ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Sur le produit des conjugués, exterieurs au disque unité, de certains nombres algébriques

par

MOHAMED AMARA (Tunis)

Soit S_q (q entier $\geqslant 1$) l'ensemble des nombres algèbriques réels θ tel que $\theta > 1$ et $1/\theta$ est l'unique zéro situé dans $|z| \leqslant 1$, d'un polynôme $Q(z)$ à coefficients entiers rationnels tel que $Q(0) = q$ et de plus il existe un polynôme $A(z)$ à coefficients entiers rationnels vérifiant $A(1/\theta) \neq 0$, $|A(0)| \geqslant q$ et $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ pour tout $|z| = 1$.

L'ensemble S_q est fermé pour la Topologie de la droite réelle et les éléments de S_q', ensemble dérivé de S_q, sont caractérisés par le critère:

Pour qu'un nombre θ de l'ensemble S_q appartienne à l'ensemble dérivé S_q', il faut et il suffit qu'il existe $A(z)$ polynôme à coefficients entiers rationnels vérifiant $A(1/\theta) \neq 0$, $|A(0)| \geqslant q$, et tel que $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ sur $|z| = 1$, l'égalité ayant lieu en un nombre fini de points.

A partir de ce critère Dufresnoy et Pisot [2] ont prouvé que $\theta_1' = (1+\sqrt{5})/2$, zéro du polynôme $z^2 - z - 1$, est le plus petit élément de S_1' et l'auteur [1] a montré que θ_q' zéro plus grand que 1 du polynôme $qz^3 + (q-2)z^2 - qz - (q-1)$ est le plus petit élément de S_q'.

L'objet de cet article est de donner dans une certaine mesure une généralisation des deux derniers résultats, à savoir

THÉORÈME. *Soient θ_i, $1 \leqslant i \leqslant s$, des nombres algèbriques conjugués. Désignons par $Q(z) = q + \ldots + \varepsilon p z^s$, le polynôme minimal admettant les $1/\theta_i$ pour zéro ($q \geqslant 1$ et $\varepsilon = \pm 1$ étant choisi tel que $p \geqslant 1$). Supposons qu'il existe $A(z)$, polynôme à coefficients entiers entiers rationnels vérifiant $|A(0)| \geqslant q$ et tel que, sur $|z| = 1$, on ait $|A(z)| \leqslant |Q(z)|$ sur $|z| = 1$ l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.*

Désignons par h le degré du polynôme $A(z)$.

Nous avons alors les résultats suivants:

— pour $h \geqslant s+1$

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant 1 + 1/q;$$

— *pour* $h+1 \leqslant s$

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant \alpha_q,$$

α_q *zéro supérieur à* 1 *du polynôme* qz^2-qz-1;

— *pour* $h = s$

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant \beta_q$$

β_q *zero supérieur à* 1 *du polynôme* $qz^2-\sqrt{(q^2-2q+2)}\,z-1$ $(\beta_q < \theta_q' < \alpha_q < 1+1/q$ *et* $\alpha_1 = \beta_1 = \theta_1'$ *pour* $q = 1)$.

La démonstration du théorème requiet l'utilisation des deux lemmes suivants.

Lemme 1. *Soit* $C(z) = c_0+c_1z+\ldots+c_kz^k$ *un polynôme à coefficients entiers rationnels tel que* $|C(z)| \leqslant |Q(z)|$ *sur* $|z| = 1$. *Si* $c_0 \geqslant q+1$,

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant 1+1/q.$$

En effet posons:

$$\varphi(z) = \prod_{|\theta_i|>1} \frac{1-\theta_i z}{\bar{\theta}_i - z}\cdot\frac{\bar{\theta}_i}{|\theta_i|}.$$

La fonction $\dfrac{C(z)}{Q(z)}\cdot\varphi(z)$ est holomorphe dans $|z| \leqslant 1$ et elle a sur $|z| = 1$, un module au plus égal à 1. Du lemme de Schwarz, il résulte

$$q+1 \leqslant c_0 \leqslant q \prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i|.$$

Lemme 2. *Soient* δ *un nombre réel égal à* 0 *ou* 1 *et* u_1 *un nombre réel positif* ($\geqslant 2$ *dans le cas* $\delta = 1$). *Considérons la suite* $(u_n)_{n\in N^*}$ *définie par la relation de recurrence*

$$u_{n+1} = u_n^2 - 2\delta;$$

alors pour $\delta = 0$

$$\lim\,[u_n]^{1/2^n} = \sqrt{u_1}$$

et pour $\delta = 1$

$$\lim\,[u_n]^{1/2^n} = e^s,$$

où s *désigne le nombre réel positif défini par* $u_1 = 2\cosh 2s$.

Pour $\delta = 0$, on constate $u_n = u_1^{2^{n-1}}$ et le résultat suit.

Pour $\delta = 1$ on constate que les u_n forment une suite strictement croissante et en particulier $u_n \geqslant 2$ pour tout n. Formons la suite $(s_n)_{n\in N^*}$ de nombres réels positifs définis par $u_n = 2\cosh 2^n s_n$.

De la relation de recurrence vérifiée par les u_n, on déduit:

$$\cosh 2^n s_{n+1} = \cosh 2^n s_n.$$

Par conséquent la suite $(s_n)_{n\in N^*}$ est stationnaire et pour tout n, $s_n = s$, s étant tel que $u_1 = 2\cosh 2s$.

On a alors pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 2\cosh 2^n s$ et par suite:

$$\lim\,[u_n]^{1/2^n} = e^s.$$

Démonstration du théorème. Posons

$$P(z) = \varepsilon z^s Q(1/z) \quad \text{et} \quad B(z) = \varepsilon' z^h A(1/z),$$

$\varepsilon' = \pm 1$ étant choisi tel que $B(0) = b \geqslant 1$.

Le lemme 1, appliqué à $C(z)$ égal à l'un des polynômes $A(z)$, $B(z)$ ou $P(z)$ montre, qu'on peut prendre,

$$A(0) = q, \quad B(0) = b \leqslant q \quad \text{et} \quad P(0) = p \leqslant q$$

autrement $\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant 1+1/q$ et le théorème est établi.

(a) Etude du cas $h \geqslant s+1$. Considérons le polynôme $D(z)$ à coefficients entiers rationnels défini par:

$$D(z) = AB - \varepsilon\varepsilon' z^{h-s} PQ.$$

Le polynôme $D(z)$ vérifie sur $|z| = 1$

$$D(z) = \varepsilon' z^h [|A|^2 - |Q|^2].$$

Soit en particulier:

$$|D(z)| = |Q|^2 - |A|^2 \geqslant 0 \quad \text{sur} \quad |z| = 1.$$

Le polynôme $D(z)$ ne peut pas être identiquement nul, autrement on aurait $|A(z)| = |Q(z)|$ sur $|z| = 1$, ce qui est contraire aux hypothèses du théorème. Définissons maintenant le polynôme $A_1(z)$ à coefficients entiers rationnels par:

$$A_1(z) = A^2(z) + D(z) = A^2 + AB - \varepsilon\varepsilon' z^{h-s} PQ$$

et posons

$$B_1 = z^{2h} A_1(1/z) = B^2(z) + D(z), \qquad D_1 = A_1 B_1 - z^{2(h-s)} (PQ)^2.$$

Les polynômes $A_1(z)$ et $B_1(z)$, de degré $2h$, vérifiant

$$A_1(0) = q^2 + pq, \quad B_1(0) = b^2 + pq$$

et satisfassent sur $|z| = 1$ aux inégalités:

$$|A_1(z)| = |B_1(z)| \leqslant |A|^2 + |D| = |Q|^2$$

et comme $D_1(0) \geqslant 1$, l'égalité $|A_1| = |Q|^2$ ne peut avoir lieu qu'en un nombre fini de points de $|z| = 1$.

Le procédé, qui a permis de déterminer $A_1(z)$ et par suite $B_1(z)$ et $D_1(z)$, va être réitéré et fournira une suite $[A_n(z)]_{n\in N^*}$ telle que si on pose $B_n(z) = z^{2^n h} A_n(1/z)$, on ait:

$$A_{n+1} = A_n^2 + A_n B_n - z^{2^n(h-s)}(PQ)^{2^n}, \quad B_{n+1} = B_n^2 + A_n B_n - z^{2^n(h-s)}(PQ)^{2^n},$$

$$|A_{n+1}| = |B_{n+1}| \leqslant |Q|^{2^{n+1}} \quad \text{sur} \quad |z| = 1,$$

l'égalité n'ayant lieu qu'en un nombre fini de points.

En effet supposons qu'on ait déterminé, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et par conséquent $B_1, B_2, \ldots, B_n$, vérifiant les relations de recurrence.

On définit alors A_{n+1} par la relation:

$$A_{n+1} = A_n^2 + A_n B_n - z^{2^n(h-s)}(PQ)^{2^n}.$$

On constante alors que le degré de A_{n+1} est égal $2\deg A_n = 2^{n+1}h$ et que sur $|z| = 1$

$$|A_{n+1}| \leqslant |A_n|^2 + |A_n B_n - z^{2^n(h-s)}(PQ)^{2^n}|,$$

$$|A_{n+1}| \leqslant |A_n|^2 + |Q|^{2^{n+1}} - |A_n|^2 = |Q|^{2^{n+1}}$$

et le polynôme $B_{n+1} = z^{2^{n+1}h} A_{n+1}(1/z)$ vérifie

$$B_{n+1} = B_n^2 + A_n B_n - z^{2^n(h-s)}(PQ)^{2^n},$$

$$|B_{n+1}| = |A_{n+1}| \leqslant |Q|^{2^{n+1}} \quad \text{sur} \quad |z| = 1.$$

Si on forme le polynôme $D_{n+1} = A_{n+1}B_{n+1} - z^{2^{n+1}(h-s)}(PQ)^{2^{n+1}}$. On établit la relation

$$D_{n+1} = D_n(A_n + B_n)^2.$$

Comme $A_n(0)$ et $B_n(0)$ sont strictement positifs et que D_n n'est pas identiquement nul, il résulte que D_{n+1} ne peut pas être identiquement nul et par suite l'égalité $|A_{n+1}| = |Q|^{2^{n+1}}$ sur $|z| = 1$ n'a lieu qu'en un nombre fini de points, et les relations de recurrence vérifiées par les suites $(A_n)_{n\in N^*}$ et $(B_n)_{n\in N^*}$ sont établies.

Considérons maintenant la suite des fonctions f_n définies par:

$$f_n(z) = \frac{A_n(z) + B_n(z)}{[P(z)Q(z)]^{2^{n-1}}}.$$

Elles sont non constantes, meromorphes dans $|z| < 1$ et vérifiant sur $|z| = 1$ $|f_n(z)| \leqslant 2$.

Et les relations de récurrence vérifiées par les $A_n(z)$ et les $B_n(z)$ permettent d'écrire:

$$f_{n+1}(z) = f_n^2(z) - 2z^{2^n(h-s)}$$

et en posant $u_n = f_n(0)$, on détermine une suite de nombres réels vérifiant

$$u_{n+1} = u_n^2$$

et d'après le lemme 2

$$\lim [u_n]^{1/2^n} = \sqrt{u_1}.$$

A partir des $\theta_i, 1 \leqslant i \leqslant s$, formons le produit de Blasckke

$$\Psi(z) = \prod_{|\theta_i|>1} \left(\frac{1-\theta_i z}{\bar\theta_i - z} \cdot \frac{\bar\theta_i}{|\theta_i|}\right) \prod_{|\theta_i|<1} \left(\frac{\bar\theta_i - z}{1-\theta_i z} \cdot \frac{|\theta_i|}{\bar\theta_i}\right),$$

$$\Psi(0) = \frac{\prod\limits_{|\theta_i|<1} |\theta_i|}{\prod\limits_{|\theta_i|>1} |\theta_i|} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} |\theta_i|}{\Big(\prod\limits_{|\theta_i|>1} |\theta_i|\Big)^2} = \frac{p}{q\Big(\prod\limits_{|\theta_i|>1} |\theta_i|\Big)^2}.$$

Le lemme de Schwarz appliqué à la fonction

$$F_n(z) = f_n(z)[\Psi(z)]^{2^{n-1}}$$

holomorphe et bornée par 2 dans $|z| \leqslant 1$, donne

$$u_n = |f_n(0)| \leqslant 2\Bigg(\sqrt{\frac{q}{p}} \prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i|\Bigg)^{2^n} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1$$

et par conséquent:

$$\sqrt{\frac{q}{p}} \prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant \sqrt{u_1}$$

or

$$u_1 = f_1(0) = \frac{A_1(0) + B_1(0)}{qp} = \frac{q^2 + b^2 + 2qp}{qp} \geqslant \frac{(q+1)^2}{qp}$$

d'où on tire

$$\prod_{|\theta_i|>1} |\theta_i| \geqslant \sqrt{\frac{p}{q}}\, u_1 \geqslant 1 + \frac{1}{q}.$$

(b) Etude du cas $h \leqslant s$. Considérons le polynôme $D(z)$, à coéfficients entiers rationnels, défini par:

$$D(z) = \begin{cases} PQ - \varepsilon\varepsilon' z^{s-h} AB & \text{pour} \quad s \geqslant h+1, \\ \varepsilon_1 \dfrac{PQ - \varepsilon\varepsilon' AB}{z^k} & \text{pour} \quad s = h, \end{cases}$$

$\varepsilon_1 = \pm 1$ et k entier rationnel positif sont choisis de manière que $D(0) \geqslant 1$, ce qui est possible puisque $|D(z)| = |Q|^2 - |A|^2$ sur $|z| = 1$ et par suite $D(z)$ ne peut être identiquement nul.

Comme précedemment nous introduisons les polynômes $A_1(z)$ et $B_1(z)$:

$$A_1(z) = A^2+D,$$

$$B_1(z) = z^{2s}A_1(1/z) = \begin{cases} D+z^{2(s-h)}B^2 & \text{pour} \quad s \geqslant h+1, \\ B^2+z^{2k}D & \text{pour} \quad s = h, \end{cases}$$

le polynôme $A_1(z)$ et $B_1(z)$ sont à coefficients entiers rationnels, de degré $2s$, $A_1(0) \geqslant q^2+1$, $B_1(0) \geqslant 1$ et vérifiant sur $|z| = 1$

$$|B_1(z)| = |A_1(z)| \leqslant |A|^2+|D| = |Q|^2$$

si on considère

$$D_1 = A_1B_1-(PQ)^2.$$

De part les relations donnant $A_1(z)$ et $B_1(z)$ on constate que:

$$D_1 = \begin{cases} D[B+\varepsilon_1 z^k A]^2 & \text{pour} \quad s = h, \\ D[A-\varepsilon\varepsilon' z^{s-h}B]^2 & \text{pour} \quad s \geqslant h+1. \end{cases}$$

Comme D n'est pas identiquement nul, que $A(0) = q \geqslant 1$ et $B(0) \geqslant 1$, on déduit que $D_1(z)$ ne peut pas être identiquement nul; par suite l'égalité $|A_1(z)| = |Q(z)|^2$ sur $|z| = 1$ ne peut avoir lieu qu'en un nombre fini de points. Le procédé de réitération utilisé dans le cas $h \geqslant s+1$ montre qu'on peut mettre en évidence une suite de polynômes $[A_n(z)]_{n\geqslant 1}$ à coéfficients rationnels de degré $2^n s$ et vérifiant les relations de récurrence:

$$A_{n+1} = A_n^2+A_nB_n-(PQ)^{2^n},$$

$$B_{n+1} = B_n^2+A_nB_n-[PQ]^{2^n},$$

$$D_{n+1} = A_{n+1}B_{n+1}-(PQ)^{2^{n+1}} = D_n[A_n+B_n]^2.$$

Sur $|z| = 1$, les polynômes $A_{n+1}(z)$ et $B_{n+1}(z)$ vérifient les inégalités:

$$|A_{n+1}(z)| = |B_{n+1}(z)| \leqslant |A_n(z)|^2+|D_n(z)| = |Q(z)|^{2^{n+1}}$$

et comme $D_{n+1}(z)$ n'est pas identiquement nul, l'égalité $|A_{n+1}(z)| = |Q(z)|^{2^{n+1}}$ sur $|z| = 1$ n'a lieu qu'en un nombre fini de points. Les fonctions $f_n(z)$ réalisent cette fois-ci la relation de recurrence

$$f_{n+1}(z) = f_n^2(z)-2$$

et la suite des $u_n = f_n(0)$ la relation

$$u_{n+1} = u_n^2-2$$

et le lemme 2 donne:

$$\lim[u_n]^{1/2^n} = e^s.$$

Par l'application du lemme de Schwarz à la fonction $F_n(z) = f_n(z)[\Psi(z)]^{2^{n-1}}$ défini comme précedemment, on déduit

$$\sqrt{\frac{p}{q}}\Big(\prod_{|\theta_i|>1}|\theta_i|\Big) \geqslant e^s.$$

Soit

$$\prod_{|\theta_i|>1}|\theta_i| \geqslant \sqrt{\frac{p}{q}}\, e^s = \theta_{q,p} > \sqrt{\frac{p}{q}}$$

le nombre réel positif s est défini par:

$$u_1 = 2\cosh 2s \quad \text{ou} \quad e^{4s}-u_1e^{2s}+1 = 0$$

et par suite le nombre réel positif $\theta_{q,p}$ est défini par l'équation

$$q^2\theta_{q,p}^4-pqu_1\theta_{q,p}^2+p^2 = 0$$

et $\theta_{q,p}$ est croissant avec u_1.

(a) Cas $h \leqslant s-1$

$$pqu_1 = A_1(0)+B_1(0) = q^2+2qp$$

et $\theta_{q,p}$ vérifie par suite l'équation

$$(q\theta_{q,p}^2-q\theta_{q,p}-p)(q\theta_{q,p}^2+q\theta_{q,p}-p) = 0.$$

Comme $\theta_{q,p} \geqslant \sqrt{p/q}$, il reste:

$$q\theta_{q,p}^2-q\theta_{q,p}-p = 0.$$

Mais alors $\theta_{q,p}$ est supérieur à α_q zéro plus grand que 1 du polynôme qz^2-qz-1 et le résultat est établi.

(b) Cas $h = s$. Rappelons les écritures de:

$$A_1(z) = A^2(z)+D(z), \quad B_1(z) = B^2(z)+z^{2k}D(z);$$

si $k \neq 0$, ce qui impose en particulier $p = b$ et $\varepsilon\varepsilon' = +1$,

$$pqu_1 = A_1(0)+B_1(0) = q^2+p^2+D(0) \geqslant q^2+p^2+1;$$

si $k = 0$, ce qui donne nécessairement $p \neq b$,

$$pqu_1 = A_1(0)+B_1(0) = q^2+b^2+2q|p-\varepsilon\varepsilon' b|.$$

Il est facile alors de voir en utilisant $p \leqslant q$ et $b \leqslant q$,

$$pqu_1 \geqslant q^2+2q+(p-1)^2 \geqslant q^2+p^2+1.$$

Ainsi le cas $h = s$ donne:

$$pqu_1 \geqslant q^2+p^2+1.$$

Or nous avons remarqué que $\theta_{q,p}$ est croissant avec qpu_1, ce qui permet de dire que $\theta_{q,p}$ est supérieur au zéro $\beta_{q,p}$ plus grand que $\sqrt{p/q}$ du polynôme

$$q^2z^4-(q^2+p^2+1)z^2+p^2=\left(qz^2-\left(\sqrt{(q-p)^2+1}\right)z-p\right)\left(qz^2+\left(\sqrt{(q-p)^2+1}\right)z-p\right)$$

et par suite $\beta_{q,p}$ est zéro du polynôme

$$qz^2-\left(\sqrt{(q-p)^2+1}\right)z-p,$$

$\beta_{q,p}$ est une fonction croissante en p, on déduit $\beta_{q,p}>\beta_q$ zéro plus grand que 1 du polynôme

$$qz^2-\left(\sqrt{(q-1)^2+1}\right)z-1$$

et le résultat $\prod_{|\theta_i|>1}|\theta_i|\geqslant\beta_q$ est établi.

Bibliographie

[1] Mohamed Amara, *Ensembles fermés de nombre algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup., 3e série, 83 (1966), p. 215–270.

[2] J. Dufresnoy et C. Pisot, *Sur un ensemble d'entiers algébriques*, ibid. 70 (1953), p. 105–133.

[3] C. J. Smyth, *On the product of conjugatès outside the unit circle of an algebraic integers*, Bull. London Math. Soc. 3 (1972), p. 169–175.

Reçu le 14. 11. 1977
et dans la forme modifiée le 17. 3. 1978 (1001)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Échanges d'intervalles et transformations induites

par

Gérard Rauzy (Marseille)

0. Introduction

01. Soit s un entier supérieur ou égal à 2, σ une permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,s\}$, $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_s)$ un élément de R^s à coordonnées strictement positives. Désignons par $X_1,\ldots,X_s$ la partition de l'intervalle $X=[0,|\lambda|[$ où $|\lambda|=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i$ en les intervalles

$$X_i=\Big[\sum_{j<i}\lambda_j,\ \sum_{j\leqslant i}\lambda_j\Big[$$

(X_i est donc de longueur λ_i).

L'échange d'intervalle associé au couple (σ,λ) est la transformation T de X dans lui-même, définie comme l'isométrie par morceaux qui consiste à „découper X en les intervalles X_i, et à les replacer dans l'ordre $X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(s)}$".

De manière analytique, T est donc la transformation qui à un point x de l'intervalle X_i fait correspondre le point:

(01.1) $$Tx=x+a_i$$

où

$$a_i=\sum_{k<\sigma^{-1}(i)}\lambda_{\sigma(k)}-\sum_{k<i}\lambda_k.$$

Le vecteur colonne $a=(a_i)_{i=1,\ldots,s}$ se déduit du vecteur colonne $\lambda=(\lambda_i)_{i=1,\ldots,s}$ par l'égalité matricielle:

(01.2) $$a=M\lambda.$$

M est une matrice antisymétrique dépendant uniquement de la permutation σ et, si $M=(m_{ij})$, on a donc:

$m_{ii}=0$ pour $i=1,\ldots,s$,
$m_{ij}=-m_{ji}$ quelques soient i et j