le cas où $s = 4$, il suffit d'étudier n'importe quel échange dont le rang de la matrice associée est 4.

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer dans chacun des cas l'existence d'une entier n répondant à la question. En vertu du théorème 54, si $\sigma \in \{\sigma^{(s)}\} \cup \Gamma^b(\sigma^{(s)})$, il existe n ($n = \nu_1 - 1$ dans la démonstration précédente) tel que:

$$\sigma_n = \sigma^{(s)}, \quad \lambda^n \in E.$$

Par ailleurs si $\lambda \in E$, $\lambda_{\sigma(s)}$ comme défini dans le paragraphe 33 appartient à $\Lambda_s^{\sigma^{(s)}} - E$. Par dualité, il résulte donc du théorème 54 que si $\sigma \in \{\sigma^{(s)}\} \cup \cup \Gamma^a(\sigma^{(s)})$, il existe n tel que:

$$\sigma_n = \sigma^{(s)}, \quad \lambda^n \in \Lambda_s^{\sigma^{(s)}} - E.$$

Tenant compte du fait que $(T_n)_m = T_{n+m}$ on en déduit le résultat.

53. Remarque. Les résultats précédents permettent d'exprimer la forme générale des matrices A de passage d'un échange à l'échange induit sur un intervalle admissible, comme produit (dans un ordre déterminé) des matrices A_σ et B_σ.

D'autre part, dans le cas où $\sigma = \sigma^{(s)}$, ils permettent de définir une transformation θ de Λ_s^σ en lui-même, de la manière suivante:

$$\text{si } \lambda \in \Lambda_s^\sigma, \quad \theta(\lambda) = \lambda^n \text{ où } n = \inf\{k > 0,\ \sigma_k = \sigma\}.$$

La transformation Φ de l'introduction est alors définie de la manière suivante:

$$\text{si } \lambda \in \Lambda_s^\sigma, \quad \Phi(\lambda) = \theta^{n+1}(\lambda), \text{ où } n = \inf\{k \geqslant 0,\ \theta^k(\lambda) \in E\}.$$

On peut se demander s'il existe pour la transformation θ une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans le cas où $s = 3$ une telle mesure existe mais n'est pas positive, ni finie; sa densité p est donnée par l'expression:

$$p(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3}\right) \times \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \frac{1}{\lambda_3 + \lambda_2}.$$

Bibliographie

[1] M. Keane, *Interval exchange transformation*, Math. Zeitschr. 141 (1975), p. 77–102.
[2] — *Non ergodic interval exchange transformations*, Preprint.
[3] G. Rauzy, *Une généralisation du développement en fraction continue*, Séminaire de théorie des nombres–Année 1976–77–Paris.
[4] W. A. Veech, *Topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., Sept. 1977.
[5] — *Interval exchange transformations*, Preprint.

Reçu le 1. 12. 1977 (1006)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Sur les approximations diophantiennes simultanées asymptotiques

par

MARC REVERSAT (Talence)

Nous étudions les approximations diophantiennes simultanées par les éléments de certaines suites: nous donnons un critère de forte-eutaxie valable pour les suites de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ ($d \in \boldsymbol{N}^*$).

I. Introduction. Soit d un entier positif. Nous désignons par μ_d la mesure de Haar normalisée du groupe compact $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ et par $\|\cdot\|_d$ sa norme: si $(x_1, \ldots, x_d)$ est un d-uplet de nombres réels dont x désigne l'image canonique dans $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$, on a $\|x\|_d = \sup_{i=1,\ldots,d} \|x_i\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Le théorème métrique de Khintchine peut s'énoncer ainsi ([2], ch. 7): si (ε_n) est une suite décroissante de nombres réels positifs, si pour tout entier $N > 0$, $Z(\alpha, N)$ désigne le nombre de solutions en entiers n, $1 \leqslant n \leqslant N$, de l'inéquation

$$\|n\alpha\|_d < \varepsilon_n$$

alors, pour μ_d-presque tout α, $Z(\alpha, N)$ tend vers l'infini avec N (resp. reste borné) si la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge (resp. converge). P. Erdös ([3]), W. J. Leveque ([6]) et W. M. Schmidt ([14]) précisèrent ce résultat en montrant que si la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge, $Z(\alpha, N)$ est μ_d-presque partout équivalent à sa valeur probable, c'est-à-dire que l'on a pour μ_d-presque tout $\alpha \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:

$$(1.1)\quad \lim_{N\to+\infty} \left\{Z(\alpha, N)\Big(\int Z(\alpha, N)\, d\mu_d(\alpha)\Big)^{-1}\right\} = \lim_{N\to+\infty}\left\{Z(\alpha, N)\Big(\sum_{n=1}^{N} (2\varepsilon_n)^d\Big)^{-1}\right\} = 1.$$

La généralisation suivante de ces problèmes fut étudiée par de nombreux auteurs: étant donnés une suite décroissante (ε_n) de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge, une suite (φ_n) de fonctions de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ dans lui-même et x un élément *fixé* de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$, quelle est la mesure de l'ensemble des éléments α de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ tels que le nombre de solutions en entiers positifs n de l'inéquation

$$\|\varphi_n(\alpha)-x\|_d < \varepsilon_n \tag{1.2}$$

devienne infini avec N ou vérifie la relation (1.1)? Par exemple, W. M. Schmidt étudia ce problème si φ_n est l'application $\alpha \mapsto P(n)\alpha$ où P est un polynôme à coefficients entiers ([15]), W. Philipp ([9]) et B. de Mathan ([7]) pour des suites (φ_n) lacunaires.

Si maintenant *α est fixé*, on peut étudier la mesure de l'ensemble des éléments x de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ pour lesquels l'inéquation (1.2) a une infinité de solutions n. Ce dernier problème conduisit J. Lesca et B. de Mathan a introduire respectivement la notion de suite eutaxique ([5]) et fortement-eutaxique ([7]): soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge. Si (u_n) est une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ désignons par $\nu(x, N)$ le nombre de solutions en entiers n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$ de l'inéquation

$$\|u_n - x\|_d < \varepsilon_n.$$

La suite (u_n) est dite eutaxique (resp. fortement-eutaxique) relativement à la suite (ε_n) si pour μ_d-presque tout $x \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ on a:

$$\lim_{N\to+\infty} \nu(x, N) = +\infty$$

$$\Big(\textit{resp.} \lim_{N\to+\infty} \Big\{\nu(x, N)\Big(\sum_{n=1}^{N}(2\varepsilon_n)^d\Big)^{-1}\Big\} = 1\Big).$$

Si la suite (u_n) est eutaxique (resp. fortement-eutaxique) relativement à toute suite décroissante de nombres réels positifs (ε_n) telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge, elle est dite eutaxique (resp. fortement-eutaxique).

Ces problèmes sont voisins des problèmes antérieurs, mais les méthodes utilisées sont différentes et conduisent à des résultats nouveaux. Par exemple, le théorème métrique non-homogène de Khintchine (resp. le travail [15] de W. M. Schmidt) montrent que la suite $(n\alpha)$ est eutaxique (resp. fortement-eutaxique) *relativement à une suite donnée* (ε_n) pour μ_d-presque tout $\alpha \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$. Or la suite $(n\alpha)$ n'est eutaxique ou fortement eutaxique que pour μ_d-presque aucun α: plus précisément, si et seulement si le nombre

$$M_d(\alpha) = \limsup_{n\to+\infty} (n^{1/d}\|n\alpha\|_d)^{-1}$$

est fini ([5], [8], [10], [11]).

Dans le travail qui suit nous donnons une condition suffisante de forte-eutaxie, plus générale que les critères antérieurs. Elle permet de retrouver les résultats précédemment connus, comme par exemple la *forte-eutaxie* de la suite $(n\alpha)$ lorsque $M_d(\alpha)$ est fini ([8], [11]), et aussi

de préciser dans certains cas l'ensemble des $x \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ exeptionnels, c'est-à-dire ceux pour lesquels on n'a pas

$$\lim_{N\to+\infty} \Big\{\nu(x, N)\Big(\sum_{n=1}^{N}(2\varepsilon_n)^d\Big)^{-1}\Big\} = 1.$$

Ce dernier résultat dépasse d'ailleurs le cadre des suites eutaxiques puisque la même méthode nous permet d'améliorer et de généraliser les résultats de W. Adams ([1]) et S. Lang ([4], p. 28) sur les approximations asymptotiques par les éléments des suites $(n\alpha)$ ([12], [13]).

II. Une condition suffisante de forte-eutaxie. Soit $u = (u_n)$ une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$. Etant donné un hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$, M et N deux entiers tels que $0 \leqslant M < N$, on note $\pi(K, M, N)$ le cardinal de l'ensemble des entiers n tels que $M < n \leqslant N$ et que $u_n \in K$. On pose:

$$D(K, M, N) = |\pi(K, M, N) - (N-M)\mu_d(K)|$$

et l'on écrit:

$$\pi(K, N) = \pi(K, O, N), \quad D(K, N) = D(K, O, N).$$

Soit $c \geqslant 1$ un nombre réel. On pose

$$\theta_c(u; M, N) = \sup_K D(K, M, N), \quad \theta_c(u; N) = \theta_c(u; O, N)$$

la borne supérieure étant prise sur tous les hypercubes K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ tels que $\mu_d(K) = \inf\{1, c/N\}$. Ecrivons de plus:

$$\theta_c(u) = \limsup_{N\to+\infty} \theta_c(u; N), \quad \theta(u) = \limsup_{c\to+\infty} \{\theta_c(u)/c\}.$$

La fonction θ est un raffinement de la notion de discrepence, remarquons qu'une suite u telle que $\theta(u) = 0$ est équirépartie.

Théorème 1. *Soit u une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ telle que $\theta(u) = 0$. Alors u est fortement-eutaxique.*

Nous démontrons d'abord le lemme suivant: soit $t > 0$ un nombre réel, soit K un hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ et soit $\mathscr{K}$ un ensemble d'hypercubes de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ deux à deux disjoints et de mesure $1/t$. Soit $N_d(K, \mathscr{K})$ le nombre des hypercubes $H \in \mathscr{K}$ rencontrant K sans être inclus dans K. Posons:

$$N_d(K; t) = \sup N_d(K, \mathscr{K})$$

la borne supérieure étant prise suivant tous les ensembles $\mathscr{K}$ d'hypercubes deux à deux disjoints et de mesure $1/t$.

Lemme 1.

$$N_d(K; t) \leqslant 2^{d+1}\{\max(\mu_d(K)t, 2^d)\}^{1-1/d}.$$

Preuve. Soient K un hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$, $\mathscr{K}$ un ensemble d'hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ deux à deux disjoints et de mesure $1/t$. Soit K_1 l'hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ formé par les points de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ dont la distance au complémentaire de K est au moins $1/t^{1/d}$, soit K_2 l'hypercube complémentaire de l'ensemble des points de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ dont la distance à K est au moins $1/t^{1/d}$. Posons $\xi = \big(t\mu_d(K)\big)^{1/d}$.

Les hypercubes $H \in \mathscr{K}$ rencontrant K sans être inclus dans K sont tels que $H \subset (K_2 \setminus K_1)$, donc:

$$N_d(K, \mathscr{K}) \leqslant \big(\mu_d(K_2) - \mu_d(K_1)\big)t.$$

Or:

$$\mu_d(K_2) = \left(\mu_d(K)^{1/d} + \frac{2}{t^{1/d}}\right)^d, \qquad \mu_d(K_1) = \left(\sup\left\{\mu_d(K)^{1/d} - \frac{2}{t^{1/d}}, 0\right\}\right)^d$$

donc:

$$N_d(K, \mathscr{K}) \leqslant (\xi+2)^d - (\sup\{\xi-2, 0\})^d.$$

Premier cas: si $\xi > 2$. Alors

$$(\xi+2)^d - \big(\max(\xi-2, 0)\big)^d$$

$$= (\xi+2)^d - (\xi-2)^d = 2 \sum_{0\leqslant n<d/2} \binom{d}{2n+1} \xi^{d-(2n+1)} 2^{2n+1}$$

$$= 4\xi^{d-1} \sum_{0\leqslant n<d/2} \binom{d}{2n+1} \left(\frac{2}{\xi}\right)^{2n} \leqslant 4\xi^{d-1} \sum_{0\leqslant n<d/2} \binom{d}{2n+1} = 2^{d+1}\xi^{d-1}.$$

Deuxième cas: si $\xi \leqslant 2$.

$$(\xi+2)^d - \big(\max(\xi-2, 0)\big)^d = (\xi+2)^d \leqslant 4^d = 2^{d+1}\cdot 2^{d-1}.$$

On a donc:

$$N_q(K; t) \leqslant 2^{d+1}\big(\max(\xi, 2)\big)^{d-1} = 2^{d+1}\big(\max\big(\mu_d(K)t, 2^d\big)\big)^{1-1/d}. \ \blacksquare$$

Soit u une suite d'éléments de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ telle que $\theta(u) = 0$ et soit $\delta > 1$ un nombre réel. Pour tout entier $s \geqslant 0$ posons $N_s = [\delta^s]$, où $[\cdot]$ désigne la partie entière.

Lemme 2. *Pour tout $\alpha > 0$ il existe $c_\alpha > 0$ tel que pour tout $c > c_\alpha$ il xiste un entier positif $s_0 = s_0(\alpha, c)$ tel que l'on ait pour tout $s \geqslant s_0$:*

$$\theta_c(u; N_s, N_{s+1}) < \alpha \frac{N_{s+1} - N_s}{N_{s+1}} c.$$

Preuve. Soit $\alpha > 0$ et posons $\alpha' = \inf\left\{\frac{1}{2^d}, \left(\frac{(\delta-1)\alpha}{2^{d+3}\delta}\right)^d\right\}$. Soit $c'_{\alpha'} > 0$ tel que l'on ait pour tout $c > c'_{\alpha'}$

$$\theta_c(u) < \alpha' c.$$

Soit c tel que $\alpha' c > c'_{\alpha'}$ et soit $s'_0 = s'_0(\alpha', c)$ un entier tel que tout entier $s > s'_0$ vérifie

$$\theta_c(u, N_s) < \alpha' c, \qquad \theta_{\alpha' c}(u, N_s) < (\alpha')^2 c$$

et soit suffisamment grand pour que $c/N_{s+1} < 1$. Soit $s > s'_0$ et soit K un hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ de mesure c/N_{s+1}. On a

$$D(K, N_s, N_{s+1}) \leqslant D(K, N_s) + D(K, N_{s+1}) \leqslant D(K, N_s) + \theta_c(u; N_{s+1}).$$

Majorons $D(K, N_s)$: soit $\{K_1, \ldots, K_q\}$ un recouvrement de K par des hypercubes deux à deux disjoints de mesures $\alpha' c/N_s$. D'après le lemme 1, le nombre q' des entiers i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ tels que K_i rencontre K sans être inclus dans K vérifie

$$q' \leqslant 2^{d+1}\left(\max\left\{\frac{c}{N_{s+1}}\cdot\frac{N_s}{\alpha' c}, 2^d\right\}\right)^{1-1/d} \leqslant \frac{2^{d+1}}{(\alpha')^{1-1/d}} \qquad (\text{car } \alpha' \leqslant 1/2^d).$$

Donc, si le recouvrement $\{K_1, \ldots, K_q\}$ de K est tel que $K_i \cap K \neq \emptyset$ pour tout $i = 1, \ldots, q$, on a:

$$q \leqslant \frac{c}{N_{s+1}}\cdot\frac{N_s}{\alpha' c} + \frac{2^{d+1}}{(\alpha')^{1-1/d}}.$$

D'autre part

$$\sum_{\substack{i=1\\K_i\subset K}}^{q} \pi(K_i, N_s) \leqslant \pi(K, N_s) \leqslant \sum_{i=1}^{q} \pi(K_i, N_s)$$

par conséquent:

$$D(K, N_s) \leqslant \sum_{i=1}^{q} D(K_i, N_s) + q'\alpha' c \leqslant q\theta_{\alpha' c}(u; N_s) + q'\alpha' c$$

d'où l'on déduit, compte tenu du choix de c et des majorations de q et q':

$$D(K, N_s) < \frac{N_s}{N_{s+1}}\alpha' c + 2^{d+1}(\alpha')^{1+1/d}c + 2^{d+1}(\alpha')^{1/d}c \leqslant (1+2^{d+2})(\alpha')^{1/d}c.$$

Finalement:

$$D(K, N_s, N_{s+1}) < (1+2^{d+2})(\alpha')^{1/d}c + \theta_c(u; N_{s+1}) < 2^{d+3}(\alpha')^{1/d}c.$$

Comme la suite $\left(\frac{N_{s+1}-N_s}{N_{s+1}} \times \frac{\delta}{\delta-1}\right)_{s\in\boldsymbol{N}}$ converge vers 1, il en résulte que pour s suffisamment grand

$$D(K, N_s, N_{s+1}) < 2^{d+3}(\alpha')^{1/d}\frac{\delta}{\delta-1}\cdot\frac{N_{s+1}-N_s}{N_{s+1}}c \leqslant \alpha c\frac{N_{s+1}-N_s}{N_{s+1}}. \ \blacksquare$$

Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge. On suppose que pour tout entier positif s l'on a:

(2.1) $\qquad \varepsilon_n = \varepsilon_{N_{s+1}}$ pour tout entier n tel que $N_s < n \leqslant N_{s+1}$.

Montrons que u est fortement eutaxique relativement à cette suite (ε_n): on peut supposer que la suite (ε_n) converge vers zéro (sinon le problème posé est résolu puisque, si $\theta(u) = 0$, la suite u est équirépartie) et que pour tout $n \in N$ on a $\varepsilon_n \leqslant 1/4$ (quitte à modifier les premiers termes de la suite (ε_n)).

II.1. Le cas des entiers n pour lesquels (ε_n) décroît lentement. Soient $a > 0$ et $c > c_a$. Pour tout $s > s_0$ posons:

$$A_s = \left[\left(\frac{N_{s+1}}{c}\right)^{1/d} \varepsilon_{N_{s+1}}\right]$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Pour M et N entier tels que $0 \leqslant M < N$, pour $x \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$, notons $\nu(x, M, N)$ le cardinal de l'ensemble des entiers n tels que $M < n \leqslant N$ et que $\|x - u_n\|_d < \varepsilon_n$. Posons $\nu(x, N) = \nu(x, 0, N)$. Soit $A > 0$ un entier.

LEMME 3. *Soit s un entier tel que $s > s_0$. Si de plus $A_s \geqslant A$, on a pour tout $x \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:*

$$\left|\nu(x, N_s, N_{s+1}) - \sum_{n=N_s+1}^{N_{s+1}} (2\varepsilon_n)^d\right| \leqslant \left(a + \frac{(1+a)2^d}{A}\right) \sum_{n=N_s+1}^{N_{s+1}} (2\varepsilon_n)^d.$$

Preuve. Soit $x \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$. Appelons P_1 (resp. P_2) l'hypercube ouvert de centre x et de coté $2A_s\left(\frac{c}{N_{s+1}}\right)^{1/d}$ (resp. $2(A_s+1)\left(\frac{c}{N_{s+1}}\right)^{1/d}$) (remarquons que ceci à un sens puisque $(2A_s+1)\left(\frac{c}{N_{s+1}}\right)^{1/d} < 1$ du fait que $\varepsilon_n < 1/4$ pour tout n). Si n est un entier tel que $N_s < n \leqslant N_{s+1}$, on a:

$$(u_n \in P_1) \Rightarrow (\|x - u_n\|_d < \varepsilon_n) \Rightarrow (u_n \in P_2).$$

Donc:

(2.2) $$\pi(P_1, N_s, N_{s+1}) \leqslant \nu(x, N_s, N_{s+1}) \leqslant \pi(P_2, N_s, N_{s+1}).$$

L'hypercube P_1 (resp. P_2) est la réunion de $(2A_s)^d$ (resp. $(2A_s+1)^d$). Hypercubes deux à deux disjoints de mesures c/N_{s+1}, donc, par définition de $\theta_c(u; N_s, N_{s+1})$:

$$\pi(P_1, N_s, N_{s+1}) \geqslant (2A_s)^d \left\{\frac{N_{s+1} - N_s}{N_{s+1}}\, c - \theta_c(u; N_s, N_{s+1})\right\}$$

et

$$\pi(P_2, N_s, N_{s+1}) \leqslant 2^d (A_s+1)^d \left\{\frac{N_{s+1} - N_s}{N_{s+1}}\, c + \theta_c(u; N_s, N_{s+1})\right\}$$

d'où il résulte puisque $c > c_a$ et $s > s_0$:

$$\pi(P_1, N_s, N_{s+1}) \geqslant (2A_s)^d \frac{N_{s+1} - N_s}{N_{s+1}}\, c(1-a)$$

et

$$\pi(P_2, N_s, N_{s+1}) \leqslant 2^d (A_s+1)^d \frac{N_{s+1} - N_s}{N_{s+1}}\, c(1+a).$$

Or, pour tout nombre réel $x \geqslant 1$, on a: $[x] \geqslant x\left(1 - \frac{1}{[x]}\right)$, donc:

$$A_s^d \geqslant \frac{N_{s+1}}{c}\, \varepsilon_{N_{s+1}}^d \left(1 - \frac{1}{A_s}\right)^d \geqslant \frac{N_{s+1}}{c}\, \varepsilon_{N_{s+1}}^d \left(1 - \frac{1}{A}\right)^d.$$

De même:

$$(A_s+1)^d \leqslant \frac{N_{s+1}}{c}\, \varepsilon_{N_{s+1}}^d \left(1 + \frac{1}{A}\right)^d.$$

Avec (2.2) il vient donc:

$$|\nu(x, N_s, N_{s+1}) - (N_{s+1} - N_s)(2\varepsilon_{N_{s+1}})^d|$$
$$\leqslant \sup\left\{\left(1 + \frac{1}{A}\right)^d (1+a) - 1,\ 1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^d (1-a)\right\} (N_{s+1} - N_s)(2\varepsilon_{N_{s+1}})^d.$$

On en déduit le lemme avec (2.1) et en remarquant que:

$$\sup\left\{\left(1 + \frac{1}{A}\right)^d (1+a) - 1,\ 1 - \left(1 - \frac{1}{A}\right)^d (1-a)\right\} = \left(1 + \frac{1}{A}\right)^d (1+a) - 1$$
$$= a + (1+a) \sum_{n=1}^{d} \binom{d}{n} A^{-n} \leqslant a + \frac{1+a}{A} \sum_{n=1}^{d} \binom{d}{n} \leqslant a + \frac{(1+a)2^d}{A}.$$

II.2. Le cas des entiers n pour lesquels (ε_n) décroît rapidement. Dans ce paragraphe, si $t \in]0, 1]$ est un nombre réel et si $h = (h_1, \ldots, h_d)$ est un d-uplet de nombres réels, on désigne par $H(h, t)$ l'hypercube de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ image canonique de

$$\prod_{l=1}^{d} [h_l t^{1/d}, (h_l+1) t^{1/d}[.$$

Soient $a > 0$, $c > c_a$ et soit $A > 0$ un entier. Appelons $s_1 < s_2 < \ldots < s_r < \ldots$ les entiers s tels que

(2.3) $\qquad A_s < A, \qquad s > s_0 \qquad$ et $\qquad A(c/N_{s+1})^{1/d} \leqslant 1/6$

($A_s < A$ implique $\varepsilon_{N_{s+1}} < A(c/N_{s+1})^{1/d}$ car A est un entier). Posons pour tout entier $r > 0$:

$$M_r = N_{s_r+1} \quad \text{et} \quad M_r^- = N_{s_r}. \tag{2.4}$$

On suppose que la série $\sum_{r\in N^*} \sum_{M_r^- < n \leqslant M_r} \varepsilon_n^d$ diverge. Dans le cas contraire, pour μ_d-presque tout $x \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n et r tels que $M_r^- < n \leqslant M_r$ et que $\|x-u_n\|_d < \varepsilon_n$; le lemme 3 suffit alors pour l'étude de la forte eutaxie relativement à la suite (ε_n).

Notons u^* la sous-suite de u obtenue par restriction aux entiers n pour lesquels il existe un entier r vérifiant $M_r^- < n \leqslant M_r$. Nous allons scinder la suite u^* en suites „très bien réparties", plus aisées à étudier.

II.2.1. Décomposition de la suite u^* en suites „très bien réparties". Soit $q \in \{0, 1, 2\}^d$ et soit $r > 0$ un entier. Notons $\mathbf{1}$ le d-uplet $(1, \ldots, 1)$ et soit $h = (h_1, \ldots, h_d)$ un d-uplet d'entiers tel que:

$$0 \leqslant h_l \leqslant \frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}} - 1 \quad \text{pour tout } l = 1, \ldots, d.$$

Désignons par $x_{1,h}, \ldots, x_{n_h,h}$ les éléments de l'ensemble

$$u^{-1}\left(H\left(3h+q+\mathbf{1}, \frac{A^d c}{M_r}\right)\right) \cap \,]M_r^-, M_r].$$

L'hypercube $H(3h+q+\mathbf{1}, A^d c/M_r)$ est réunion de A^d hypercubes deux à deux disjoints de mesures c/M_r, donc le nombre n_h, qui est égal à

$$\pi(H(3h+q+\mathbf{1}, A^d c/M_r), \; M_r^-, M_r),$$

vérifie:

$$\left| n_h - \frac{M_r - M_r^-}{M_r} A^d c \right| \leqslant A^d \theta_c(u;\, M_r^-, M_r)$$

où encore, d'après (2.3) et le lemme 2:

$$\left| n_h - \frac{M_r - M_r^-}{M_r} A^d c \right| \leqslant \alpha \, \frac{M_r - M_r^-}{M_r} A^d c.$$

Soit $r_0 > 0$ un entier tel que l'on ait pour tout $r > r_0$:

$$\left| \frac{M_r - M_r^-}{M_r} \frac{\delta}{\delta - 1} - 1 \right| < \alpha.$$

Donc pour tout $r > r_0$, pour tout d-uplet d'entiers $h = (h_1, \ldots, h_d)$ tel que

$$0 \leqslant h_l \leqslant \frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}} - 1 \quad \text{pour} \quad l = 1, \ldots, d,$$

on a:

$$(1-\alpha)^2 \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) A^d c < n_h < (1+\alpha)^2 \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) A^d c.$$

Posons

$$\omega_1 = \left[(1-\alpha)^2 \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) A^d c\right] + 1 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \left[(1+\alpha)^2 \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) A^d c\right].$$

On a donc pour tous r et h vérifiant les hypothèses précédentes

$$\omega_1 \leqslant n_h \leqslant \omega_2.$$

Soient $q \in \{0, 1, 2\}^d$ et $r > r_0$ un entier. Pour tout $j = 1, \ldots, \omega_2$ désignons par $Y_j^{q,r}$ l'ensemble des entiers de la forme $x_{\min(j,n_h),h}$ où $h = (h_1, \ldots, h_d)$ est un d-uplets d'entiers tels que:

$$0 \leqslant h_l \leqslant \frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}} - 1 \quad \text{pour} \quad l = 1, \ldots, d.$$

Posons aussi: $Y_j^q = \bigcup_{r > r_0} Y_j^{q,r}$.

Soit $i = 1$ ou 2. Écrivons:

$$X_i = \bigcup_{q \in \{0,1,2\}^d} \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant \omega_i} Y_j^q.$$

Avant d'énoncer les propriétés importantes vérifiées par les ensembles Y_j^q et X_i ($j \in \{1, 2, \ldots, \omega_2\}$, $q \in \{0, 1, 2\}^d$ et $i = 1$ ou 2) introduisons une nouvelle notation: pour tout $n \in \boldsymbol{N}$ nous désignons par V_n l'hypercube ouvert de centre u_n et de côté $2\varepsilon_n$.

Lemme 4. *Soient $q \in \{0, 1, 2\}^d$, $r > r_0$ un entier et $j \in \{1, \ldots, \omega_2\}$.*

(2.5) *Pour tout d-uplet d'entiers $h = (h_1, \ldots, h_d)$ tels que $0 \leqslant h_l \leqslant \frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}} - 1$ pour $l = 1, \ldots, d$, l'ensemble*

$$Y_j^{q,r} \cap u^{-1}\left(H\left(h + \frac{1}{3} q; \frac{3^d A^d c}{M_r}\right)\right)$$

est réduit à un point. De plus

$$Y_j^{q,r} \subset u^{-1}\left(\bigcup_h H\left(h + \frac{1}{3} q; \frac{3^d A^d c}{M_r}\right)\right)$$

la réunion étant prise suivant les d-uplets h vérifiant les hypothèses précédentes.

(2.6) *Si n et m sont deux éléments de $Y_j^{q,r}$, $n \neq m$, on a:*

$$V_n \cap V_m = \emptyset.$$

(2.7)
$$\lim_{R\to+\infty}\Big\{\Big(\sum_{\substack{n\leqslant M_R\\ n\in Y_j^q}}\varepsilon_n^d\Big)\Big(\sum_{0<r\leqslant R}\frac{M_r}{3^dA^dc}\varepsilon_{M_r}^d\Big)^{-1}\Big\}=1.$$

(2.8) *Les ensembles Y_j^q, $j\in\{1,\ldots,\omega_1\}$ et $q\in\{0,1,2\}^d$, forment une partition de X_1.*

(2.9) *Pour tout entier $n>0$ posons $u_n=(u_n^{(1)},\ldots,u_n^{(d)})$. L'ensemble des entiers n tels que $M_r^-<n\leqslant M_r$ et que $\inf\limits_{1\leqslant i\leqslant d}\|u_n^{(i)}\|>2A(c/M_r)^{1/d}$ est inclus dans*

$$X_2\cap\,]M_r^-,M_r].$$

Preuve. Soit $r>r_0$ un entier et $q\in\{0,1,2\}^d$. Soit h un d-uplet d'entiers $(h_1,\ldots,h_d)$ tel que:

$$0\leqslant h_l\leqslant\frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}-1\qquad\text{pour}\qquad l=1,\ldots,d.$$

L'hypercube $H\Big(3h+q+1,\dfrac{A^dc}{M_r}\Big)$ est inclus dans $H\Big(h+\frac{1}{3}q,\dfrac{3^dA^dc}{M_r}\Big)$, d'où (2.5). D'autre part, pour tout $j\in\{1,\ldots,\omega_2\}$, pour tout $n\in Y_j^{q,r}$ tel que

$$u_n\in H(3h+q+1,A^dc/M_r),\qquad\text{on a}\qquad V_n\subset H(h+\tfrac{1}{3}q,3^dA^dc/M_r),$$

d'où l'assertion (2.6).

Le nombre d'éléments de $Y_j^{q,r}$ est égal au nombre d'hypercubes $H\Big(3h+q+1,\dfrac{A^dc}{M_r}\Big)$ (où $h=(h_1,\ldots,h_d)$ est un d-uplet d'entiers tels que:

$$0\leqslant h_l\leqslant\frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}-1\qquad\text{pour}\qquad l=1,\ldots,d)$$

donc le cardinal de $Y_j^{q,r}$ est $([M_r^{1/d}/3Ac^{1/d}])^d$. On a donc (avec (2.1)):

$$\sum_{\substack{n\leqslant M_R\\ n\in Y_j^q}}\varepsilon_n^d=\sum_{r_0<r\leqslant R}\Big(\Big[\frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}\Big]\varepsilon_{M_r}\Big)^d$$

d'où (2.7).

Montrons (2.8): il suffit de prouver que les ensembles Y_j^q ($j\in\{1,\ldots,\omega_1\}$ et $q\in\{0,1,2\}^d$) sont deux à deux disjoints. Soient $q,q'\in\{0,1,2\}^d$ et $j,j'\in\{1,\ldots,\omega_1\}$ tels que $Y_j^q\cap Y_{j'}^{q'}\neq\emptyset$. Montrons $q=q'$ et $j=j'$. Soient $n\in Y_j^q\cap Y_{j'}^{q'}$ et $r>r_0$ un entier tel que $M_r^-<n\leqslant M_r$. Comme $n\in Y_j^q$, u_n est dans hypercube de la forme $H(3h+q+1,A^dc/M_r)$. De même

u_n est dans un hypercube du type $H(3h'+q'+1,A^dc/M_r)$. Si $q\neq q'$ ou $h\neq h'$ ces deux hypercubes sont disjoints. Donc $q=q'$ et $h=h'$. Mais, en reprenant les notations de la construction des ensembles Y_j^q, on a $n=x_{\min(j,n_h),h}=x_{\min(j',n_h),h}$, d'où: $\min(j,n_h)=\min(j',n_h)$. Or j et j' étant des éléments de $\{1,\ldots,\omega_1\}$ on a $\min(j,n_h)=j$ et $\min(j',n_h)=j'$. Donc $j=j'$.

Prouvons (2.9): les éléments n de $X_2\cap\,]M_r^-,M_r]$ sont les entiers n tel que $M_r^-<n\leqslant M_r$ et que u_n appartienne à un hypercube de la forme $H(3h+q+1,A^dc/M_r)(q\in\{0,1,2\}^d$, $h=(h_1,\ldots,h_d)$ est un d-uplet d'entiers tels que $0\leqslant h_l\leqslant\dfrac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}-1$ pour $l=1,\ldots,d)$. Donc tout entier n tel que $M_r^-<n\leqslant M_r$ et que

$$\inf_{1\leqslant i\leqslant d}|u_n^{(i)}|\geqslant\frac{2Ac^{1/d}}{M_r^{1/d}}$$

appartient à X_2. ∎

Soient $j\in\{1,\ldots,\omega_2\}$ et $q\in\{0,1,2\}^d$ *fixés*. Posons $Y=Y_j^q$. Les assertions (2.5) et (2.6) montrent que la suite $(u_n)_{n\in Y}$ est très bien répartie. Nous allons étudier la forte-eutaxie de cette suite.

II.2.2. Un résultat métrique pour la suite $(u_n)_{n\in Y}$. Pour tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ et $R\in\boldsymbol{N}$, soit $\nu_Y(x,M_R)$ le cardinal de l'ensemble des entiers n tels que

$$n\in Y,\qquad n\leqslant M_R\qquad\text{et}\qquad\|x-u_n\|_d<\varepsilon_n.$$

Lemme 5. *On a pour μ_d-presque tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:*

$$\lim_{R\to+\infty}\Big\{\nu_Y(x,M_R)\Big(\sum_{\substack{n=1\\ n\in Y}}^{M_R}(2\varepsilon_n)^d\Big)^{-1}\Big\}=1.$$

Preuve. Pour tout entier $r>r_0$, posons:

(2.10)
$$B_r=\bigcup_{\substack{M_r^-<n\leqslant M_r\\ n\in Y}}V_n.$$

D'après (2.6), les hypercubes V_n ($M_r^-<n\leqslant M_r$ et $n\in Y$) sont deux à deux disjoints. Par conséquent, pour tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ et pour tout $R\in\boldsymbol{N}$ le nombre $\nu_Y(x,M_R)-\nu_Y(x,M_{r_0})$ est égal au cardinal $Z(x,R)$ de l'ensemble des entiers r tels que $r_0<r\leqslant R$ et que $x\in B_r$. Evaluons $Z(x,R)$:

Lemme 6. *Soit B_r une suite de parties mesurables d'un espace probabilité (muni d'une probabilité notée μ) telle que la série $\sum\mu(B_r)$ diverge. Pour tout $R\in\boldsymbol{N}$ et pour tout x, soit $Z(x,R)$ le cardinal de l'ensemble des entiers positifs $r\leqslant R$ tels que $x\in B_r$. Supposons qu'il existe une suite (δ_k) de nombres réels positifs telle que la série $\sum\delta_k$ converge et telle que, quels que soient les entiers r et r' vérifiant $0\leqslant r'<r$, on ait*

$$\mu(B_r\cap B_{r'})\leqslant\mu(B_r)\mu(B_{r'})+\mu(B_r)\delta_{r-r'}.$$

Alors, on a pour μ-presque tout x:

$$\lim_{R\to+\infty}\Big\{Z(x,R)\Big(\sum_{r=0}^{R}\mu(B_r)\Big)^{-1}\Big\}=1.$$

Ce lemme a été utilisé implicitement par de nombreux auteurs, on le trouvera sous cette forme dans [9] (th. 3).

Montrons que la suite (B_r) définie par (2.10) vérifie les hypothèses de ce dernier lemme (avec $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ muni de μ_d comme espace de probabilité). D'après (2.7) la série $\sum\mu_d(B_r)$ diverge. Il suffit donc de prouver que pour tous r et r' entiers tels que $r_0<r'<r$, on a uniformément par rapport à r' et r:

$$\mu_d(B_r\cap B_{r'})\leqslant\mu_d(B_r)\mu_d(B_{r'})+\mu_d(B_r)\cdot O(\delta^{(r'-r)/d}). \tag{2.11}$$

Montrons cette formule: soit n un entier tel que $M_{r'}^-<n\leqslant M_{r'}$. Le nombre d'hypercubes $H(h+\frac13q,\,3^dA^dc/M_r)$ (h décrivant les d-uplets d'entiers $(h_1,\ldots,h_d)$ tels que:

$$0\leqslant h_l\leqslant\frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}-1\qquad\text{pour}\qquad l=1,\ldots,d)$$

rencontrant V_n sans être contenus dans V_n est, d'après le lemme 1, majoré par

$$\begin{aligned}&2^{d+1}\Big(\max\Big\{\frac{2\varepsilon_n}{3A}\Big(\frac{M_r}{c}\Big)^{1/d},2\Big\}\Big)^{d-1}\\ &\quad\leqslant2^{d+1}\Big(\max\Big\{\frac23\Big(\frac{M_r}{M_{r'}}\Big)^{1/d},2\Big\}\Big)^{d-1}\qquad\text{car }\varepsilon_n=\varepsilon_{M_{r'}}<A\Big(\frac{c}{M_{r'}}\Big)^{1/d}\\ &\quad\leqslant2^{2d}\Big(\frac{M_r}{M_{r'}}\Big)^{1-1/d}.\end{aligned}$$

Donc le nombre d'hypercubes $H(h+\frac13q,\,3^dA^dc/M_r)$ (h vérifiant les hypothèses précédentes) *rencontrant $B_{r'}$ sans être contenus dans $B_{r'}$* est majoré par:

$$\sum_{\substack{M_{r'}^-<n\leqslant M_{r'}\\ n\in Y}}2^{2d}\Big(\frac{M_r}{M_{r'}}\Big)^{1-1/d}=2^{2d}\Big(\frac{M_r}{M_{r'}}\Big)^{1-1/d}\Big(\Big[\frac{M_{r'}^{1/d}}{3Ac^{1/d}}\Big]\Big)^d\leqslant\frac{2^{2d}}{3^dA^dc}\Big(\frac{M_r}{M_{r'}}\Big)^{1-1/}M_{r'}$$

puisque, d'après (2.5), le cardinal de $Y\cap\,]M_{r'}^-,M_{r'}]$ est égal au nombre d'hypercubes de la forme $H(h'+\frac13q,\,3^dA^dc/M_{r'})$, h' décrivant le d-uplets d'entiers $(h_1',\ldots,h_d')$ tels que:

$$0\leqslant h_l'\leqslant\frac{M_{r'}^{1/d}}{3Ac^{1/d}}\qquad\text{pour}\qquad l=1,\ldots,d.$$

D'autre part, le nombre d'hypercubes $H(h+\frac13q,\,3^dA^dc/M_r)$ (où $h=(h_1,\ldots,h_d)\in\boldsymbol{N}^d$ et $0\leqslant h_l\leqslant\dfrac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}-1$ pour $l=1,\ldots,d$) *contenus dans $B_{r'}$* est majoré par:

$$\mu_d(B_{r'})\frac{M_r}{3^dA^dc}.$$

Il résulte de ces deux évaluations que le nombre Z des hypercubes

$$H\Big(h+\tfrac13q,\,\frac{3^dA^dc}{M_r}\Big)\qquad\Big(\text{où }h=(h_1,\ldots,h_d)\in\boldsymbol{N}^d\text{ et }0\leqslant h_l\leqslant\frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}-1\ \text{pour }l=1,\ldots,d\Big)$$

rencontrant $B_{r'}$ vérifie:

$$Z\leqslant\mu_d(B_{r'})\frac{M_r}{3^dA^dc}+\frac{2^{2d}}{3^dA^dc}\Big(\frac{M_r}{M_{r'}}\Big)^{1-1/d}M_{r'}=\Big(\mu_d(B_{r'})+2^{2d}\Big(\frac{M_{r'}}{M_r}\Big)^{1/d}\Big)\frac{M_r}{3^dA^dc}.$$

D'après (2.5), tout hypercube $H(h+\frac13q,\,3^dA^dc/M_r)$ (h vérifiant les hypothèses précédentes) contient un et un seul point u_n tel que $n\in Y\cap\,]M_r^-,M_r]$ et tout point u_n ($n\in Y\cap\,]M_r^-,M_r]$) appartient à un tel hypercube. Donc le nombre Z majore le cardinal des entiers $n\in Y\cap\,]M_r^-,M_r]$ tels que $V_n\cap B_{r'}\neq\emptyset$. Comme $\mu_d(V_n)=(2\varepsilon_n)^d=(2\varepsilon_{M_r})^d$ pour $M_r^-<n\leqslant M_r$, il vient donc

$$\mu_d(B_r\cap B_{r'})\leqslant Z(2\varepsilon_{M_r})^d\leqslant\Big(\mu_d(B_{r'})+2^{2d}\Big(\frac{M_{r'}}{M_r}\Big)^{1/d}\Big)\frac{M_r}{3^dA^dc}(2\varepsilon_{M_r})^d. \tag{2.12}$$

On a:

$$\frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}=\Big[\frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}\Big]\Big(1+O\Big(\frac{1}{M_r^{1/d}}\Big)\Big)$$

uniformément par rapport à r, donc:

$$\frac{M_r}{3^dA^dc}=\Big[\frac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}\Big]^d\Big(1+O\Big(\frac{1}{M_r^{1/d}}\Big)\Big)$$

uniformément par rapport à r. De plus la mesure de B_r est $\Big(\Big[\dfrac{M_r^{1/d}}{3Ac^{1/d}}\Big]2\varepsilon_{M_r}\Big)^d$ puisque les hypercubes V_n tels que $n\in Y\cap\,]M_r^-,M_r]$ sont deux à deux disjoints (d'après (2.6)) et au nombre de $[M_r^{1/d}/3Ac^{1/d}]^d$ (d'après (2.5)).

La relation (2.12) donne donc:

$$\begin{aligned}\mu_d(B_r\cap B_{r'})&\leqslant\Big(\mu_d(B_{r'})+2^{2d}\Big(\frac{M_{r'}}{M_r}\Big)^{1/d}\Big)\Big(1+O\Big(\frac{1}{M_r^{1/d}}\Big)\Big)\mu_d(B_r)\\ &=\Big\{\mu_d(B_{r'})+2^{2d}\Big(\frac{M_{r'}}{M_r^{1/d}}\Big)^{1/d}+O\Big(\frac{1}{M_r^{1/d}}\Big)\Big\}\mu_d(B_r)\end{aligned}$$

uniformément par rapport à r' et r.

On en déduit la formule (2.11) en remarquant que:

$$2^{2d}\left(\frac{M_{r'}}{M_r}\right)^{1/d}+O\left(\frac{1}{M_r^{1/d}}\right)=O\left(\left(\frac{M_{r'}}{M_r}\right)^{1/d}\right)=O(\delta^{(r'-r)/d})$$

uniformément par rapport à r' et r.

Le lemme 6 montre donc que pour μ_d-presque tout x:

$$\lim_{R\to+\infty}\Big\{Z(x,R)\Big(\sum_{r_0<r\leqslant R}\mu_d(B_r)\Big)^{-1}\Big\}=1.$$

Ceci prouve le lemme 5 puisque pour tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:

$$\nu_\Gamma(x,M_R)-\nu_\Gamma(x,M_{r_0})=Z(x,R)$$

et que

$$\sum_{r_0<r\leqslant R}\mu_d(B_r)=\sum_{r_0<r\leqslant R}\sum_{\substack{n\in\Gamma\\ M_r^-<n\leqslant M_r}}\mu_d(V_n)=\sum_{\substack{M_{r_0+1}^-<n\leqslant M_r\\ n\in\Gamma}}(2\varepsilon_n)^d.$$

II.2.3. Un résultat métrique pour la suite u^*. Pour tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ et $M\in\boldsymbol{N}$ notons $\nu^*(x,M)$ le cardinal de l'ensemble des entiers $n\leqslant M$ pour lesquels il existe un entier r tel que:

$$M_r^-<n\leqslant M_r\quad\text{ et }\quad\|x-u_n\|_d<\varepsilon_n=\varepsilon_{M_r};$$

c'est-à-dire que $\nu^*(x,M)$ est le nombre d'entiers $n\leqslant M$ tels que u_n soit un terme de la suite u^* et que $\|x-u_n\|_d<\varepsilon_n$.

LEMME 7. *On a pour μ_d-presque tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:*

$$\limsup_{R\to+\infty}\left|\nu^*(x,M_R)\Big\{\sum_{r=1}^{R}(M_r-M_r^-)(2\varepsilon_{M_r})^d\Big\}^{-1}-1\right|\leqslant 2a+a^2.$$

Preuve. Soit $R>r_0$ un entier. On a d'après (2.8):

$$\sum_{q\in\{0,1,2\}^d}\sum_{j=1}^{\omega_1}\nu_{Y_j^q}(x,M_R)\leqslant\nu^*(x,M_R).$$

Le lemme 5 montre donc que pour μ_d-presque tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:

$$\liminf_{R\to+\infty}\Big(\nu^*(x,M_R)\Big\{\sum_{q\in\{0,1,2\}^d}\sum_{j=1}^{\omega_1}\sum_{\substack{n=1\\ n\in Y_j^q}}^{M_R}(2\varepsilon_n)^d\Big\}^{-1}\Big)\geqslant 1.$$

D'autre part (2.7) montre que:

$$\lim_{R\to+\infty}\Big\{\Big(\sum_{q\in\{0,1,2\}^d}\sum_{j=1}^{\omega_1}\sum_{\substack{n=1\\ u\in Y_j^q}}^{M_R}(2\varepsilon_n)^d\Big)\Big(\frac{\omega_1}{A^dc}\sum_{r=1}^{R}M_r(2\varepsilon_{M_r})^d\Big)^{-1}\Big\}=1,$$

ou encore, puisque $\omega_1\geqslant(1-a)^2(1-1/\delta)A^dc$:

$$\lim_{R\to+\infty}\Big\{\Big(\sum_{q\in\{0,1,2\}^d}\sum_{j=1}^{\omega_1}\sum_{\substack{n=1\\ n\in Y_j^q}}^{M_R}(2\varepsilon_n)^d\Big)\Big(\sum_{r=1}^{R}(M_r-M_r^-)(2\varepsilon_{M_r})^d\Big)^{-1}\Big\}\geqslant(1-a)^2.$$

Il vient donc:

$$\liminf_{R\to+\infty}\Big\{\nu^*(x,M_R)\Big(\sum_{r=1}^{R}(M_r-M_r^-)(2\varepsilon_{M_r})^d\Big)^{-1}\Big\}\geqslant(1-a)^2. \tag{2.13}$$

Pour μ_d-presque tout $x=(x^{(1)},\ldots,x^{(d)})\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ il existe un entier r'_x tel que $r>r'_x$ implique $\inf\limits_{1\leqslant i\leqslant d}\|x^{(i)}\|\geqslant 3A\left(\frac{c}{M_r}\right)^{1/d}$. Posons $r_x=\sup(r'_x,r_0)$. Soient $r>r_x$ et n des entiers tels que $M_r^-<n\leqslant M_r$ et $\|x-u_n\|_d<\varepsilon_n$. On a

$$\inf_{1\leqslant i\leqslant d}\|u_n^{(i)}\|\geqslant\inf_{1\leqslant i\leqslant d}\|x^{(i)}\|-\|u_n-x\|_d\geqslant 3A\left(\frac{c}{M_r}\right)^{1/d}-\varepsilon_n>2A\left(\frac{c}{M_r}\right)^{1/d}$$

car $\varepsilon_n=\varepsilon_{M_r}<A\left(\frac{c}{M_r}\right)^{1/d}$. Donc, (2.9) montre que l'ensemble des entiers n tels qu'il existe un entier $r>r_x$ vérifiant $M_r^-<n\leqslant M_r$ et $\|x-u_n\|_d<\varepsilon_n$ est inclus dans X_2.

Par suite, pour μ_d-presque tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$

$$\nu^*(x,M_R)-\nu^*(x,M_{r_x})\leqslant\sum_{q\in\{0,1,2\}^d}\sum_{j=1}^{\omega_2}\nu_{Y_j^q}(x,M_R).$$

On en déduit par des calculs analogues aux précédents que pour μ_d-presque tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$

$$\limsup_{R\to+\infty}\Big(\nu^*(x,M_R)\Big\{\sum_{r=1}^{R}(M_r-M_r^-)(2\varepsilon_{M_r})^d\Big\}^{-1}\Big)\leqslant(1+a)^2.$$

Cette formule combinée avec (2.13) donne le lemme.

II.3. Fin de la démonstration du théorème 1. Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum\varepsilon_n^d$ diverge et telle que pour tout entier $s\geqslant 0$ l'on ait:

$$\varepsilon_n=\varepsilon_{N_{s+1}}\quad\text{ si }\quad N_s<n\leqslant N_{s+1}. \tag{2.14}$$

Les lemmes 3 et 7 permettent de montrer que pour tout $A\geqslant 1$ et $a>0$ et pour μ_d-presque tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:

$$\limsup_{S\to+\infty}\left|\nu(x,N_S)\Big(\sum_{n=1}^{N_S}(2\varepsilon_n)^d\Big)^{-1}-1\right|\leqslant\sup\Big\{2a+a^2,\ a+\frac{(1+a)2^d}{A}\Big\}.$$

En faisant tendre A vers l'infini et a vers 0 suivant des suites, on en déduit que pour μ_d-presque tout x:

$$\lim_{S\to+\infty}\Big\{\nu(x,N_S)\Big(\sum_{n=1}^{N_S}(2\varepsilon_n)^d\Big)^{-1}\Big\}=1. \tag{2.15}$$

Ceci montre *la forte-eutaxie de u relativement aux suites* (ε_n) *vérifiant* (2.14).

Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum\varepsilon_n^d$ diverge.

LEMME 8.

$$\lim_{S\to+\infty}\left\{\frac{\sum_{s=1}^{S+1}(N_s-N_{s-1})\varepsilon_{N_{s-1}}^d}{\sum_{s=1}^{S}(N_s-N_{s-1})\varepsilon_{N_s}^d}\right\}=\delta.$$

Preuve. Si (a_s) et (b_s) sont deux suites de nombres réels positifs telles que la série $\sum a_s$ diverge et que $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_s/b_s)=\delta$, alors $\sum b_s$ diverge et

$$\lim_{S\to+\infty}\left(\frac{\sum_{s=1}^{S}a_s}{\sum_{s=1}^{S}b_s}\right)=\delta.$$

Il en résulte le lemme $(a_s=(N_{s+1}-N_s)\varepsilon_{N_s}^d$ et $b_s=(N_s-N_{s-1})\varepsilon_{N_s}^d)$. ∎

Ce lemme et la formule (2.15) entraînent le théorème 1. En effet, soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum\varepsilon_n^d$ diverge. Soit $(\varepsilon_n^{(1)})$ (resp. $(\varepsilon_n^{(2)})$) la suite définie par:

$$\varepsilon_n^{(1)}=\varepsilon_{N_{s+1}}\quad\text{si}\quad N_s<n\leqslant N_{s+1}$$
$$(\text{resp. }\varepsilon_n^{(2)}=\varepsilon_{N_s}\quad\text{si}\quad N_s<n\leqslant N_{s+1}).$$

Pour tous $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$, $S\in\boldsymbol{N}$ et $i=1,2$, soit $\nu^{(i)}(x,N_S)$ le cardinal des entiers $n\leqslant N_S$ tels que $\|x-u_n\|_d<\varepsilon_n^{(i)}$. Pour tout entier M suffisamment grand soit s_M l'entier tel que $N_{s_M}<M\leqslant N_{s_M+1}$. On a pour tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:

$$\nu^{(1)}(x,N_{s_M})\leqslant\nu(x,M)\leqslant\nu^{(2)}(x,N_{s_M+1})$$

donc

$$\frac{\nu^{(1)}(x,N_{s_M})}{2^d\sum_{s=1}^{s_M+1}(N_s-N_{s-1})\varepsilon_{N_{s-1}}^d}\leqslant\frac{\nu(x,M)}{\sum_{n=1}^{M}(2\varepsilon_n)^d}\leqslant\frac{\nu^{(2)}(x,N_{s_M+1})}{2^d\sum_{s=1}^{s_M}(N_s-N_{s-1})\varepsilon_{N_s}^d}. \tag{2.16}$$

La formule (2.15) montre que l'on a pour $i=1,2$ et pour μ_d-presque tout $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:

$$\lim_{S\to+\infty}\Big\{\nu^{(i)}(x,N_S)\Big(2^d\sum_{n=1}^{N_S}(N_s-N_{s-1})\varepsilon_{N_{s+2-i}}^d\Big)^{-1}\Big\}=1.$$

Cette relation, le lemme 8 et (2.16) prouvent que pour tout $\delta>1$ et pour μ_d-presque tout x:

$$\frac{1}{\delta}\leqslant\liminf_{M\to+\infty}\left\{\frac{\nu(x,M)}{\sum_{n=1}^{M}(2\varepsilon_n)^d}\right\}\leqslant\limsup_{M\to+\infty}\left\{\frac{\nu(x,M)}{\sum_{n=1}^{M}(2\varepsilon_n)^d}\right\}\leqslant\delta.$$

Il en résulte le théorème 1 en faisant tendre δ vers 1 suivant une suite.

Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série $\sum\varepsilon_n^d$ diverge et telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\varepsilon_n^d)=+\infty$. Pour une telle suite (ε_n), pour tous nombres réels $A>0$ et $\delta\geqslant1$, il n'existe qu'un nombre fini d'entiers s tels que:

$$A_s=\left[\left(\frac{N_{s+1}}{c}\right)^{1/d}\varepsilon_{N_{s+1}}\right]\leqslant A.$$

Le lemme 3 suffit alors pour étudier la forte-eutaxie relativement à (ε_n) et des raisonnements analogues aux précédents permettent d'en déduire le

COROLLAIRE 1. *Soit u une suite d'éléments de* $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ *telle que* $\theta(u)=0$. *Soit* (ε_n) *une suite décroissante de nombres réels positifs telle que la série* $\sum\varepsilon_n^d$ *diverge. Alors, si* $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\varepsilon_n^d)=+\infty$, *on a* $x\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ *et uniformément par rapport à* x:

$$\lim_{N\to+\infty}\Big\{\nu(x,N)\Big(\sum_{n=1}^{N}(2\varepsilon_n)^d\Big)^{-1}\Big\}=1.$$

III. Forte-eutaxie des suites $(n\alpha)$. Le théorème 1 permet de retrouver la caractérisation des éléments α de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ tels que la suite $(n\alpha)$ soit fortement-eutaxique ([8], [11]). Pour tout $\alpha\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ posons

$$M_d(\alpha)=\limsup\,(n^{1/d}\|n\alpha\|_d)^{-1}.$$

THÉORÈME 2. *Soit* $\alpha\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$. *La suite* $(n\alpha)$ *d'éléments de* $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ *est fortement-eutaxique si et seulement si le nombre* $M_d(\alpha)$ *est fini.*

En particulier, la suite $(n\alpha)$ n'est fortement-eutaxique que pour μ_d-presque aucun α.

Démonstration du théorème 2. La condition est nécessaire puisqu'il faut que $M_d(\alpha)$ soit fini pour que la suite $(n\alpha)$ soit eutaxique, a fortiori fortement eutaxique ([5], [10]). Le théorème 1 montre que la condition est suffisante. En effet, pour tout $\alpha\in(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ tel que $M_d(\alpha)$ soit fini, pour tout nombre réel $c\geqslant1$ et pour tout entier $N>0$, l'on a:

$$\theta_c\big((n\alpha);N\big)=O\big(c^{1-\frac{1}{d+1}}\big) \tag{3.1}$$

uniformément par rapport à N et c. Montrons cette formule.

LEMME 9 (W. Adams). *Soit $\alpha \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ tel que $M_d(\alpha)$ soit fini. Il existe une constante $a > 0$ (qui ne dépend que de α) telle que pour tout nombre réel $A \geqslant 1$ il existe un entier q vérifiant:*

$$Aa \leqslant q \leqslant A \quad \text{et} \quad \|q\alpha\|_d < \frac{1}{q^{1/d}}.$$

LEMME 10 (W. Adams). *Soit $\alpha \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ tel que $M_d(\alpha)$ soit fini. Il existe une constante $c_0 > 0$ (qui ne dépend que de α) telle que pour tout entier $N > 0$, pour tout entier $q > c_0$ tel que $\|q\alpha\| < 1/q^{1/d}$, pour tout hypercube K de mesure $\mu_d(K) \geqslant c_0/q$, on ait:*

$$D(K, N, N+q) = O\big((q\mu_d(K))^{1-1/d}\big)$$

uniformément par rapport à N, q et K.

Ces deux lemmes sont montrés par W. Adams dans [1] (propositions 1 et 3). En fait W. Adams ne montre le lemme 10 que pour des hypercubes dont un sommet est l'origine, mais la même méthode s'applique à n'importe quel hypercube.

Soit $c > c_0$ un nombre réel. Pour tout enteir $N > 0$ suffisamment grand on a $Nc^{-1/d+1} > c_0$ et $c/N \leqslant 1$. Pour un tel entier N, soit q l'entier donné par le lemme 9, c'est-à-dire que $\|q\alpha\|_d < 1/q^{1/d}$ et:

$$Nc^{-1/(d+1)}a \leqslant q \leqslant Nc^{-1/(d+1)}. \tag{3.2}$$

Posons $h = [N/q]$. On a, pour tout hypercube K de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:

$$\pi(K, hq) \leqslant \pi(K, N) \leqslant \pi\big(K, (h+1)q\big)$$

donc

$$D(K, N) \leqslant D\big(K, (h+1)q\big) + q\mu_d(K)$$

ou encore:

$$D(K, N) \leqslant \sum_{k=0}^{h} D\big(K, kq, (k+1)q\big) + q\mu_d(K).$$

D'après le lemme 10, on a pour tout $k = 0, 1, \ldots, h$

$$D\big(K, kq, (k+1)q\big) = O\big((q\mu_d(K))^{1-1/d}\big)$$

uniformément par rapport à k, q et K. On a donc, en supposant de plus que $\mu_d(K) = c/N$ (et en remarquant que $h \leqslant N/q$)

$$D(K, N) = O\big((h+1)(q\mu_d(K))^{1-1/d} + q\mu_d(K)\big) = O\left(\left(\frac{N}{q}\right)^{1/d} c^{1-1/d} + \frac{qc}{N}\right)$$

uniformément par rapport à q, N et c. On en déduit la formule (3.1) puisque (3.2) montre que

$$\frac{N}{q} \leqslant a^{-1}c^{1/(d+1)} \quad \text{et} \quad \frac{qc}{N} \leqslant c^{1-1/(d+1)}. \quad \blacksquare$$

La formule (3.1) permet aussi d'appliquer le corollaire 1 aux suites $(n\alpha)$:

COROLLAIRE 2. *Soit α un élément de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ tel que $M_d(\alpha)$ soit fini. Soit (ε_n) une suite décroissante de nombres réels positifs tels que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge. Si de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\varepsilon_n^d) = +\infty$, on a pour tout $x \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ et uniformément par rapport à x*

$$\lim_{N\to+\infty}\left\{\nu(x, N)\left(\sum_{n=1}^{N}(2\varepsilon_n)^d\right)^{-1}\right\} = 1.$$

Ce corollaire améliore un résultat de S. Lang ([4]) et de W. Adams ([1]) dans le cas des suites $(n\alpha)$ telles que $M_d(\alpha)$ soit fini (c'est-à-dire telles que α soit de type constant), puisque W. Adams et S. Lang supposent de plus que la suite $(n\varepsilon_n^d)$ est croissante. La même méthode permet d'améliorer de façon analogue ces résultats de W. Adams et S. Lang quel que soit le type de α ([12], [13]).

Bibliographie

[1] W. W. Adams, *Simultaneous asymptotic diophantine approximation*, Mathematika 14 (1967), p. 173–180.

[2] J. W. S. Cassels, *An introduction to diophantine approximation*, Cambridge University Press, N° 45 (1965).

[3] P. Erdös, *Some results on diophantine approximation*, Acta Arith. 5 (1959), p. 359–369.

[4] S. Lang, *Introduction to diophantine approximations*, Addison-Wesley Publ. Comp., 1966.

[5] J. Lesca, *Sur les approximations diophantiennes à une dimension*, Thèse Sc. Math., Grenoble (1968).

[6] W. J. Leveque, *On the frequency of small fractional parts in certain real sequences, III*, J. Reine Angew. Math. 102 (1959), p. 215–220.

[7] B. de Mathan, *Approximations diophantiennes dans un corps local*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 21 (1970).

[8] — *Un problème métrique d'approximation diophantienne*, Bull. Soc. Math. France 99 (1971), p. 369–385.

[9] W. Philipp, *Some metrical theorems in number theory*, Pacific J. Math. 20 (1967), p. 109–127.

[10] M. Reversat, *Approximations diophantiennes et eutaxie*, Acta Arith. 31 (1976), p. 37–54.

[11] — *Un résultat métrique d'approximations diophantiennes non homogènes*, Bull. Soc. Math. France 104 (1976), p. 129–144.

[12] — *Sur les approximations diophantiennes asymptotiques*, C.R.A.S. Paris, sér. A, 282 (1976), p. 1395–1397.

[13] — *Approximations diophantiennes asymptotiques*, Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux, année 1976–77, n°1.

[14] W. M. Schmidt, *Metrical theorems of fractionnal parts of sequences*, Trans. Amer. Soc. 110 (1964), p. 493–518.
[15] — *A theorem in diophantine approximations*, J. Number Theory 5 (1975), p. 245–251.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUE ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, France

Reçu le 2. 12. 1977 (1007)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Fonctions à caractéristique bornée et P.V. éléments

par

MARTHE GRANDET-HUGOT (Caen)

L'étude des nombres de Pisot est étroitement liée à celle de certaines familles de fractions rationnelles. Ces fractions rationnelles peuvent être considérées comme des fonctions à caractéristique bornée à l'intérieur du disque-unité. Un critère de rationalité établi par D. Cantor [5] a été utilisé par Amara [1] pour l'étude d'ensembles de nombres algébriques généralisant les nombres de Pisot.

Dans un précédent article [10], nous avons étendu certains de ces résultats à des ensembles de P. V. éléments sur un corps de nombres algébriques. Nous proposons ici, d'utiliser systématiquement la notion de fonction à caractéristique bornée pour établir certaines propriétés relatives à divers types de P. V. éléments.

La méthode utilisée a l'avantage d'être générale. Elle donnerait des résultats plus intéressants en ce qui concerne la répartition des suites $(\lambda\theta^n)_{n\in N}$, si l'on connaissait une condition suffisante pour qu'une fonction soit à caractéristique bornée et que cette condition s'exprime au moyen des coefficients de son développement en série entière a l'origine. En fait la seule condition connue de ce type concerne les fonctions de la classe H^2.

1. Fonctions a caractéristique bornée. Soit f une fonction complexe à variable complexe, holomorphe à l'origine et méromorphe à l'intérieur du disque-unité. A une telle fonction Nevanlinna associe les fonctions suivantes:

$$m(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta, \qquad N(r,f) = \int_0^{n} \frac{n(t)}{t}\,dt$$

où $n(t)$ désigne le nombre de pôles de f intérieurs au disque $\{z\in C;\ |z|\leqslant t\}$. On appelle *caractéristique* de f, la fonction:

$$T(r,f) = m(r,f)+N(r,f)$$

c'est une fonction croissante de r et si elle tend vers une limite finie lorsque r tend vers 1, on dit que f est à *caractéristique bornée* à l'intérieur du disque-