Or nous avons remarqué que $\theta_{q,p}$ est croissant avec qpu_1, ce qui permet de dire que $\theta_{q,p}$ est supérieur au zéro $\beta_{q,p}$ plus grand que $\sqrt{p/q}$ du polynôme

$$q^2z^4-(q^2+p^2+1)z^2+p^2=\left(qz^2-\left(\sqrt{(q-p)^2+1}\right)z-p\right)\left(qz^2+\left(\sqrt{(q-p)^2+1}\right)z-p\right)$$

et par suite $\beta_{q,p}$ est zéro du polynôme

$$qz^2-\left(\sqrt{(q-p)^2+1}\right)z-p,$$

$\beta_{q,p}$ est une fonction croissante en p, on déduit $\beta_{q,p}>\beta_q$ zéro plus grand que 1 du polynôme

$$qz^2-\left(\sqrt{(q-1)^2+1}\right)z-1$$

et le résultat $\prod_{|\theta_i|>1}|\theta_i|\geqslant\beta_q$ est établi.

Bibliographie

[1] Mohamed Amara, *Ensembles fermés de nombre algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 3e série, 83 (1966), p. 215–270.

[2] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Sur un ensemble d'entiers algébriques*, ibid. 70 (1953), p. 105–133.

[3] C. J. Smyth, *On the product of conjugatès outside the unit circle of an algebraic integers*, Bull. London Math. Soc. 3 (1972), p. 169–175.

Reçu le 14. 11. 1977
et dans la forme modifiée le 17. 3. 1978 (1001)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Échanges d'intervalles et transformations induites

par

Gérard Rauzy (Marseille)

0. Introduction

01. Soit s un entier supérieur ou égal à 2, σ une permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,s\}$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ un élément de R^s à coordonnées strictement positives. Désignons par $X_1,\ldots,X_s$ la partition de l'intervalle $X=[0,|\lambda|[$ où $|\lambda|=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i$ en les intervalles

$$X_i=\Big[\sum_{j<i}\lambda_j,\ \sum_{j\leqslant i}\lambda_j\Big[$$

(X_i est donc de longueur λ_i).

L'échange d'intervalle associé au couple (σ,λ) est la transformation T de X dans lui-même, définie comme l'isométrie par morceaux qui consiste à „découper X en les intervalles X_i, et à les replacer dans l'ordre $X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(s)}$".

De manière analytique, T est donc la transformation qui à un point x de l'intervalle X_i fait correspondre le point:

$$Tx=x+a_i \tag{01.1}$$

où

$$a_i=\sum_{k<\sigma^{-1}(i)}\lambda_{\sigma(k)}-\sum_{k<i}\lambda_k.$$

Le vecteur colonne $a=(a_i)_{i=1,\ldots,s}$ se déduit du vecteur colonne $\lambda=(\lambda_i)_{i=1,\ldots,s}$ par l'égalité matricielle:

$$a=M\lambda. \tag{01.2}$$

M est une matrice antisymétrique dépendant uniquement de la permutation σ et, si $M=(m_{ij})$, on a donc:

$m_{ii}=0$ pour $i=1,\ldots,s$,
$m_{ij}=-m_{ji}$ quelques soient i et j

et si $i < j$

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j), \\ 1 & \text{si} \quad \sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j). \end{cases}$$

La matrice M et la forme bilinéaire alternée qui lui est associée jouent un rôle important dans l'étude des propriétés de la transformation T ([3] et [5]).

On peut démontrer que son déterminant est égal soit à 0 soit à 1.

02. Les échanges d'intervalles ont été étudiés à divers points de vue (voir par exemple [4] pour une bibliographie) principalement en liaison avec une conjecture de M. Keane [2]:

Si la permutation σ est irréductible, c'est-à-dire, si aucun ensemble $\{1, \ldots, t\}$ avec $t < s$ n'est invariant par σ, alors, pour presque tout $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ $(\lambda_i \in R, \lambda_i > 0)$ au sens de la mesure de Lebesgue dans R^{+s}, l'échange associé à (σ, λ) est strictement ergodique (la mesure associée étant évidemment dans ce cas la mesure de Lebesgue sur l'intervalle X).

Dans cette voie, signalons tout d'abord une propriété de minimalité [1]: soient $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{s+1}$ les extrémités des intervalles X_i ($X_i = [a_i, a_{i+1}[$), et, disons qu'un échange est *régulier* si l'égalité:

$$T^k a_i = a_j, \quad i \text{ et } j \in \{2, \ldots, s\}, \ k \in \boldsymbol{Z}$$

implique

$$k = 0, \quad i = j.$$

Le résultat est alors le suivant:

Si un échange T est régulier, pour tout point x de X, l'orbite $\bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} \{T^k x\}$ de x par T est dense dans X.

Evidemment, l'ensemble Λ_s^σ des λ tels que l'échange associé à (σ, λ) soit régulier forme un ensemble „gros" au point de vue théorie de la mesure (son complémentaire dans R^{+s} est de mesure nulle) et au point de vue topologique (intersection dénombrable d'ouverts partout dense dans R^{+s}).

03. Une approche très fructueuse de la conjecture de Keane [2] et [5] semble être l'étude des transformations induites par un échange d'intervalle défini sur X sur un sous intervalle Y de X.

Dans le cas où l'intervalle Y est le premier intervalle X_1 intervenant dans la définition de l'échange, cette transformation induite a un intérêt par elle-même en tant que généralisation de la notion de développement en fraction continue [3].

Le but essentiel de cet article est d'étudier formellement cette transformation induite, dans le cas particulier où la permutation σ est définie par:

$$\forall k \in \{1, \ldots, s\} \quad \sigma(k) = s - k + 1$$

et pour d'autres permutations appartenant à la même classe que σ en un certain sens (dans le cas $s = 4$, cette classe est formée de toutes les permutations telles que la matrice antisymétrique associée est effectivement de rang 4).

Nous montrerons notamment:

THÉORÈME A. *σ ayant la signification précédente, soit T l'échange associé au couple (σ, λ) où $\lambda \in \Lambda_s^\sigma$. Alors, la transformation induite par T sur $X_1 = [0, \lambda_1[$ est encore un échange d'intervalle associé à un couple (σ, μ) (σ même permutation, $\mu \in \Lambda_s^\sigma$ avec $|\mu| = \lambda_1$).*

Désignons alors par Φ l'application de Λ_s^σ dans lui-même qui à λ associe $\Phi(\lambda) = \mu$. Soit, d'autre part, E l'ensemble des éléments λ de Λ_s^σ tels que: $\lambda_1 < \lambda_s$. Nous montrerons alors que:

THÉORÈME B. *Quelque soit $\lambda \in E$, il existe un entier n supérieur ou égal à 1 tel que:*

$$\Phi^n(\lambda) \in E.$$

Dans le cas particulier où $s = 3$, Veech a montré ([5]) que la transformation induite par Φ sur E, qui est donc partout définie en vertu du théorème précédent est telle qu'il existe une mesure finie sur E équivalente à la mesure de Lebesgue et invariante par cette transformation induite. Ce résultat permet de retrouver le résultat de Keane sur la stricte ergodicité dans ce cas ([1]).

1. Intervalles admissibles et transformations induites

11. Points de séparation. Soit σ une permutation irréductible, λ un élément de Λ_s^σ, et soit T l'échange associé au couple (σ, λ). On appellera *ensemble des points de séparation de (σ, s) et par abus de langage de T et on notera* Sép (T) *l'ensemble*: $\{a_1, \ldots, a_s\}$ où

$$a_1 = 0, \ a_2 = \lambda_1, \ldots, \ a_s = \lambda_1 + \ldots + \lambda_{s-1}.$$

Remarque. Il s'agit évidemment d'un abus de langage, une même transformation T pouvant être définie par des couples (σ, λ) différents (s pouvant varier). Il faut remarquer également que l'ensemble des points de séparation contient l'ensemble des points de discontinuité de la transformation T mais ne lui est pas nécessairement égal.

12. Intervalles admissibles. Nous ne considérons ici que des intervalles dont l'extrêmité gauche est 0. Soit donc T l'échange associé au couple (σ, λ) où $\sigma \in \mathfrak{S}_s^0$ (ensemble des permutations irréductibles) et $\lambda \in \Lambda_s^\sigma$.

Un intervalle $[0, u[$ où $0 < u < |\lambda|$ sera dit *admissible* [5] si il existe k élément de $\boldsymbol{Z}$ et i élément de $\{1, \ldots, s\}$ tels que:

(i) $T^k a_i = u$;

(ii) Si $k > 0$, pour tout h tel que $0 < h < k$ $\quad T^h a_i \notin [0, u[$,
si $k \leqslant 0$, pour tout h tel que $k < h \leqslant 0$ $\quad T^h a_i \notin [0, u[$.

Exemple. Les intervalles $[0, a_2[$ ou $[0, \max(a_s, Ta_{\sigma(s)})[$ sont des intervalles admissibles.

13. Points de division. Soit T définie comme précédemment, $I = [0, u[$ un intervalle admissible. Soit $x \in X = [0, \lambda[$. Par suite du résultat sur la minimalité de T cité dans l'introduction les quantités suivantes sont parfaitement définies:

$$\varphi_+(x) = \inf\{n > 0, T^n x \in I\} \quad \text{et} \quad \varphi_-(x) = \inf\{n \geqslant 0, T^{-n} x \in I\}.$$

On appellera *ensemble des points de divisions de I pour T* (avec le même abus de langage que dans le paragraphe 11) et on notera $\mathrm{Div}(I, T)$ l'ensemble des points:

$$T^k a \quad \text{où} \quad a \in \mathrm{Sép}(T) \text{ et } -\varphi_-(a) \leqslant k < \varphi_+(a).$$

Remarque. Le point u lui-même appartient à $\mathrm{Div}(I, T)$.

14. Théorème ([3] et [5]). *Soient donnés comme précédemment $s \geqslant 2$, $\sigma \in \mathfrak{S}_s^0$ et $\lambda \in \Lambda_s^\sigma$. Soit T l'échange associé à (σ, λ) et $I = [0, u[$ un intervalle admissible pour T. Alors la transformation induite S par T sur I est définie partout. Il existe une permutation τ de $\mathfrak{S}_s^0$ et un élément μ de Λ_s^τ tels que S est l'échange associé à (τ, μ).*

De manière plus précise on peut dire que:

(i) $\mathrm{Sép}(S) = I \cap \mathrm{Div}(I, T) = \{T^{-\varphi_-(a)}, a \in \mathrm{Sép}(T)\}$.

(ii) Soient $i, j \in \{1, \ldots, s\}$, soit β_j le j-ème point de $\mathrm{Sép}(S)$ (ordonné par ordre croissant) et soit donc k tel que:

$$\beta_j = T^{-\varphi_-(a_k)}(a_k).$$

Soit par ailleurs a_{ij} l'entier défini par:

$$a_{ij} = \mathrm{card}\{n, -\varphi_-(a_k) \leqslant n < \varphi_+(a_k), T^n a_k \in [a_i, a_{i+1}[\}.$$

Alors on a les égalités:

$$|\mathrm{dét}(A)| = 1, \quad \lambda = A\mu, \quad M_\tau = {}^t A M_\sigma A \quad \text{où} \quad A = (a_{ij})$$

(M_τ et M_σ étant les matrices antisymétriques associées comme dans l'introduction aux permutations τ et σ, et ${}^t A$ étant la transposée de A).

(iii) Réciproquement, A étant la matrice définie dans (ii), si η est un élément quelconque de Λ_s^τ, et si $\xi = A\eta$ alors, $\xi \in \Lambda_s^\sigma$, l'intervalle $[0, |\eta|[$ est admissible pour l'échange associé à (σ, ξ), la transformation induite sur cet intervalle étant l'échange associé à (τ, η) et la matrice associée étant la matrice A.

2. La transformation Ψ. Dans tout ce paragraphe, nous nous donnons un échange T associé au couple (σ, λ) où $\sigma \in \mathfrak{S}_s^0$, $\lambda \in \Lambda_s^\sigma$. Nous notons $\{a_1, \ldots, a_s\}$ avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_s$ l'ensemble $\mathrm{Sép}(T)$ et désignons par $Z(T)$ l'intervalle admissible:

$$Z(T) = [0, \max(a_s, Ta_{\sigma(s)})[.$$

Nous nous proposons d'étudier la transformation $\Psi(T)$ induite par T sur $Z(T)$.

21. Lemme. *Si J est un intervalle admissible pour T, alors $J \subset Z(T)$.*

Soit en effet $J = [0, u[$ où $u = T^k a_i$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $i \in \{1, \ldots, s\}$. Si $u > \max(a_s, Ta_{\sigma(s)})$, on ne peut avoir $k > 0$ car:

$$\text{pour tout } i \in \{1, \ldots, s\} \quad Ta_i \leqslant Ta_{\sigma(s)} < u.$$

De même on ne peut avoir $k \leqslant 0$ car:

$$\text{pour tout } i \in \{1, \ldots, s\} \quad a_i = T^0 a_i < u.$$

22. Lemme. *Soit J un intervalle admissible pour T et soit S la transformation induite sur J par T. Alors un intervalle I strictement contenu dans J est admissible pour T si et seulement si il l'est S. Si I est admissible pour T, on a, en outre, $\mathrm{Div}(J, T) \subset \mathrm{Div}(I, T)$.*

Soit en effet $I = [0, u[$ et $J = [0, v[$.

Supposons I admissible pour T; il existe donc $k \in \boldsymbol{Z}$ et $i \in \{1, \ldots, s\}$ tels que $u = T^k a_i$ et tels que la condition (ii) de la définition du paragraphe 12 soit réalisée.

Supposons par exemple $k > 0$. Si β est l'élément de $\mathrm{Sép}(S)$ correspondant à a_i, β est de la forme $T^m a_i$ $(m \leqslant 0)$ et donc $u = T^{k-m}\beta$.

Comme u appartient à $[0, v[$, il en résulte qu'il exite $n > 0$ tel que $u = S^n \beta$.

Si, maintenant, il existait l tel que $0 < l < n$ et $S^n\beta \in [0, u[$, il existerait h tel que $0 < h \leqslant k-m$ et $T^h\beta \in [0, u[$, or, ceci est impossible

$$\text{car pour } 0 < h \leqslant -m \quad T^h\beta = T^{m+h} a_i \notin [0, v[,$$

$$\text{et pour } -m < h < k-m \quad T^h\beta = T^{m+h} a_i \notin [0, u[$$

vertu de la condition (ii).

en Démonstration analogue si $k \leqslant 0$.

Réciproquement, si I est admissible pour S, il existe donc $k \in \boldsymbol{Z}$ et $\beta \in \mathrm{Sép}(S)$ tels que $u = S^k \beta$ et que la condition (ii) soit réalisée.

Mais β est de la forme $T^m \alpha$ avec $\alpha \in \mathrm{Sép}(T)$ et comme $u \in [0, v[$ il existe n tel que $u = T^n \alpha$.

Supposons par exemple $n > 0$, et supposons qu'il existe l tel que $0 < l < n$ et $T^l \alpha \in [0, u[$. Alors comme $[0, u[\subset [0, v[$, $T^l \alpha$ est de la forme $S^h \beta$ avec $0 < h < k$ ce qui contredit la condition (ii).

Démonstration analogue si $n \leqslant 0$.

Il reste à montrer que dans le cas où I est admissible pour T (donc pour S) on a $\mathrm{Div}(J, T) \subset \mathrm{Div}(I, T)$; ceci résulte du fait que pour tout $\alpha \in \mathrm{Sép}(T)$ on a:

$$\inf\{n \geqslant 0,\ T^{-n}\alpha \in I\} \geqslant \inf\{n \geqslant 0,\ T^{-n}\alpha \in J\}$$

et

$$\inf\{n > 0,\ T^{n}\alpha \in I\} \geqslant \inf\{n > 0,\ T^{n}\alpha \in J\}.$$

23. THÉORÈME. *Un intervalle J est admissible pour T si et seulement s'il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $J = Z(\Psi^n(T))$. Dans ce cas, la transformation induite sur J par T est donc la transformation $\Psi^{n+1}(T)$, et la matrice associée comme dans le paragraphe* 14 (ii) *est le produit des différentes matrices associées au passage de T à $\Psi(T)$, de $\Psi(T)$ à $\Psi^2(T)$, etc...*

Evidemment, quelque soit $n \geqslant 0$, $Z(\Psi^n(T))$ est admissible pour T en vertu du lemme 22 (démonstration par récurrence).

Supposons que $Z(\Psi^n(T)) = [0, u_n[$ et soit $J = [0, u[$ un intervalle admissible pour T. D'après le lemme 1, $[0, u[\subset [0, u_0[$.

Par ailleurs, la suite u_n est strictement décroissante, et en vertu du lemme 22 pour tout n tel que: $[0, u[\subset [0, u_n[$

$$\mathrm{Div}([0, u_n[, T) \subset \mathrm{Div}([0, u[, T).$$

En particulier en vertu de la remarque faite dans le paragraphe 13:

$$u_n \in \mathrm{Div}([0, u[, T).$$

L'ensemble $\mathrm{Div}([0, u[, T)$ étant fini, il en résulte qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que:

$$u_{n+1} < u \leqslant u_n.$$

On ne peut avoir $u < u_n$, car, en vertu du lemme 22, $[0, u[$ serait alors admissible pour $\Psi^{n+1}(T)$ et donc en vertu du lemme 21 on devrait avoir:

$$[0, u[\subset Z(\Psi^{n+1}(T)) = [0, u_{n+1}[.$$

On en déduit bien $u = u_n$, et la transformation induite sur $[0, u[$ est bien la transformation $\Psi^{n+1}(T)$.

Si A est la matrice associée à cette transformation induite comme dans le paragraphe 14 (ii) et si $A_1, \ldots, A_n$ sont les matrices associées successivement au passage de T à $\Psi(T)$, $\Psi(T)$ à $\Psi^2(T)$ etc., on a en désignant par (σ, λ) le couple définissant T et par (τ, μ) celui définissant $\Psi^{n+1}(T)$

$$\lambda = A\mu = A_1 \times \ldots \times A_n \mu.$$

Il existe alors un voisinage ouvert de λ dans A_s^σ tel que pour tout λ' dans cet ouvert et tout échange T' associé au couple (σ, λ') la disposition des points de division de $Z(\Psi^n(T'))$ pour T' soit la même que la disposition correspondante de $Z(\Psi^n(T))$ pour T: les matrices $A', A_1', \ldots, A_n'$ sont donc les mêmes que $A, A_1, \ldots, A_n$. (En d'autres termes, ce sont des fonctions localement constantes de λ') on en déduit donc pour tout λ' dans ce voisinage:

$$A^{-1}\lambda' = (A_1 \times \ldots \times A_n)^{-1}\lambda'$$

d'où

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n.$$

3. Classes de permutations

31. Les transformations a et b. Si $s > 1$ et $k \in \{1, \ldots, s-1\}$, nous désignerons par π_k la permutation de $\{1, \ldots, s\}$ définie par:

$$\begin{aligned} \pi_k(i) &= i && \text{si } i \leqslant k, \\ \pi_k(i) &= i+1 && \text{si } k+1 \leqslant i < s, \\ \pi_k(s) &= k+1. \end{aligned}$$

Soit alors σ un élément de $\mathfrak{S}_s^0$, λ un élément de A_s^σ, T l'échange associé au couple (σ, λ). Soit de même (τ, μ) le couple associé à l'échange induit $\Psi(T)$ et C la matrice de passage associée comme dans le paragraphe 14 (ii).

Une étude directe et aisée permet alors de voir qu'il y a deux cas possibles:

(i) Si $\lambda_s < \lambda_{\sigma(s)}$, $k = \sigma(s)$ alors $\tau = \pi_k \circ \sigma$ et $C = A_\sigma = (a_{ij}^\sigma)$ où

$$\begin{array}{lll} \text{pour } i < k & a_{ij} = 1 \text{ si } j = i, & a_{ij} = 0 \text{ sinon}, \\ \text{pour } i = k & a_{kj} = 1 \text{ si } j \in \{k, k+1\}, & a_{ij} = 0 \text{ sinon}, \\ \text{pour } k < i < s & a_{ij} = 1 \text{ si } j = i+1, & a_{ij} = 0 \text{ sinon}, \\ \text{pour } i = s & a_{sj} = 1 \text{ si } j = k+1, & a_{sj} = 0 \text{ sinon}. \end{array}$$

(ii) Si $\lambda_s > \lambda_{\sigma(s)}$, $k = \sigma^{-1}(s)$ alors $\tau = \sigma \circ \pi_k^{-1}$ et $C = B_\sigma = (b_{ij}^\sigma)$ où

$$\begin{array}{lll} \text{pour } i < s & a_{ij} = 1 \text{ si } j = 1, & a_{ij} = 0 \text{ sinon}, \\ \text{pour } i = s & a_{sj} = 1 \text{ si } j \in \{\sigma(s), s\}, & a_{ij} = 0 \text{ sinon}. \end{array}$$

Remarquons que σ étant irréductible, $\sigma(s)$ est différent de s. En outre, si $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_s$ sont les éléments de $\mathrm{Sép}(T)$, on a:

$$Ta_{\sigma(s)} = |\lambda| - \lambda_{\sigma(s)} \quad \text{et} \quad a_s = |\lambda| - \lambda_s$$

donc l'hypothèse $\lambda \in \Lambda_s^\sigma$ entraîne que $\lambda_s \neq \lambda_{\sigma(s)}$.

DÉFINITION. Nous désignerons par a et b les applications de $\mathfrak{S}_s^0$ dans $\mathfrak{S}_s^0$ qui à σ font respectivement correspondre

$$a(\sigma) = \pi_k \circ \sigma \text{ avec } k = \sigma(s), \qquad b(\sigma) = \sigma \circ \pi_k^{-1} \text{ avec } k = \sigma^{-1}(s).$$

Il est aisé de vérifier que les transformations a et b sont bijectives.

32. Chaines. Soit n un entier supérieur ou égal à un, et soit $(c_1, \ldots, c_n)$ une suite d'éléments de l'ensemble $\{a, b\}$.

Une suite $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ d'éléments de $\mathfrak{S}_s^0$ sera dite une *chaîne associée à la suite* $(c_1, \ldots, c_n)$ si:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \sigma_i = c_i(\sigma_{i-1}).$$

De la même manière une suite $(T_0, \ldots, T_n)$ d'échanges associés aux couples $(\sigma_0, \lambda^0), \ldots, (\sigma_n, \lambda^n)$ où $\lambda^i \in \Lambda_s^{\sigma_i}$, sera dite *une chaîne associée à la suite* $(c_1, \ldots, c_n)$ si

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \sigma_i = c_i(\sigma_{i-1}),\ T_i = \Psi(T_{i-1}).$$

Remarquons que si une suite $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ d'éléments de $\mathfrak{S}_s^0$ est une chaine il existe toujours une chaine d'échanges $(T_0, \ldots, T_n)$ associés à des couples $(\sigma_0, \lambda^0), \ldots, (\sigma_n, \lambda^n)$. Il suffit, en effet, d'après le théorème 14 de choisir λ^n quelconque dans $\Lambda_s^{\sigma_n}$ et de définir $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ en remontant de manière à vérifier les relations:

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \begin{aligned} \lambda^i &= A_{\sigma_{i-1}} \lambda^{i-1} \quad \text{si} \quad c_i = a, \\ \lambda^i &= B_{\sigma_{i-1}} \lambda^{i-1} \quad \text{si} \quad c_i = b. \end{aligned}$$

33. Dualité. Si J est un intervalle admissible pour l'échange T, il est évidemment admissible pour la transformation T^{-1} et les transformations induites sont inverses l'une de l'autre.

En particulier, $Z(T^{-1}) = Z(T)$ et donc $\Psi(T) = \Psi(T^{-1})^{-1}$.

Supposons l'échange T associé au couple (σ, λ). L'échange T^{-1} est alors associé au couple $(\sigma^{-1}, \lambda_\sigma)$ où $\lambda_{\sigma,i} = \lambda_{\sigma(i)}$. Il en résulte que si T appartient au cas (i) du paragraphe 31, alors T^{-1} appartient au cas (ii) et vice versa.

Par récurrence, on en déduit que si $(T_0, \ldots, T_n)$ est une chaine d'échanges (où T_i est associé au couple (σ_i, λ^i)) associée à la suite $(c_1, \ldots, c_n)$, la suite d'échanges $(T'_0, \ldots, T'_n)$ où T'_i est associé au couple $(\sigma_i^{-1}, \lambda^i_{\sigma_i})$ est encore une chaine associée à la suite $(c'_1, \ldots, c'_n)$, c'_i étant égal à a si c_i est égal à b et vice versa.

L'utilisation de cette remarque sera référenciée dans la suite par l'indication „par dualité ...".

34. Relation d'équivalence. Sur l'ensemble $\mathfrak{S}_s^0$ la relation $\sigma \sim \tau$ s'il existe une chaine $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ telle que $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_n = \tau$ est une *relation d'équivalence.*

En effet, cette relation est manifestement transitive. Par ailleurs, si $\tau = a(\sigma) = \pi_k \circ \sigma$ où $k = \sigma(s)$, on a également $\tau(s) = \pi_k(k) = \sigma(s)$ et donc $a(\tau) = \pi_k \circ \tau$.

Comme π_k^{s-k} est l'identité, on en déduit d'une part que:

$$\sigma = a^{s-k}(\sigma) \quad \text{d'où } \sigma \sim \sigma \text{ puisque } s-k \geqslant 1,$$

et d'autre part que:

$$\sigma = a^{s-k-1}(\tau).$$

Par dualité, une identité analogue a lieu pour b, et en appliquant ce résultat à une chaine $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$, on en déduit $\sigma_n \sim \sigma_{n-1}, \sigma_{n-1} \sim \sigma_{n-2}, \ldots, \ldots, \sigma_1 \sim \sigma_0$. Utilisant la transitivité on en déduit que la relation $\sim$ est symétrique, ce qui achève la démonstration.

35. Classes d'équivalence. Dans chaque *classe d'équivalence* se trouve une permutation σ telle que $\sigma(1) = s$ et $\sigma(s) = 1$.

Soit en effet τ un élément de $\mathfrak{S}_s^0$. Soit d'autre part λ un élément de Λ_s^τ tel que $\lambda_1 > \frac{1}{2}|\lambda|$. L'échange T associé au couple (τ, λ) induit sur l'intervalle admissible $[0, \lambda_1[$ un échange associé à un couple (σ, μ) et manifestement:

$$\sigma(s) = 1.$$

D'après le théorème 23, on a $\tau \sim \sigma$. Par ailleurs, $a^n(\sigma) = \pi_1^n \circ \sigma$ d'après le paragraphe 34, et il existe donc un entier n tel que $\pi_1^n(\sigma(1)) = s$. Si $\sigma' = a^n(\sigma)$ on a bien $\sigma'(1) = s$, $\sigma'(s) = 1$, $\sigma' \sim \sigma \sim \tau$.

EXEMPLE. Dans le cas $s = 4$, il y a 15 permutations irréductibles qui se répartissent donc en deux classes, la classe de $(4, 2, 3, 1)$ qui contient 8 permutations dont la matrice associée est de rang 2, et la classe de $(4, 3, 2, 1)$ qui contient les 7 permutations dont la matrice associée est de rang 4.

4. Structure de la classe de la permutation $(s, \ldots, 1)$

41. Notations. On désignera par $\sigma^{(s)}$ la permutation $(s, \ldots, 1)$ c'est-à-dire telle que:

$$\sigma^{(s)}(k) = s-k+1.$$

Soit par ailleurs $\sigma \in \mathfrak{S}_s^0$ et $c \in \{a, b\}$. On désignera par $\Gamma^c(\sigma)$ l'ensemble des permutations τ telles qu'il existe une chaine $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ associée à la suite $(c_1, \ldots, c_n)$ et vérifiant:

$$c_1 = c, \quad \sigma_0 = \sigma, \sigma_n = \tau, \quad \text{et pour } i \in \{1, \ldots, n\}, \quad \sigma_i \neq \sigma.$$

La classe de σ est donc formée de la réunion (non nécessairement disjointe) des ensembles $\{\sigma\}$, $\Gamma^a(\sigma)$, $\Gamma^b(\sigma)$.

On désignera par $\mathscr{A}_k$ $(k = 1, \ldots, s-2)$ l'ensemble des permutations σ appartenant à $\mathfrak{S}_s^0$ telles que:

$$\text{pour } i \in \{1, \ldots, k\}, \quad \sigma(i) = k+2-i.$$

On définit alors une bijection χ_k de $\mathscr{A}_k$ dans $\mathfrak{S}_{s-k}^0$ en associant à l'élément σ de $\mathscr{A}_k$, l'élément τ de $\mathfrak{S}_{s-k}^0$ tel que:

$$\tau(j) = \begin{cases} \sigma(j+k) & \text{si} \quad \sigma(j+k) = 1, \\ \sigma(j+k)-k & \text{si} \quad \sigma(j+k) \neq 1. \end{cases}$$

De manière duale, on désignera par $\mathscr{B}_k$ $(k = 1, \ldots, s-2)$ l'ensemble des permutations σ de $\mathfrak{S}_s^0$ telles que: $\sigma^{-1} \in \mathscr{A}_k$ et par ξ_k la bijection de $\mathscr{B}_k$ dans $\mathfrak{S}_{s-k}^0$ définie par:

$$\xi_k(\sigma) = \chi_k(\sigma^{-1})^{-1}.$$

On voit immédiatement que si $\sigma \in \mathscr{A}_k$

$$\chi_k(b\sigma) = b\chi_k(\sigma)$$

et qu'en outre si $\sigma(s) \neq 1$

$$\chi_k(a\sigma) = a\chi_k(\sigma)$$

(relations analogues pour ξ_k par dualité).

Enfin on désignera pour $k = 1, \ldots, s-2$ par $\Gamma_{a,k}$ l'ensemble:

$$\Gamma_{a,k} = \{a^k(\sigma^{(s)})\} \cup \Gamma^b(a^k\sigma^{(s)})$$

et de même par:

$$\Gamma_{b,k} = \{b^k(\sigma^{(s)})\} \cup \Gamma^a(b^k\sigma^{(s)}).$$

On a alors le théorème de structure suivant:

42. Théorème. (i) *Les ensembles $\Gamma^a(\sigma^{(s)})$ et $\Gamma^b(\sigma^{(s)})$ sont disjoints et se correspondent par dualité. La classe de $\sigma^{(s)}$ est donc l'union $\{\sigma^{(s)}\} \cup \Gamma^a(\sigma^{(s)}) \cup \Gamma^b(\sigma^{(s)})$.*

(ii) *Les ensembles $\Gamma_{a,k}$ sont disjoints et:*

$$\Gamma^a(\sigma^{(s)}) = \bigcup_{k=1}^{s-2} \Gamma_{a,k}$$

(relations analogues pour les $\Gamma_{b,k}$).

(iii) *Pour tout $k \in \{1, \ldots, s-2\}$, $\Gamma_{a,k} \subset \mathscr{A}_k$ et*

$$\chi_k\big(\Gamma^b(a^k\sigma^{(s)})\big) = \Gamma^b(\sigma^{(s-k)}).$$

(iv) *La classe de $\sigma^{(s)}$ a pour cardinal $2^{s-1}-1$.*

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de démontrer (iii): en effet, les ensembles $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_{s-2}, \mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_{s-2}$ sont tous disjoints. D'autre part, par dualité (iii) implique que $\Gamma_{b,k}$ est contenu dans $\mathscr{B}_k$ $(k = 1, \ldots, s-2)$ ce qui démontre (i) et (ii).

Evidemment, (iv) s'obtient aisément à partir de (i), (ii), (iii) par récurrence.

Nous allons alors montrer par récurrence sur s le couple de proposition (iii) et (v) où (v) est la proposition:

(v) *Pour tout $k \in \{0, \ldots, s-2\}$, $\Gamma^b(a^k\sigma^{(s)})$ ne contient aucune permutation σ telle que $\sigma(s) = 1$.*

Remarquons tout d'abord que $\Gamma^b(\sigma^{(2)}) = \emptyset$ donc la proposition (v) est vraie à l'ordre 2. Supposons la vraie à l'ordre $s-1$ et montrons que dans ces conditions la proposition (iii) est vraie à l'ordre s.

Soit donc $k \in \{1, \ldots, s-2\}$ et soit $\sigma_0 = a^k(\sigma^{(s)})$, $\tau_0 = \sigma^{(s-k)}$.

Evidemment $\sigma_0 \in \mathscr{A}_k$. Par ailleurs $s-k \leqslant s-1$, donc $\Gamma^b(\tau_0)$ ne contient par hypothèse de récurrence aucun élément τ tel que $\tau(s-k) = 1$.

Soit maintenant σ un élément de $\Gamma^b(\sigma_0)$. Il existe donc une chaine $(\sigma_0, \ldots, \sigma_n)$ d'éléments de $\mathfrak{S}_s^0$ associée disons à la suite $(c_1, \ldots, c_n)$ telle que:

$$\sigma_n = \sigma, \quad \sigma_i \neq \sigma_0 \quad \text{si } i \in \{1, \ldots, n\}, \quad c_1 = b.$$

Soit alors $(\tau_0, \ldots, \tau_n)$ la chaine d'éléments de $\mathfrak{S}_{s-k}^0$ associée à la même suite $(c_1, \ldots, c_n)$.

Evidemment, $\chi_k(\sigma_0) = \tau_0$ donc $\chi_k(\sigma_1) = \tau_1$.

Comme $\tau_1 = \tau_0$ entrainerait $\sigma_1 = \sigma_0$, ce qui est contraire à l'hypothèse, on a certainement par définition de $\Gamma^b(\tau_0)$, $\tau_1 \in \Gamma^b(\tau_0)$.

On en déduit $\tau_1(s-k) \neq 1$ d'où $\sigma_1(s) \neq 1$. Il en résulte alors que $\chi_k(\sigma_2) = \tau_2$, et par récurrence que $\tau_1, \ldots, \tau_n$ appartiennent à $\Gamma^b(\tau_0)$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ appartiennent à $\mathscr{A}_k$ et que $\chi_k(\sigma) = \chi_k(\sigma_n) = \tau_n$.

On a donc l'inclusion: $\chi_k\big(\Gamma^b(\sigma_0)\big) \subset \Gamma^b(\tau_0)$. Un raisonnement analogue en sens inverse montre l'égalité de ces deux ensembles, ce qui achève la démonstration de (iii) à l'ordre s.

Il résulte également de cette démonstration que pour tout $k \in \{1, \ldots, s-2\}$ et tout σ appartenant à $\Gamma^b(a^k\sigma^{(s)})$ on a: $\sigma(s) \neq 1$, ce qui prouve (v) à l'ordre s pour $k \neq 0$.

Par ailleurs si $\sigma \in \Gamma^a(\sigma^{(s)})$, σ appartient à l'un des $\Gamma_{a,k}$ avec $k \in \{1, \ldots, s-2\}$ donc σ appartient à $\mathscr{A}_k$ et donc:

$$\sigma(1) = k+1 \neq s.$$

Par dualité, il en résulte alors que si $\sigma \in \Gamma^b(\sigma^{(s)})$ on a:

$$\sigma(s) \neq 1$$

ce qui achève la démonstration de (v) à l'ordre s.

5. Conséquence du théorème de structure

51. THÉORÈME A. *Soit σ un élément de l'ensemble $\{\sigma^{(s)}\}\cup\Gamma^b(\sigma^{(s)})$, λ un élément de Λ_s^σ, T l'échange associé au couple (σ,λ). Soit S l'échange induit par T sur l'intervalle $[0,\lambda_1[$ et soit (τ,μ) le couple qui lui est associé.*

Alors $\tau=\sigma^{(s)}$.

Démonstration. Posons pour $n\geqslant 0$ $T_n=\Psi^n(T)$ et supposons que T_n est associé au couple (σ_n,λ^n). *Soit d'autre part* $(c_n)_{n\geqslant 1}$ la suite d'éléments de $\{a,b\}$ définie par:

$$\sigma_n=c_n(\sigma_{n-1}),\qquad n\geqslant 1.$$

On sait d'après le théorème 23 qu'il existe un entier $m\geqslant 1$ tel que $T_m=S$. Cet entier est évidemment la borne inférieure des n tels que:

$$\operatorname{card}\{\text{Sép}(T_n)\cap[0,\lambda_1[\}=s$$

(car si $|\lambda^n|>\lambda_1$, λ_1 appartient toujours à Sép(T_n)).

Soient alors $a_1^n=0<a_2^n<\ldots<a_s^n$ les éléments de Sép(T_n). Il est aisé de voir que

$$\text{si}\quad c_{n+1}=b\qquad \text{Sép}(T_{n+1})=\text{Sép}(T_n)\qquad\text{et}$$

$$\text{si}\quad c_{n+1}=a\qquad \text{Sép}(T_{n+1})=\{a_1^n,\ldots,a_{s-1}^n,\alpha\}$$

où le nouvel élément α appartient à l'intervalle $]a^n_{\sigma_n(s)},a^n_{\sigma_n(s)+1}[$. Posons alors $p(n)=\operatorname{card}\{\text{Sép}(T_n)\cap[0,\lambda_1[\}$.

Soit ν la borne inférieure des $n\geqslant 1$ tels que:

$$\sigma_{n-1}=\sigma^{(s)},\qquad c_n=a.$$

Montrons par récurrence que si $k\in\{0,\ldots,\nu-1\}$ on a:

$$\sigma_k\in\{\sigma^{(s)}\}\cup\Gamma^b(\sigma^{(s)}),\qquad p(k)=1.$$

C'est vrai par hypothèse pour $k=0$. Si $k+1<\nu$ et si cette propriété est vraie pour k, on a soit $\sigma_k=\sigma^{(s)}$ d'où $c_{k+1}=b$ et donc $\sigma_{k+1}\in\Gamma^b(\sigma^{(s)})$ et Sép$(T_{k+1})=$ Sép(T_k) d'où $p(k+1)=p(k)=1$ soit $\sigma_k\in\Gamma^b(\sigma^{(s)})$ d'où $\sigma_{k+1}\in\{\sigma^{(s)}\}\cup\Gamma^b(\sigma^{(s)})$ et d'autre part, d'après le résultat (v) du paragraphe 42, on a dans ce cas:

$$\sigma_k(s)\neq 1$$

c'est-à-dire, que le seul point α de Sép(T_{k+1}) qui éventuellement n'appartient pas à Sép(T_k), appartient à un intervalle $]a^k_{\sigma_k(s)},a^k_{\sigma_k(s)+1}[$ qui est distinct de l'intervalle $[a_1^k,a_2^k[=[0,\lambda_1[$. On a donc encore dans ce cas:

$$p(k+1)=p(k)=1.$$

Par contre, comme $\sigma^{(s)}(1)=1$, on en déduit que $p(\nu)=2$.

Observons que, on a par ailleurs, $\sigma_\nu=a(\sigma^{(s)})\in\Gamma_{a,1}$ et que si π est une permutation de $\Gamma_{a,1}$ on a d'une part:

$$\forall c\in\{a,b\}\qquad c(\pi)\in\Gamma_{a,1}\ \text{sauf si}\ \pi=a(\sigma^{(s)})\ \text{et}\ c=a$$

et que, d'autre part:

$$\pi(s)\notin\{1,2\}\ \text{sauf si}\ \pi=a(\sigma^{(s)}).$$

Par un raisonnement analogue au précédent, il en résulte que si ν_2 désigne la borne inférieure des $n>\nu$ tels que:

$$\sigma_{n-1}=a(\sigma^{(s)}),\qquad c_n=a$$

on voit que pour $\nu\leqslant n<\nu_2$ on a:

$$\sigma_n\in\Gamma_{a,1}\qquad\text{et}\qquad p(n)=2$$

et que par contre:

$$\sigma_{\nu_2}=a^2(\sigma^{(s)})\qquad\text{et}\qquad p(\nu_2)=3.$$

Par récurrence et tenant compte que si π est une permutation de $\Gamma_{a,k}$ on a:

d'une part:

$$\forall c\in\{a,b\}\qquad c(\pi)\in\Gamma_{a,k}\ \text{sauf si}\ \pi=a^k(\sigma^{(s)})\ \text{et}\ c=a$$

d'autre part:

$$\pi(s)\notin\{1,2,\ldots,k+1\}\ \text{sauf si}\ \pi=a^k(\sigma^{(s)}).$$

On en déduit l'existence d'une suite: $0=\nu_0<\ldots<\nu_{s-1}$ telle que: pour $\nu_i\leqslant n<\nu_{i+1}$, $p(n)=i+1$, $\sigma_n\in\Gamma_{a,i}$, $\sigma_{\nu_i}=a^i(\sigma^{(s)})$ il en résulte bien que $m=\nu_{s-1}$ d'où $\sigma_m=a^{s-1}(\sigma^{(s)})=\sigma^{(s)}$.

52. THÉORÈME. *Soit σ un élément de la classe de $\sigma^{(s)}$, λ un élément de Λ_s^σ, T l'échange associé au couple (σ,λ). Soit plus généralement $T_n=\Psi^n(T)$, T_n étant associé au couple (σ_n,λ^n). Soit enfin E l'ensemble des $\lambda\in\Lambda_s^{\sigma(s)}$ tels que: $\lambda_1<\lambda_s$. Alors pour une infinité d'entiers n:*

$$\sigma_n=\sigma^{(s)},\qquad\lambda^n\in E$$

et également pour une infinité d'entiers n:

$$\sigma_n=\sigma^{(s)},\qquad\lambda^n\in\Lambda_s^\sigma-E.$$

Remarque 1. De ce théorème résulte immédiatement le théorème B de l'introduction.

Remarque 2. Il résulte également de ce théorème et de [5] que si la conjecture de Keane est vraie pour $\sigma^{(s)}$, elle l'est pour n'importe quel élément σ de la classe de $\sigma^{(s)}$ (et réciproquement). En particulier dans le cas où $s = 4$, il suffit d'étudier n'importe quel échange dont le rang de la matrice associée est 4.

Démonstration. Il suffit évidemment de montrer dans chacun des cas l'existence d'une entier n répondant à la question. En vertu du théorème 54, si $\sigma \in \{\sigma^{(s)}\} \cup \Gamma^b(\sigma^{(s)})$, il existe n ($n = \nu_1 - 1$ dans la démonstration précédente) tel que:

$$\sigma_n = \sigma^{(s)}, \quad \lambda^n \in E.$$

Par ailleurs si $\lambda \in E$, $\lambda_{\sigma(s)}$ comme défini dans le paragraphe 33 appartient à $\Lambda_s^{\sigma^{(s)}} - E$. Par dualité, il résulte donc du théorème 54 que si $\sigma \in \{\sigma^{(s)}\} \cup \cup \Gamma^a(\sigma^{(s)})$, il existe n tel que:

$$\sigma_n = \sigma^{(s)}, \quad \lambda^n \in \Lambda_s^{\sigma^{(s)}} - E.$$

Tenant compte du fait que $(T_n)_m = T_{n+m}$ on en déduit le résultat.

53. Remarque. Les résultats précédents permettent d'exprimer la forme générale des matrices A de passage d'un échange à l'échange induit sur un intervalle admissible, comme produit (dans un ordre déterminé) des matrices A_σ et B_σ.

D'autre part, dans le cas où $\sigma = \sigma^{(s)}$, ils permettent de définir une transformation θ de Λ_s^σ en lui-même, de la manière suivante:

$$\text{si } \lambda \in \Lambda_s^\sigma, \quad \theta(\lambda) = \lambda^n \text{ où } n = \inf\{k > 0,\, \sigma_k = \sigma\}.$$

La transformation Φ de l'introduction est alors définie de la manière suivante:

$$\text{si } \lambda \in \Lambda_s^\sigma, \quad \Phi(\lambda) = \theta^{n+1}(\lambda), \text{ où } n = \inf\{k \geqslant 0,\, \theta^k(\lambda) \in E\}.$$

On peut se demander s'il existe pour la transformation θ une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans le cas où $s = 3$ une telle mesure existe mais n'est pas positive, ni finie; sa densité p est donnée par l'expression:

$$p(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3}\right) \times \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \frac{1}{\lambda_3 + \lambda_2}.$$

Bibliographie

[1] M. Keane, *Interval exchange transformation*, Math. Zeitschr. 141 (1975), p. 77–102.
[2] — *Non ergodic interval exchange transformations*, Preprint.
[3] G. Rauzy, *Une généralisation du développement en fraction continue*, Séminaire de théorie des nombres–Année 1976–77–Paris.
[4] W. A. Veech, *Topological dynamics*, Bull. Amer. Math. Soc., Sept. 1977.
[5] — *Interval exchange transformations*, Preprint.

Reçu le 1. 12. 1977 (1006)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Sur les approximations diophantiennes simultanées asymptotiques

par

MARC REVERSAT (Talence)

Nous étudions les approximations diophantiennes simultanées par les éléments de certaines suites: nous donnons un critère de forte-eutaxie valable pour les suites de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ ($d \in \boldsymbol{N}^*$).

I. Introduction. Soit d un entier positif. Nous désignons par μ_d la mesure de Haar normalisée du groupe compact $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ et par $\|\cdot\|_d$ sa norme: si $(x_1, \ldots, x_d)$ est un d-uplet de nombres réels dont x désigne l'image canonique dans $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$, on a $\|x\|_d = \sup\limits_{i=1,\ldots,d} \|x_i\|$, où $\|\cdot\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche.

Le théorème métrique de Khintchine peut s'énoncer ainsi ([2], ch. 7): si (ε_n) est une suite décroissante de nombres réels positifs, si pour tout entier $N > 0$, $Z(\alpha, N)$ désigne le nombre de solutions en entiers n, $1 \leqslant n \leqslant N$, de l'inéquation

$$\|n\alpha\|_d < \varepsilon_n$$

alors, pour μ_d-presque tout α, $Z(\alpha, N)$ tend vers l'infini avec N (resp. reste borné) si la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge (resp. converge). P. Erdös ([3]), W. J. Leveque ([6]) et W. M. Schmidt ([14]) précisèrent ce résultat en montrant que si la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge, $Z(\alpha, N)$ est μ_d-presque partout équivalent à sa valeur probable, c'est-à-dire que l'on a pour μ_d-presque tout $\alpha \in (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$:

$$(1.1)\quad \lim_{N\to+\infty} \Big\{Z(\alpha, N)\Big(\int Z(\alpha, N)\, d\mu_d(\alpha)\Big)^{-1}\Big\} = \lim_{N\to+\infty} \Big\{Z(\alpha, N)\Big(\sum_{n=1}^{N} (2\varepsilon_n)^d\Big)^{-1}\Big\} = 1.$$

La généralisation suivante de ces problèmes fut étudiée par de nombreux auteurs: étant donnés une suite décroissante (ε_n) de nombres réels positifs telle que la série $\sum \varepsilon_n^d$ diverge, une suite (φ_n) de fonctions de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ dans lui-même et x un élément *fixé* de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$, quelle est la mesure de l'ensemble des éléments α de $(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z})^d$ tels que le nombre de solutions en