réjonir autant de voir cerner les problèmes que de les voir résoudre. Pour les problèmes résolus, pour les problèmes posés, Pisot mérite bien la reconnaissance de tous les mathématiciens.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES
Orsay, France

Reçu le 7. 4. 1978 (1060)

ACTA ARITHMETICA
XXXIV (1979)

Lois de répartition des diviseurs, 1

par

JEAN-MARC DESHOUILLERS, FRANÇOIS DRESS,
GÉRALD TENENBAUM (*) (**) (Talence)

En respectueux hommage à Ch. Pisot

1. Introduction. La répartition des diviseurs premiers des entiers est assez bien connue; en particulier P. Erdös a montré [1] que l'ordre de grandeur en moyenne du i-ème facteur premier distinct de n, $p_i(n)$, est $\exp(\exp i)$. Ce résultat a été affiné par J. Galambos [3] qui a montré que, pour toute fonction $j(n)$ tendant vers l'infini en restant „un peu plus petite" que $\log\log n$, la densité des entiers pour lesquels $\log\log p_j(n) - j(n)$ est compris entre $u\sqrt{j}$ et $v\sqrt{j}$ est

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_u^v \exp(-t^2/2)\,dt.$$

On trouvera une bibliographie assez complète sur ce sujet dans la deuxième partie de cet article (G. Tenenbaum [5]).

La répartition des diviseurs „ordinaires" des entiers est moins bien connue et la première partie de cet article se propose de l'étudier en moyenne. Dans le cas des diviseurs premiers, le bon instrument de travail était $\frac{\log\log p_j(n)}{j}$, ici ce sera une variable aléatoire D_n qui prend les valeurs $\frac{\log d}{\log n}$, d parcourant l'ensemble des diviseurs de l'entier n, avec la probabilité uniforme $1/d(n)$ (ce qui revient à situer les diviseurs par rapport aux puissances n^u, $0 \leqslant u \leqslant 1$).

Si nous considérons des classes particulières d'entiers, on connaît deux cas limites:

(*) Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226.

(**) Les auteurs tiennent à remercier ici H. Delange pour les conseils et l'aide qu'il leur a apportés au cours de la rédaction de cet article.

— le cas des nombres premiers p, où la fonction de répartition de D_p est fixe (D_p prenant les valeurs 0 et 1 avec la probabilité 1/2);

— le cas des nombres n qui ont „beaucoup" de diviseurs, où la fonction de répartition de D_n tend vers la fonction de répartition d'une variable certaine prenant la valeur 1/2 (cf. P. Erdös et J.-L. Nicolas [2] qui démontrent dans un cas particulier l'approximation par une loi de Gauss de moyenne 1/2 et de variance équivalente à $\frac{\log\log n}{\log n}$).

Ces deux cas limites concernent des sous-ensembles de N de densité nulle, phénomène général car il n'est pas possible de trouver un sous-ensemble de densité positive sur lequel la fonction de répartition de D_n converge (G. Tenenbaum [5]).

Cependant, la moyenne des fonctions de répartition des D_n converge vers la loi de l'arc sinus, résultat qui est l'objet principal de cet article.

NOTATIONS. p désignera toujours un nombre premier, $v_p(n)$ désignera l'exposant de p dans la décomposition de l'entier n, $p^\beta \| n$ signifiera que $v_p(n) = \beta$, $d(n)$ et $\omega(n)$ désigneront les fonctions arithmétiques nombre de diviseurs de n et nombre de diviseurs premiers distincts de n; s sera un nombre complexe, σ et t seront implicitement définis par $s = \sigma + it$, $\zeta(s)$ désignera la fonction zêta de Riemann et $\Gamma(x)$ la fonction eulérienne.

THÉORÈME DDT. *La variable aléatoire D_n étant définie, pour chaque entier positif n, comme ci-dessus, on a, pour tout u dans* $[0, 1]$:

$$\sum_{n\leqslant x} \operatorname{Prob}(D_n \leqslant u) = x\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right).$$

La démonstration de ce théorème nécessite au préalable l'évaluation des sommes $A_k(x) = \sum_{n\leqslant x} 1/d(kn)$. En vue d'autres applications, nous donnerons cette évaluation pour une classe assez générale de fonctions multiplicatives.

DÉFINITION. Soit $n \mapsto \psi(n)$ une fonction multiplicative à valeurs complexes. Nous dirons que ψ appartient à la classe $\mathscr{B}_1$ si elle vérifie les trois conditions suivantes:

(i) $\forall n \in N^*$: $|\psi(n)| \leqslant 1$,

(ii) $\exists a \in C$, $0 < |a| < 1$, $\exists \delta > 0$: $\psi(p) = a + O(p^{-\delta})$,

(iii) $\forall \theta \in R$, $\exists \nu \geqslant 1$: $\psi(2^\nu) \neq -e^{i\nu\theta}$

(si ψ est à valeurs réelles, cette dernière condition signifie que la suite $(\psi(2^\nu))_{\nu\geqslant 1}$ est différente de $-1, -1, -1, -1, \ldots$ et de $1, -1, 1, -1, \ldots$).

DÉFINITION. Soit une fonction multiplicative $\psi \in \mathscr{B}_1$. Etant donné un réel $a \in \,]0, 1[$, nous dirons que ψ appartient à la classe $\mathscr{B}_a$ si elle vérifie la condition suivante:

(i') $\forall n \geqslant 2$: $|\psi(n)| \leqslant a$.

On pourrait remplacer cette condition par $|\psi(n)| \leqslant a + O(n^{-\delta})$ mais cela compliquerait les démonstrations sans présenter d'intérêt pour les applications pratiques. Enfin, on notera que la fonction $1/d$, qui sera utilisée pour la démonstration du théorème DDT, appartient à la classe $\mathscr{B}_{1/2}$.

THÉORÈME T. *Soit une fonction multiplicative $\psi \in \mathscr{B}_1$. Pour tout réel strictement positif θ on a (uniformément par rapport à l'entier $k \geqslant 1$ et au réel $x \geqslant 2$):*

$$\sum_{n\leqslant x} \psi(kn) = \frac{h}{\Gamma(a)} g(k) \frac{x}{\log^{1-a} x} + O_\theta\left(M_{\theta,k} \frac{x}{\log^{2-a} x}\right)$$

avec:

$$h = \prod_p \Big\{(1-p^{-1})^a \sum_{\nu\geqslant 0} \psi(p^\nu)p^{-\nu}\Big\} \neq 0,$$

$$g(k) = \prod_{p^\beta \| k} \frac{\sum_{\nu\geqslant 0} \psi(p^{\nu+\beta})p^{-\nu}}{\sum_{\nu\geqslant 0} \psi(p^\nu)p^{-\nu}}$$

et

$$M_{\theta,k} = \prod_{p|k} (1 + 2p^{-(1-\theta)}).$$

Si, de plus $\psi \in \mathscr{B}_a$, on peut choisir:

$$M_{\theta,k} = (a+\theta)^{\omega(k)}.$$

COMPLÉMENT. *Avec les mêmes hypothèses et notations, on a:*

$$\sum_{\nu\geqslant 0} g(p^\nu)p^{-\nu} \sum_{\nu\geqslant 0} \psi(p^\nu)p^{-\nu} = \sum_{\nu\geqslant 0} (\nu+1)\psi(p^\nu)p^{-\nu}.$$

2. Calculs et résultats préliminaires. On considère une fonction ψ appartenant à $\mathscr{B}_1$. Le théorème T sera déduit des propriétés de la série de Dirichlet $\sum \psi(kn)n^{-s}$ dans un demi-plan $\sigma \geqslant 1-\eta$.

Nous allons dès maintenant déterminer une valeur admissible de η. Comme $|\psi(2^\nu)| \leqslant 1$ pour tout entier ν, la série $1 + \sum_{\nu\geqslant 1} \psi(2^\nu)Z^\nu$ définit dans le disque $|Z| < 1$ une fonction holomorphe $\Psi(Z)$ qui n'admet pas de zéro dans le disque $|Z| < \frac{1}{2}$; en outre, la condition (iii) imposée à ψ entraîne que $\Psi(Z)$ n'a pas de zéro sur la circonférence $|Z| = \frac{1}{2}$ et il existe donc un réel $b > 1$ tel que $\Psi(Z)$ n'ait pas de zéro dans le disque $|Z| \leqslant b/2$. On choisira:

$$\eta = \min\left(\frac{\log b}{\log 2}, \frac{\delta}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

où δ est le réel introduit à la condition (ii) et $\frac{1}{3}$ a pour mérite supplémentaire d'être inférieur à $1-\dfrac{\log 2}{\log 3}$.

Dans tout ce paragraphe et le suivant, les constantes impliquées par les symboles O de Landau seront uniformes en $k\geqslant 1$ et $x\geqslant 2$; leur dépendance en ψ sera implicite et tout autre dépendance sera explicitée.

Nous introduisons les séries de Dirichlet

$$f_k(s)=\sum_{n\geqslant 1}\psi(kn)n^{-s}$$

et

$$g_k(s)=\prod_{p^\beta\| k}\left(\frac{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^{\nu+\beta})p^{-\nu s}}{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^\nu)p^{-\nu s}}\right).$$

De la relation suivante, valable pour tout entier n,

$$\psi(kn)=\prod_p\psi(p^{v_p(n)+v_p(k)})$$

on déduit alors que l'on a, dans tout demi-plan de convergence commun à g_k, f_1 et f_k:

$$\begin{aligned}g_k(s)f_1(s)&=\prod_{p^\beta\| k}\Big\{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^{\nu+\beta})p^{-\nu s}\Big\}\prod_{p\nmid k}\Big\{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^\nu)p^{-\nu s}\Big\}\\&=\prod_p\Big\{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^{\nu+v_p(k)})p^{-\nu s}\Big\}=\prod_p\Big\{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^{v_p(p^\nu)+v_p(k)})p^{-\nu s}\Big\}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\prod_p\psi(p^{v_p(n)+v_p(k)})\Big\}n^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(kn)n^{-s}=f_k(s).\end{aligned}$$

On pose $g_k(s)=\sum_{n\geqslant 1}\gamma_k(n)n^{-s}$.

Lemme 1. *Dans le demi-plan* $\operatorname{Re} s=\sigma\geqslant 1-\eta$, *on a:*

$$\sum_{n\geqslant 1}|\gamma_k(n)|n^{-\sigma}=O\big(\mu_k(\sigma)\big)$$

avec:

$$\mu_k(\sigma)=\prod_{p|k}(1+2p^{-\sigma}).$$

Si de plus $\psi\in\mathscr{B}_a$ *on a, pour tout réel* $\theta>0$:

$$\sum_{n\geqslant 1}|\gamma_k(n)|n^{-\sigma}=O_\theta\big((a+\theta)^{\omega(k)}\big).$$

Démonstration. On décompose en „facteurs locaux"

$$g_k(s)=\prod_{p^\beta\| k}g_{p^\beta}(s)$$

où:

$$g_{p^\beta}(s)=\frac{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^{\nu+\beta})p^{-\nu s}}{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^\nu)p^{-\nu s}}=\sum_{n\geqslant 1}\gamma_{p^\beta}(n)n^{-s},$$

ce qui entraîne

$$\sum_{n\geqslant 1}|\gamma_k(n)|n^{-\sigma}\leqslant\prod_{p^\beta\| k}\Big(\sum_{n\geqslant 1}|\gamma_{p^\beta}(n)|n^{-\sigma}\Big).$$

Pour $p=2$, on pose $Z=2^{-s}$, soit:

$$g_{2^\beta}(s)=\frac{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(2^{\nu+\beta})Z^\nu}{\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(2^\nu)Z^\nu}.$$

Le numérateur est une série entière convergente pour $\sigma>0$ car il est majoré en valeur absolue par $\sum_{\nu\geqslant 0}2^{-\nu\sigma}=1/(1-2^{-\sigma})$. Le dénominateur a été étudié au début de ce paragraphe, où nous avons montré qu'il n'admettait pas de zéro dans le disque $|Z|\leqslant b/2$. Son inverse est donc une série entière convergente pour $\sigma>1-\eta'$, avec $\eta'>\dfrac{\log b}{\log 2}\geqslant\eta$. Par conséquent,

$$g_{2^\beta}(s)=\sum_{\nu\geqslant 0}\gamma_{2^\beta}(2^\nu)2^{-\nu s},$$

considérée comme série entière en 2^{-s}, est convergente pour $\sigma>1-\eta'$, donc absolument convergente pour $\sigma\geqslant 1-\eta$, ce qui démontre que:

$$\sum_{n\geqslant 1}|\gamma_{2^\beta}(n)|n^{-\sigma}=O(1).$$

Le cas des autres facteurs est plus simple, si p est impair on a

$$g_{p^\beta}(s)=\sum\gamma_{p^\beta}(p^\nu)p^{-\nu s}$$

où $\gamma_{p^\beta}(p^\nu)$ peut se calculer par récurrence grâce à la relation

$$\gamma_{p^\beta}(p^\nu)=\psi(p^{\nu+\beta})-\big(\psi(p)\gamma_{p^\beta}(p^{\nu-1})+\ldots+\psi(p^{\nu-1})\gamma_{p^\beta}(p)+\psi(p^\nu)\gamma_{p^\beta}(1)\big)$$

qui entraîne la majoration $|\gamma_{p^\beta}(p^\nu)|\leqslant 2^\nu$. On en déduit immédiatement:

$$\sum_{n\geqslant 1}|\gamma_{p^\beta}(n)|n^{-\sigma}\leqslant\sum_{\nu\geqslant 0}2^\nu p^{-\nu\sigma}=1/(1-2p^{-\sigma}).$$

On a alors, pour $\sigma\geqslant 1-\eta$ (qui assure $1-2p^{-\sigma}\geqslant 1-2\cdot 3^{-\sigma}\geqslant 1-2\cdot 3^{-(1-\eta)}>0$ d'après le choix de η):

$$\sum_{n\geqslant 1}|\gamma_k(n)|n^{-\sigma}=O\Big(\prod_{\substack{p|k\\ p\neq 2}}\frac{1}{1-2p^{-\sigma}}\Big)=O\Big(\prod_{\substack{p|k\\ p\neq 2}}\frac{1+2p^{-\sigma}}{1-4p^{-2\sigma}}\Big).$$

Comme le produit $\prod_{\substack{p|k\\p\neq 2}} \frac{1}{1-4p^{-2\sigma}}$ est uniformément majoré par le produit convergent $\prod_{p\neq 2} \frac{1}{1-4p^{-2(1-\eta)}}$, on obtient (au facteur éventuel $1+2\cdot 2^{-\sigma}$ près, qui est sans influence), la première majoration énoncée dans le lemme.

Pour obtenir la seconde majoration, on majore le facteur $\sum_{n\geqslant 1} |\gamma_{2^\beta}(n)|n^{-\sigma}$ comme précédemment et on utilise la condition (i′) pour obtenir une majoration plus fine des autres facteurs. La relation de récurrence sur les $\gamma_{p^\beta}(p^\nu)$ entraîne la majoration $|\gamma_{p^\beta}(p^\nu)| \leqslant a2^\nu$. On en déduit immédiatement:

$$\sum_{n\geqslant 1} |\gamma_{p^\beta}(n)|n^{-\sigma} \leqslant \sum_{\nu\geqslant 0} a\,2^\nu p^{-\nu\sigma} = \frac{a}{1-2p^{-\sigma}} \leqslant a+\theta$$

dès que $p \geqslant P = \left(2\cdot\frac{a+\theta}{\theta}\right)^{1/(1-\eta)}$.

Il n'y a par conséquent qu'un nombre fini de facteurs ne vérifiant pas

$$\sum_{n\geqslant 1} |\gamma_{p^\beta}(n)|n^{-\sigma} \leqslant a+\theta,$$

d'où:

$$\sum_{n\geqslant 1} |\gamma_k(n)|n^{-\sigma} = O\Big\{\prod_{\substack{p^\beta\|k\\p\neq 2\\p<P}} |g_{p^\beta}(s)| \prod_{\substack{p^\beta\|k\\p\neq 2\\p\geqslant P}} (a+\theta)\Big\} = O_\theta\big((a+\theta)^{\omega(k)}\big).$$

Nous posons maintenant:

$$A_k(x) = \sum_{n\leqslant x} \psi(kn).$$

Il est clair que le comportement de $A_k(x)$ est lié à la nature de la singularité de $f_k(s)$ au point $s=1$. Comme nous avons vu que l'on a

$$f_k(s) = g_k(s)f_1(s)$$

et comme g_k n'a pas de pôle dans le demi-plan $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1-\eta$ il suffit d'étudier $f_1(s) = \sum_{n\geqslant 1} \psi(n)n^{-s}$. L'hypothèse $\psi \in \mathscr{B}_1$ implique que le comportement au voisinage de $s=1$ de $f_1(s)$ est lié à celui de $\zeta(s)^a$:

LEMME 2. *Le produit infini* $\prod_p \big\{(1-p^{-s})^a\big(\sum_{\nu\geqslant 0} \psi(p^\nu)p^{-\nu s}\big)\big\}$ *converge et définit une fonction $h(s)$ holomorphe et absolument convergente dans le demi-plan* $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1-\eta$ *(la détermination de $(1-p^{-s})^a$ étant prise par continuité à partir de la détermination principale pour s réel positif).*

La valeur $h = h(1)$ est non nulle (et réelle positive si ψ est à valeurs réelles).

Démonstration. Pour $\sigma \geqslant 1-\eta$, on a:

$$(1-p^{-s})^a \sum_{\nu\geqslant 0} \psi(p^\nu)p^{-\nu s} = r_p(s) = \sum_{\nu\geqslant 0} \varrho_p(\nu)p^{-\nu s}$$

où

$$(1-p^{-s})^a = 1 - ap^{-s} + \sum_{\nu\geqslant 2} a(\nu)p^{-\nu s} \quad \text{avec} \quad |a(\nu)| \leqslant 1,$$

$$\sum_{\nu\geqslant 0} \psi(p^\nu)p^{-\nu s} = 1 + \big(a + O(p^{-\delta})\big)p^{-s} + \sum_{\nu\geqslant 2} \psi(p^\nu)p^{-\nu s}.$$

Il s'ensuit que:

$$\varrho_p(0) = 1,$$
$$\varrho_p(1) = O(p^{-\delta}),$$
$$|\varrho_p(\nu)| \leqslant \nu+1 \quad \text{pour} \quad \nu \geqslant 2$$

et on en déduit:

$$1 \leqslant \sum_{\nu\geqslant 0} |\varrho_p(\nu)|p^{-\nu\sigma} \leqslant 1 + O(p^{-\sigma-\delta}) + O\Big(\sum_{\nu\geqslant 2} (\nu+1)p^{-\nu\sigma}\Big)$$
$$= 1 + O(p^{-\sigma-\delta}) + O\left(\frac{3p^{-2\sigma}+2p^{-3\sigma}}{(1-p^{-\sigma})^2}\right),$$

le dernier terme étant $O(p^{-2\sigma})$ uniformément en p pour $\sigma \geqslant 1-\eta > 0$. En utilisant les inégalités $\sigma \geqslant 1-\eta$ et $\delta \geqslant 2\eta$, puis $\eta \leqslant 1/3$, on obtient:

$$1 \leqslant \sum |\varrho_p(\nu)|p^{-\nu\sigma} \leqslant 1 + O(p^{-1-\eta}) + O(p^{-2+2\eta}) = 1 + O(p^{-1-\eta})$$

ce qui démontre la convergence absolue de $r_p(s)$ puis, comme $\sum_p p^{-1-\eta}$ est absolument convergente, la convergence absolue de la série de Dirichlet $h(s) = \prod_p r_p(s)$ dans le demi-plan $\sigma \geqslant 1-\eta$. Pour montrer que $h = h(1)$ est non nulle, il suffit de constater que chaque facteur est non nul: pour $p=2$, cela résulte de la condition (iii), pour $p \geqslant 3$, de la condition (i). Enfin, si ψ est à valeurs réelles, il est clair que chaque facteur est réel et positif.

COROLLAIRE. *Les fonctions $f_k(s)$ possèdent un prolongement analytique défini par $f_k(s) = \zeta^a(s)g_k(s)h(s)$ dans le demi-plan* $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1-\eta$ *privé de l'intervalle réel $[1-\eta, 1]$ et des coupures $[1-\eta+i\mu, \lambda+i\mu]$ correspondant aux éventuels zéros $\lambda+i\mu$ de la fonction ζ dans la bande $1-\eta \leqslant \sigma < 1$ (la détermination choisie pour $\zeta^a(s)$ étant prise par continuité à partir de la détermination principale pour s réel >1).*

De plus, si on pose $g_k(s)\,h(s) = h_k(s) = \sum_{n\geqslant 1} \tau_k(n) n^{-s}$, *les séries* $h_k(s)$ *sont absolument convergentes dans le demi-plan* $\operatorname{Re} s = \sigma \geqslant 1-\eta$ *et on a la majoration*

$$\sum_{n\geqslant 1} |\tau_k(n)|\, n^{-\sigma} = O\big(\mu_k(\sigma)\big).$$

Si, en outre, $\psi \in \mathscr{B}_a$, *on a pour tout réel* $\theta > 0$

$$\sum_{n\geqslant 1} |\tau_k(n)|\, n^{-\sigma} = O\big((a+\theta)^{\omega(k)}\big).$$

Démonstration. L'existence du prolongement analytique résulte immédiatement du lemme 2. Comme $h(s)$ converge absolument et est uniformément bornée pour $\sigma \geqslant 1-\eta$, le produit $g_k(s)\,h(s) = h_k(s)$ converge absolument et le lemme 1 entraîne la première majoration de l'énoncé. Le cas $\psi \in \mathscr{B}_a$ se traite de manière identique.

Remarque. Ces majorations seront utilisées sous les deux formes:

$$\sum_{n\leqslant z} |\tau_k(n)|\, n^{-\sigma} = O\big(\mu_k(\sigma)\big)$$

et

$$\sum_{y\leqslant n\leqslant z} \left|\frac{\tau_k(n)}{n}\right| = O\big(y^{\sigma-1}\mu_k(\sigma)\big).$$

3. Démonstration du théorème T. Ayant mis en évidence la nature de la singularité de $f_k(s)$ au point $s=1$, nous allons prouver le théorème T en utilisant le résultat suivant dû à Selberg [4]:

Si l'on pose, pour $\operatorname{Re} s = \sigma > 1$,

$$\zeta(s)^a = \sum_{n=1}^{\infty} d_a(n) n^{-s}$$

on a, uniformément pour $|a| \leqslant A$ *et* $x \geqslant 2$

$$D_a(x) = \sum_{n\leqslant x} d_a(n) = \frac{1}{\Gamma(a)}\,\frac{x}{\log^{1-a} x} + O\left(\frac{x}{\log^{2-a} x}\right).$$

De l'égalité $f_k(s) = \zeta(s)^a h_k(s)$, nous déduisons donc pour $x \geqslant 1$

$$A_k(x) = \sum_{n\leqslant x} \psi(kn) = \sum_{n\leqslant x} \tau_k(n)\, D_a\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= \frac{x}{\Gamma(a)} \sum_{n\leqslant x/2} \frac{\tau_k(n)}{n} \log^{a-1}\frac{x}{n} + O\left(x \sum_{n\leqslant x/2} \left|\frac{\tau_k(n)}{n} \log^{a-2}\frac{x}{n}\right|\right) + \sum_{x/2<n\leqslant x} \tau_k(n).$$

Soit θ un réel vérifiant $0<\theta<\eta$ (on a $M_{\theta,k} = \mu_k(1-\theta)$); d'après le corollaire du lemme 2 on a d'une part:

$$\Big|\sum_{x/2<n\leqslant x} \tau_k(n)\Big| \leqslant x^{1-\theta} \sum_{n\leqslant x} \frac{|\tau_k(n)|}{n^{1-\theta}} = O\big(\mu_k(1-\theta)x^{1-\theta}\big) = O\big(M_{\theta,k} x^{1-\theta}\big)$$

et d'autre part:

$$\Big|x \sum_{n\leqslant x/2} \frac{\tau_k(n)}{n} \log^{\beta-2}\frac{x}{n}\Big| = O\left(\frac{x}{\log^{2-\beta} x} \sum_{n\leqslant \sqrt{x}} \frac{|\tau_k(n)|}{n}\right) + O\left(x \sum_{\sqrt{x}<n\leqslant x/2} \frac{|\tau_k(n)|}{n}\right)$$

$$= O\left(M_{\theta,k} \frac{x}{\log^{2-\beta} x}\right) + O\big(M_{\theta,k} x^{1-\theta/2}\big).$$

En reportant dans l'expression de $A_k(x)$, nous obtenons donc, pour tout $\theta \in\,]0,\eta[$ et tout $x \geqslant 2$

$$A_k(x) = \frac{x}{\Gamma(a)} \sum_{n\leqslant x/2} \frac{\tau_k(n)}{n} \log^{a-1}\frac{x}{n} + O\left(M_{\theta,k} \frac{x}{\log^{2-a} x}\right)$$

$$= \frac{x}{\Gamma(a)} \sum_{n\leqslant \sqrt{x}} \frac{\tau_k(n)}{n} \left\{\log^{a-1} x + O\left(\frac{\log n}{\log^{2-a} x}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{x}{\Gamma(a)}\, O\left(\sum_{\sqrt{x}<n\leqslant x/2} \left|\frac{\tau_k(n)}{n}\right|\right) + O\left(M_{\theta,k} \frac{x}{\log^{2-a} x}\right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)}\,\frac{x}{\log^{1-a} x} \sum_{n\leqslant \sqrt{x}} \frac{\tau_k(n)}{n} +$$

$$+ O\left(\frac{x}{\log^{2-a} x} \sum_{n\leqslant \sqrt{x}} \frac{|\tau_k(n)|}{n} \log n\right) + O\big(M_{\theta,k} x^{1-\theta/2}\big) + O\left(M_{\theta,k} \frac{x}{\log^{2-a} x}\right).$$

En remarquant que, d'après le corollaire au lemme 2, on a:

$$\sum_{n\leqslant \sqrt{x}} \frac{\tau_k(n)}{n} = h(1) g_k(1) + O\big(x^{-\theta/2} M_{\theta,k}\big) = hg(k) + O\big(x^{-\theta/2} M_{\theta,k}\big)$$

et aussi

$$\sum_{n\leqslant \sqrt{x}} \frac{|\tau_k(n)|}{n} \log n = O_\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\tau_k(n)|}{n^{1-\theta}}\right) = O_\theta(M_{\theta,k})$$

il vient finalement

$$A_k(x) = \frac{hg(k)}{\Gamma(a)}\,\frac{x}{\log^{1-a} x} + O_\theta\left(M_{\theta,k} \frac{x}{\log^{2-a} x}\right).$$

Dans le cas où $\psi \in \mathscr{B}_a$, le corollaire du lemme 2 montre que l'on peut remplacer dans les calculs précédents $M_{\theta,k}$ par $(a+\theta)^{\omega(k)}$ ce qui achève la démonstration du théorème T.

Démonstration du complément. L'appartenance de ψ à la classe $\mathscr{B}_1$ entraîne l'absolue convergence de la série de terme général $(n+1)\psi(p^n)p^{-n}$ et on a:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\psi(p^n)p^{-n} &= \sum_{n\geqslant 0}\psi(p^n)p^{-n}\sum_{m=0}^{n}1\\ &= \sum_{m\geqslant 0}\sum_{n\geqslant m}\psi(p^n)p^{-n} = \sum_{m\geqslant 0}\sum_{l\geqslant 0}\psi(p^{l+m})p^{-l-m}\\ &= \sum_{m\geqslant 0}\Big(\sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^\nu)p^{-\nu}\Big)g(p^m)p^{-m}\\ &= \sum_{\nu\geqslant 0}\psi(p^\nu)p^{-\nu}\sum_{m\geqslant 0}g(p^m)p^{-m}.\end{aligned}$$

4. Démonstration du théorème DDT. Appliquons le théorème T à la fonction $\psi = 1/d$, qui appartient à la classe $\mathscr{B}_{1/2}$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$. On obtient:

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{d(kn)} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}g(k)\frac{x}{\sqrt{\log x}} + O_0\left(\left(\frac{1}{2}+\theta\right)^{\omega(k)}\frac{x}{\log^{3/2}x}\right)$$

avec

$$h = \prod_p\left\{\left(1-p^{-1}\right)^{1/2}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{p^{-\nu}}{\nu+1}\right\} = \left(\prod_p p(p-1)\log^2\frac{p}{p-1}\right)^{1/2} = 0.969\ldots$$

et

$$g(k) = \prod_{p^\beta\| k}\frac{\sum_{\nu\geqslant 0}p^{-\nu}/(\nu+\beta+1)}{\sum_{\nu\geqslant 0}p^{-\nu}/(\nu+1)}.$$

Avant d'effectuer l'étape ultime de la démonstration, il est nécessaire d'évaluer la fonction sommatoire de $g(k)$:

Lemme 3. *On a la formule asymptotique*:

$$\sum_{n\leqslant x}g(n) = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\frac{x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{3/2}x}\right).$$

Démonstration. On constate que la fonction g appartient à la classe $\mathscr{B}_1$ avec $\alpha = 1/2$. On peut donc lui appliquer le théorème T (avec $k=1$) ce qui donne:

$$\sum_{n\leqslant x}g(n) = \prod_p\Big\{(1-p^{-1})^{1/2}\sum_{\nu\geqslant 0}g(p^\nu)p^{-\nu}\Big\}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{\sqrt{\log x}} + O\left(\frac{x}{\log^{3/2}x}\right).$$

Comme $(\nu+1)\psi(p^\nu)$ est toujours égal à 1, le complément au théorème T prend ici la forme sympathique:

$$\sum_{\nu\geqslant 0}g(p^\nu)p^{-\nu} = \Big(\sum_{\nu\geqslant 0}p^{-\nu}\Big)\Big(\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{p^{-\nu}}{\nu+1}\Big)^{-1} = \Big\{(1-p^{-1})\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{p^{-\nu}}{\nu+1}\Big\}^{-1},$$

d'où:

$$\prod_p\Big\{(1-p^{-1})^{1/2}\sum_{\nu\geqslant}g(p^\nu)p^{-\nu}\Big\} = \prod_p\Big\{(1-p^{-1})^{-1/2}\Big(\sum p^{-\nu}/(\nu+1)\Big)^{-1}\Big\} = 1/h.$$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème.

Posons:

$$S(x, u) = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{d(n)}\operatorname{card}\{k\colon k|n \text{ et } k\leqslant n^u\};$$

le théorème DDT

$$\sum_{n\leqslant x}\operatorname{Prob}(D_n\leqslant u) = x\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right)$$

se traduit par

$$S(x, u) = x\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right)$$

et c'est sous cette forme que nous le démontrerons.

Remarquons tout d'abord que, grâce à la symétrie des diviseurs de n autour de $\sqrt{n}$, on a pour tout u de $[0,1]$

$$S(x, u) + S(x, 1-u) = [x] + O\left(\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{d(n)}\right) = x + O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right).$$

Dans toute la suite de la démonstration nous pourrons donc supposer u inférieur ou égal à $1/2$.

On a:

$$S(x, u) = \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{d(n)}\sum_{\substack{k|n\\ k\leqslant x^u}}1 - \sum_{n\leqslant x}\frac{1}{d(n)}\sum_{\substack{k|n\\ n^u<k\leqslant x^u}}1 = T(x, u) - R(x, u),$$

avec

$$\begin{aligned}R(x, u) &= \sum_{k\leqslant x^u}\sum_{\substack{n\leqslant x/k\\ n<k^{(1-u)/u}}}\frac{1}{d(nk)} \leqslant \sum_{k\leqslant x^u}\sum_{n\leqslant k^{(1-u)/u}}\frac{1}{d(n)}\\ &= O\left(\sum_{2\leqslant k\leqslant x^u}\frac{k^{(1-u)/u}}{\sqrt{\log(k^{(1-u)/u})}}\right) = O\left(\sum_{k\leqslant x^u}\frac{x^{1-u}}{\sqrt{\log(x^{1-u})}}\right) = O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right).\end{aligned}$$

D'autre part, on a:

$$T(x, u) = \sum_{k\leqslant x^u}\sum_{n\leqslant x/k}\frac{1}{d(nk)}.$$

En utilisant le théorème T, il vient donc:

$$T(x,u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}x\sum_{k\leqslant x^u}\left\{\frac{g(k)}{k}\log^{-1/2}x/k + O_\theta\left(\frac{(\frac12+\theta)^{\omega(k)}}{k}\log^{-3/2}x/k\right)\right\}$$
$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}}x\sum_{k\leqslant x^u}\frac{g(k)}{k}\log^{-1/2}x/k + O_\theta\left(\frac{x}{\log^{3/2}x}\sum_{k\leqslant x^u}\frac{(\frac12+\theta)^{\omega(k)}}{k}\right).$$

L'évaluation du terme reste est facile compte tenu du résultat classique:

$$\sum_{k\leqslant y}\frac{b^{\omega(k)}}{k} = O(\log^b y)$$

(qu'on pourrait d'ailleurs démontrer grâce au théorème T dans le cas $b<1$); on obtient:

$$T(x,u) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}x\sum_{k\leqslant x^u}\frac{g(k)}{k}\log^{-1/2}x/k + O_\theta\left(\frac{x}{\log^{1-\theta}x}\right).$$

On pose $G(y) = \sum_{k\leqslant y} g(k)$; une intégration par parties permet de calculer le terme principal:

$$\sum_{k\leqslant x^u}\frac{g(k)}{k}\log^{-1/2}x/k$$
$$= \frac{G(x^u)}{x^u\sqrt{(1-u)\log x}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right) - \int_2^x G(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t\sqrt{\log x/t}}\right)$$
$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left\{O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right) + \int_2^{x^u}\frac{t}{\sqrt{\log t}}\left(1+O\left(\frac{1}{\log t}\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{t^2\sqrt{\log x/t}} - \frac{1}{2t^2\log^{3/2}x/t}\right)dt\right.$$
$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left\{O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right) + \left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)\int_2^{x^u}\frac{(1+O(1/\log t))\,dt}{t\sqrt{\log t}\,\sqrt{\log x/t}}\right\}.$$

En posant $v = \log t/\log x$, on obtient finalement:

$$\sum_{k\leqslant x^u}\frac{g(k)}{k}\log^{-1/2}x/k = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\left\{O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right) + \left(1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\int_0^u\frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right) + O\left(\frac{1}{\log x}\int_{\frac{\log 2}{\log x}}^{u}\frac{dv}{v\sqrt{v(1-v)}}\right)\right)\right\}$$
$$= \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{u} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)$$

ce qui achève la démonstration du théorème DDT.

Remarque. Il est facile de vérifier, pour $u\in\left[0,\frac{\log 2}{\log x}\right]$, l'équivalence

$$S(x,u)\sim\frac{h}{\sqrt{\pi}}\frac{x}{\sqrt{\log x}}$$

(et des équivalences similaires pour $u\in\left[\frac{\log 2}{\log x},\frac{\log 3}{\log x}\right]$, etc...) ce qui montre que l'ordre de grandeur du terme reste dans le théorème DDT est le meilleur possible si on exige l'uniformité en u dans $[0,1]$.

Bibliographie

[1] P. Erdös, *On the distribution function of additive functions*, Ann. of Math. 47 (1946), p. 1–20.

[2] P. Erdös et J.-L. Nicolas, *Méthodes probabilistes et combinatoires en théorie des nombres*, Bull. Soc. Math. 2e série 100 (1976), p. 301–320.

[3] J. Galambos, *The sequences of prime divisors of integers*, Acta Arith. 31 (1976), p. 213–218.

[4] A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. 18 (1954), p. 83–87.

[5] G. Tenenbaum, *Lois de répartition des diviseurs*, 2, Acta Arith. 38 (à paraître).

U.E.R. DE MATHÉMATIQUE ET D'INFORMATIQUE
UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, France

Reçu le 30. 7. 1977
et dans la forme modifiée le 17. 6. 1978 (963)