une décomposition d'Artin unique:

$$\alpha = E(\alpha) + \varepsilon(\alpha) \quad \text{où} \quad E(\alpha) \in K^T,\ \varepsilon(\alpha) \in F.$$

F étant un domaine fondamental que nous allons préciser (cf. [12]): soit $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_s)$ une base d'entiers de K, nous désignons par F_∞ le sous-ensemble de $\prod_{v\in S_\infty} K_v$ engendré par les vecteurs $\sum_{i=1}^{s} t_i\omega_i$ où $t_i \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on peut choisir comme domaine fondamental:

$$F = F_\infty \times \prod_{v\in T^-} O_v \quad \text{où} \quad T^- = T \setminus S_\infty.$$

Ce domaine dépend de la base choisie, toute fois, il est facile de voir que, si $(\alpha_n)_{n\in N}$ est une suite d'éléments de A_T certaines propriétés se conservent par un changement de base, par exemple:

$$\lim \varepsilon_v(\alpha_n) = 0 \quad \text{pour tout } v \in S_\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_v(\alpha_n)|_v^2 \text{ converge,} \quad \text{pour tout } v \in S_\infty.$$

La fonction f définie au voisinage de l'origine par:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\alpha_n)x^n$$

se prolonge en une fonction à caractéristique bornée dans un certain „disque" de A_T.

Alors, les lemmes énoncés au § 1 permettent de démontrer le théorème suivant:

Théorème 3.2. *Soit T un ensemble de valeurs absolues de $\boldsymbol{K}$ contenant toutes les valeurs absolues archimédiennes, soit:*

$$D = \prod_{v\in T} D_v(r_v) \quad ou \quad \prod_{v\in T} r_v \geqslant 1$$

un „disque" de $\boldsymbol{A}_T$, et soit f une fonction régulière à l'origine et à caractéristique bornée dans D, dont le développement en série entière au voisinage de l'origine a ses coefficients dans $\boldsymbol{K}^T$, alors f est une fraction rationnelle:

$$f(x) = \frac{A(x)}{Q(x)} \quad où \quad A \in \boldsymbol{K}^T[x],\ Q \in \boldsymbol{K}^T[x],\ Q(0) = 1.$$

Comme celle du paragraphe précédent la démonstration utilise les déterminants de Kronecker.

Soit I un ensemble fini de valeurs absolues de $\boldsymbol{K}$. Nous noterons I^- l'ensemble des valeurs absolues ultramètriques de I et par I^+ l'ensemble $I\cup S_\infty$. Nous allons définir sur $\boldsymbol{A}_I = \prod_{v\in I} \boldsymbol{K}_v$ des ensemble analogues à l'ensemble des nombres de Pisot et de Salem:

Définition 3.3. Nous désignons par S_I l'ensemble des éléments algébriques θ de $\boldsymbol{A}_I$ tels que:

1. $|\theta|_v > 1$ pour $v \in I$,
2. θ est zéro d'un polynôme P de degré s, $P \in \boldsymbol{K}[x]$, dont les racines vérifient, dans le complété de la clôture algébrique de $\boldsymbol{K}_v$, soit $\boldsymbol{C}_v$:

$$|\theta^{(i)}|_v \leqslant 1 \quad \text{pour tout } v \text{ et } \begin{cases} i = 2, \ldots, s & \text{si } v \in I, \\ i = 1, \ldots, s & \text{si } v \notin I. \end{cases}$$

On peut facilement voir qu'il existe de tels nombres, il en existe dans $\boldsymbol{K}^I$ et le théorème de Minkowski–Cantor [6] permet de montrer qu'il en existe une infinité dans toute extension de $\boldsymbol{K}$ contenue dans $\boldsymbol{A}_I$ (la démonstration est analogue à celle qui figure dans [11]); si I contient toutes les valeurs absolues archimédiennes, alors l'ensemble S_I est contenu dans l'ensemble exceptionnel pour le théorème de Koksma (cf. [11]). Si I ne contient pas toutes les valeurs absolues archimédiennes, à tout a de $\boldsymbol{A}_I$, on peut associer $\hat{a} \in \boldsymbol{A}_{I^+}$ tel que:

$$\hat{a}_v = a_v \quad \text{si } v \in I,$$
$$\hat{a}_v = 0 \quad \text{si } v \notin I$$

on obtient alors le résultat suivant:

Théorème 3.4. *Pour qu'un élément θ de $\boldsymbol{A}_I$, $|\theta|_v > 1$ pour tout $v \in I$, appartienne à l'ensemble S_I, il faut et il suffit qu'il existe un élément inversible λ de $\boldsymbol{A}_I$, tel que la fonction définie au voisinage de l'origine, sur $\boldsymbol{A}_{I^+}$ par:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\lambda\theta^n)x^n$$

est à caractéristique bornée sur le „disque":

$$D = \prod_{v\in S_\infty} D_v(1) \times \prod_{v\in I^-} \boldsymbol{Z}_v$$

alors $\lambda \in \boldsymbol{K}^I(\theta)$.

Preuve. D'après une remarque faite plus haut, ce critère ne dépend pas de la base choisie. Pour démontrer la partie directe du théorème, il suffit de prendre $\lambda = 1$, quant à la partie réciproque, c'est une application directe du théorème 3.2.

Nous allons maintenant étudier quelques sous-ensembles remarquables de S_I.

Définition 3.5. Soit w une valeur absolue de $\boldsymbol{K}$, nous désignerons par S_I^w le sous-ensemble de S_I dont les éléments vérifient la condition supplémentaire suivante:

$$|\theta^{(i)}|_w < 1 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, s & \text{si } w \notin I, \\ i = 2, \ldots, s & \text{si } w \in I. \end{cases}$$

Si cette propriété est vérifiée pour tout w d'un sous-ensemble J de valeurs absolues de $\boldsymbol{K}$, nous dirons que θ appartient à S_I^J, nous considérons en particulier l'ensemble S_I^∞ où $J = S_\infty$.

Ces ensembles peuvent être caractérisés de la manière suivante:

Théorème 3.6. *Pour qu'un élément θ de $\boldsymbol{A}_I$, $|\theta|_v > 1$ pour tout $v \in I$, appartienne a l'ensemble S_I^J, il faut et il suffit qu'il existe un élément inversible λ de $\boldsymbol{A}_I$, tel que la fonction définie au voisinage de l'origine dans $\boldsymbol{A}_{I^+}$ par:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(\lambda\theta^n)x^n$$

vérifie les conditions du théorème 3.4 et qu'il existe une base telle que:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_w(\lambda\theta^n) = 0 \quad si \quad w \in I \cap J,$$
$$\lim_{n\to\infty} |E(\lambda\theta^n)|_w = 0 \quad si \quad w \in J \setminus I.$$

Pour le démontrer on considère f comme fonction à caractéristique bornée sur le disque:

$$D' = \prod_{w\in J} I_w \times \prod_{v\in S_\infty} D_v(1) \prod_{v\in I^- \setminus J} \boldsymbol{Z}_v$$

de $\boldsymbol{A}_{I^+\cup J}$.

En particulier l'ensemble S_I^∞ peut être caractérisé de la manière suivante:

THÉORÈME 3.7. *Pour qu'un élément θ de $\boldsymbol{A}_I$, $|\theta_v| > 1$ pour tout $v \in I$, appartienne à S_I^∞, il faut et il suffit qu'il existe un élément inversible λ de $\boldsymbol{A}_I$ vérifiant les conditions du théorème 3.4, et tel que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_w(\lambda\theta^n)|_w^2 < \infty \quad \textit{pour} \quad w \in I \cap S_\infty,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |E(\lambda\theta^n)|_w^2 < \infty \quad \textit{pour} \quad w \in S_\infty \setminus I.$$

Si $\boldsymbol{K}$ est le corps $\boldsymbol{Q}$ des rationnels, on retrouve en particulier certain des ensembles introduits par F. Bertrandias [4] et A. Decomps [7].

Si $\boldsymbol{K}$ est un corps totalement réel ou un corps quadratique imaginaire, une partition de S_I analogue à celle qui a été obtenue par A. Decomps [7] permet d'introduire de façon assez naturelle les „nombres de Salem".

Soit θ un élément de S_I et soit P son polynôme minimal ($P \in \boldsymbol{K}[x]$) P n'est pas nécéssairement irréductible, posons:

$$P(x) = \prod_h P_h(x)$$

les polynômes étant des polynômes irréductibles de $\boldsymbol{K}[x]$ deux à deux distincts; nous lui associons une partition (I_h) de I telle que $v \in I_h$ si θ_v est un zéro de P_h, alors trois cas peuvent se présenter, compte tenu du fait que, si pour une valeur absolue v de S_∞, un polynôme P_h admet un zéro sur la circonférence-unité il est réciproque et possède donc cette propriété pour tout v de S_∞ sauf peut-être si P_h est du second degré.

1. Pour tout $v \in S_\infty$ et pour tout h, P_h n'a aucun zéro sur la circonférence-unité. Alors $\theta \in S_I^\infty$.

2. Pour tout h, P_h est un polynôme réciproque, alors, tous les conjugués de θ sauf θ^{-1} sont de valeur absolue 1 (pour $v \in S_\infty$), nous dirons alors que θ appartient à T_I (ensemble analogue à l'ensemble T des nombres de Salem).

3. Il existe au moins un indice h tel que le polynôme P_h soit réciproque et un indice k tel que le polynôme P_k ait tous ses zéros, sauf éventuellement θ_v si $v \in I_k$) à l'intérieur du disque-unité, nous dirons alors que θ appartient à l'ensemble Σ_I^∞.

Nous avons bien obtenu une partition de S_I en trois sous-ensemble: S_I^∞, T_I et Σ_I^∞.

Toujours dans le cas particulier où $\boldsymbol{K}$ est un corps totalement réel ou un corps quadratique imaginaire, aux ensembles S_I^∞ on peut associer des familles compactes de fractions rationnelles (cf. [10] et [17]), mais

on ne peut conclure à la fermeture de l'ensemble que si I contient un seul élément. Ce résultat peut s'énoncer sous la forme suivante:

THÉORÈME 3.8. *Soit $\boldsymbol{K}$ un corps totalement réel, ou un corps quadratique imaginaire, et soit w une valeur absolue de $\boldsymbol{K}$, alors l'ensemble S_w^∞ est fermé dans $\boldsymbol{K}_w$.*

Preuve. A tout $\theta \in S_w^\infty$ on peut associer une fraction rationnelle de la famille $\mathscr{F}(\boldsymbol{K}, w, \delta)$ possédant les propriétés suivantes:

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au voisinage de l'origine, où $a_n \in \boldsymbol{K}_w$,

f est holomorphe dans $D_v(1)$ pour tout $v \in S_\infty$, $v \neq w$ et admet au plus un pôle dans la couronne $\{x \in \boldsymbol{K}_w:\ \delta \leqslant |x|_w < 1\}$,

pour $v \in S_\infty$, et $|x|_v = 1$ on a $|f(x)|_v \leqslant 1$ et si $w \notin S_\infty$, on a l'inégalité $|f(x)|_w \leqslant 1$ dans la couronne $\{x \in \boldsymbol{K}_w;\ r_w < |x|_w < 1\}$.

A une suite convergente $(\theta_\mu)_{\mu \in N}$ d'éléments de S_w^∞ on associe une suite de fractions rationnelles $(f_\mu)_{\mu \in N}$ de la famille $\mathscr{F}(\boldsymbol{K}, w, \delta)$; de cette suite on peut extraire une suite convergente, soit f sa limite, on voit alors facilement, en considérant son développement en série que f admet exactement un pôle $1/\theta_w$ dans $D_w(1)$, par conséquent $\theta_w \in S_w^\infty$.

Dans le cas où I contient plus d'un élément on ne peut pas conclure sans ajouter d'hypothèse supplémentaire.

Bibliographie

[1] M. Amara, *Ensembles fermés de nombres algébriques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 3è série, 83 (1966), p. 215–270.

[2] P. Bateman et A. Duquette, *The analogue of the Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series*, Illinois J. Math. 6 (1962), p. 594–606.

[3] B. Benzaghou, *Algèbres de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France 98 (1970), p. 209–252.

[4] F. Bertrandias, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 4 (1965).

[5] D. G. Cantor, *Power series with integral coefficients*, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), p. 362–366.

[6] — *On the elementary theory of diophantine approximation over the ring of adeles I*, Illinois J. Math. 9 (1965), p. 677–700.

[7] A. Decomps-Guilloux, *Généralisation des nombres de Salem aux adèles*, Acta Arith. 16 (1970), p. 266–314.

[8] M. Grandet-Hugot, *Une propriété des nombres de Pisot dans un corps de séries formelles*, C. R. Acad. Sc. Paris, 265 (1967), p. 39–41.

[9] — *Éléments algébriques remarquables dans un corps de séries formelles*, Acta Arith. 14 (1968), p. 177–184.

[10] — *P. V. éléments dans un corps de nombres algébriques*, ibid. 20 (1972), p. 203–214.

[11] — *Quelques résultats concernant l'équirépartition dans l'anneau des adèles d'un corps de nombres algébriques*, Bull. Sc. Math. 99 (1975), p. 91–111 et 243–247.

[12] S. Lang, *Algebraic numbers*, Addison Wesley, 1964.
[13] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonction méromorphes*, Gauthiers Villars, Paris 1929 (Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions).
[14] — *Eindeutige analytische Funktionen*, 2te Auflage, Springer Verlag, Berlin, 1953 (die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 46).
[15] C. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. 2, 7(1938), p. 205–248.
[16] R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath Math. Monographs, Boston 1963.
[17] C. J. Smyth, *Closed sets of algebraic numbers in complete fields*, Mathematika 17 (1970), p. 199–205.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE CAEN
14032 Caen Cedex, France

Reçu le 12. 12. 1977
et dans la forme modifiée le 6. 2. 1978 (1009)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Sur les extensions cycliques de degré p^n d'un corps local

par

FRANÇOISE BERTRANDIAS (Grenoble)

On note K un corps local, de caractéristique 0 et de caractéristique résiduelle p, et L une extension galoisienne de K, dont le groupe de Galois est cyclique et a pour ordre une puissance de p.

L'anneau B des entiers de L est un module sur son ordre associé $\mathcal{O}$ dans l'algèbre $K[G]$ (§1). On se propose d'étudier le $\mathcal{O}$-module B lorsque la ramification de l'extension $L|K$ est totale et presque maximale (§2). On est amené à étudier l'ensemble B' des éléments de B de trace nulle sur les corps intermédiaires entre L et K, comme module sur son ordre associé $\mathcal{O}'$ (§3 et §4). On en déduit une caractérisation des extensions $L|K$ telles que le $\mathcal{O}$-module B soit libre, caractérisation qui s'exprime par une propriété arithmétique des nombres de ramification de l'extension (§5).

1. Préliminaires sur la notion d'ordre associé

1.1. Définition. Soient A un anneau de Dedekind, et K son corps des fractions. On note E une K-algèbre de dimension finie, et M un E-module libre à un générateur.

Soit N un réseau de M, c'est-à-dire un sous A-module de type fini, engendrant M. L'ensemble $\mathcal{O}$ des éléments λ de E tels que $\lambda N \subset N$ est un ordre de A dans E, qu'on appelle l'ordre associé à N dans E [10].

N est muni d'une structure de $\mathcal{O}$-module.

1.2. Module des entiers d'une extension galoisienne. Soit L une extension galoisienne finie de K, de groupe de Galois G, et soit B la clôture intégrale de A dans L.

On sait que L possède une K-base formée des conjugués d'un même élément (théorème de la „base normale"). Par suite, L est un $K[G]$-module libre à un générateur. On peut donc appliquer les résultats du §1.1, en posant: $E = K[G]$, $M = L$, $N = B$, et introduire l'ordre associé $\mathcal{O}$ à B dans $K[G]$.